P9B – Spojité MŘ - Yuleův proces

2.4 Yuleův proces

Yuleův proces popisuje vývoj početnosti souboru jedinců, kteří nezanikají a rozmnožují se dělením nebo štěpením. Pravděpodobnost, že jedinec existující v čase $t \geq 0$ dá v intervalu $(t, t+\Delta t)$ vznik dalšímu jedinci, nechť je $q\Delta t + o(\Delta t)$ pro $\Delta t \to 0$. Chování jedinců není nijak vzájemné ovlivňováno. Stav procesu X_t je dán celkovým počtem jedinců (=rozsahem populace) **v čase t.**

Přechodové intenzity náhodného procesu jsou dány tímto předpisem:

$q_{i,i+1} = iq$, $q_{i,i} = -iq$, **přičemž** $q_{i,j} = 0$ **pro** $i \neq j \neq i+1$, $i,j = 1,2,3,\ldots$

Matice intenzit přechodu Yuleova procesu tedy vypadá takto:

Číslování stavů: 1 2 3 4 5

(2.30)

$$Q = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -q & q & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -2q & 2q & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -3q & 3q & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -4q & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Tomu odpovídající **matice pravděpodobností přechodu Yuleova procesu je následující:**

Číslování stavů: 1 2 3 4 5

(2.31)

$$P = \begin{pmatrix} 1-q\Delta t & q\Delta t & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1-2q\Delta t & 2q\Delta t & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1-3q\Delta t & 3q\Delta t & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1-4q\Delta t & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Odvození

(2.32A) $p_1(t+\Delta t) = [1 - q\Delta t + o(\Delta t)]\, p_1(t) + o(\Delta t)$ **pro** $k \geq 1$[1]

(2.32B) $p_k(t+\Delta t) = [1 - kq\Delta t + o(\Delta t)]\, p_k(t) + [kq\Delta t + o(\Delta t)]\, p_{k-1}(t) + o(\Delta t)$ **pro** $k < 1$[2]

Po obdobné úpravě (2.32B) máme

---

[1] Případ k=0 se vyskytnout nemůže, protože jedinci neodumírají a na druhé straně z nulové populace nevzejde žádný živý jedinec.

[2] Případ k=0 se vyskytnout nemůže, protože jedinci neodumírají a na druhé straně z nulové populace nevzejde žádný živý jedinec.

$$\frac{p_1(t+\Delta t)-p_1(t)}{\Delta t}=\left[-qp_1(t)+p_k(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right]+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta t}=\left[-kqp_k(t)+p_k(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right]+\left[kqp_{k-1}\Delta t+p_{k-1}(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right]+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Levá strana v limitě pro $\Delta t \to 0$ dává derivaci $p_k'(t)$, přičemž členy $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$ zanedbatelné svou velikostí **odpadnou**

(2.33A) $p_1'(t)=-qp_k(t)$. $k=1$. □ .

(2.33B) $p_k'(t)=-kqp_k(t)+kqp_{k-1}(t)$. $k=2,3,\dots$ □ .

Poznámka: **V případě, že uvažujeme pravděpodobnosti přechodu z jiných stavů, platí retrospektivní rovnice:**

(2.34) $\frac{dp_{ik}(t)}{dt}=-iqp_{ik}(t)+iqp_{i+1,k}(t)$ $i=1,2,3,\dots$

s počáteční podmínkou $p_{ik}(0)=\delta_{ik}$, $i=1,2,3,\dots$

Řešení těchto rovnic je

(2.35A) $P_{ik}(t)=\binom{k-1}{k-i}e^{-iqt}(1-e^{-qt})^{k-i}$ $i=1,2,\dots,k$

(2.35B) $p_{ik}(t)=0$ $i=k+1,k+2,\dots$ □ .

Určitým zobecněním Yuleova procesu je

2.4A Divergentní proces růstu

Ten je popsán intenzitami přechodu

$$q_{i,i+1} = q_i \,, \quad i = 1,2,3,\ldots$$ **neboli maticemi**

$$\begin{array}{ll} \textbf{Číslování stavů:} & \begin{array}{ccccc} \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 & \quad 5 \end{array} \\ (2.36) & Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -q_2 & q_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -q_3 & q_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -q_4 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \quad \text{a} \end{array}$$

(2.37)
$$P = \begin{pmatrix} 1-q_1\Delta t & q_1\Delta t & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1-q_2\Delta t & q_2\Delta t & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1-q_3\Delta t & q_3\Delta t & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1-q_4\Delta t & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Doby mezi přechody ze stavu do stavu označme $T_i \;\; i = 1,2,3,\ldots$: Jsou to vzájemně nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{q_i}$[3]

Platí-li $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} < \infty$, dostaneme $E\sum_{i=1}^{\infty} T_i = \sum_{i=1}^{\infty} ET_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} < \infty$.

Odtud máme mj. že $\sum_{i=1}^{\infty} T_i < \infty$ s pravděpodobností 1. Trajektorie tohoto procesu v konečném čase diverguje do nekonečna. To se projeví mj. v nejednoznačnosti řešení retrospektivních rovnic pro pravděpodobnosti přechodu.

---

[3] **Lze to ověřit shodně jako v případě *Poissonova procesu*.**