Stanovení chyby předpovědi

Uvažujme opět **standardní normální lineární regresní model**, u kterého jsme již předtím ověřili jeho způsobilost k prognózování minimálně ve smyslu ověření stability modelové struktury.

Budeme pracovat s modelem v zápisu (pro predikované období o délce m)

(1) $$y_p = X_p.\beta + \varepsilon_p$$

y_p je [*m-členný*] sloupcový vektor hodnot vysvětlované (endogenní) proměnné, kterých nabude v predikovaném období

X_p je [*m x k– rozměrná*] matice hodnot vysvětlujících (exogenních) proměnných realizovaných v predikovaném období

β je [*k-členný*] sloupcový vektor regresních parametrů (hodnoty parametrů přejímáme beze změn z pozorovaného období)

ε_p je [m-členný] sloupcový vektor náhodných složek predikovaného období

Předpokládáme přitom, že

a) $E(\varepsilon) = 0_T$, $E(\varepsilon_p) = 0_m$,

tzn. že náhodné složky s nulovou střední hodnotou v pozorovaném období zůstanou centrované i v předpovídaném období.

b) $$Var(\varepsilon_p^{(j)}) = Var(\varepsilon^{(i)}) = \sigma^2, \; i = 1,2,...,T;\; j = 1,2,...,m;$$

tzn. že rozptyly náhodných složek pozorovaného i predikovaného období jsou shodné (rovné σ^2).

c) $$E(\varepsilon_p^{(j)}.\varepsilon^{(i)}) = 0 \;,\; i = 1,2,...,T;\; j = 1,2,...,m;$$

tzn. že náhodné složky predikovaného období jsou nekorelované navzájem i s náhodnými složkami pozorovaného období. Souhrnná kovarianční matice $\tilde{\Sigma}_{[T+m;T+m]}$ má tedy tvar

$$\tilde{\Sigma} = Cov\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 I_T & 0 \\ 0 & \sigma^2 I_m \end{pmatrix}$$

d) Náhodné složky jsou nekorelované s vysvětlujícími proměnnými v pozorovaném i v predikovaném období, tj. $E(X_j{}'\varepsilon) = 0$ pro $j = 1,2,...,T$ $E(X_p{}'\varepsilon_p) = 0$ pro $l = 1,2,...,m$.

Model můžeme přehledněji znázornit maticovým zápisem

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots\ldots \\ y_T \\ y_{T+1} \\ \ldots\ldots \\ y_{T+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots\ldots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots\ldots & x_{2k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_{T,1} & x_{T,2} & x_{T,3} & \ldots\ldots & x_{T,k} \\ x_{T+1,1} & x_{T+1,2} & x_{T+1,3} & \ldots\ldots & x_{T+1,k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_{T+m,1} & x_{T+m,2} & x_{T+m,3} & \ldots\ldots & x_{T+m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots\ldots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots\ldots \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{T+1} \\ \ldots\ldots \\ \varepsilon_{T+m} \end{pmatrix}.$$

Bodovou předpověď m-členného vektoru závisle proměnné získáme pomocí ***predikční funkce***[1] tvaru

(2) $$y_p{}^* = X_p.b = X_p.(X'X)^{-1}X'y \quad \text{, kde}$$

X je [*Txk –rozměrná*] matice pozorovaných hodnot k vysvětlujících proměnných.

***Predikční funkce* 2)**, jež je zřejmě lineární funkcí y, je nestrannou funkcí vektoru předpovědí y_p v tom smyslu, že pro ni platí

(3) $$E(y_p{}^*) = E(X_p.b) = X_p E(b) = X_p.\beta = E(y_p) \quad .$$

[X_p je nestochastická] [b je nestranný odhad β]

To znamená, že **střední hodnota predikční funkce je rovna střední hodnotě** y_p [2]

Poznámka Neznamená to však , že $E(y_p{}^*) = y_p$ [3]

Tvrzení: Lze ukázat, že predikční funkce 2) má ze všech nestranných predikčních funkcí (lineárními v y) nejmenší v maticovém smyslu kovarianční matici vektoru reziduí v období předpovědi, tj. následujícího vektoru d_p

Vektor chyb d_p definujeme jako odchylku (chybu) předpovídané hodnoty $y_p{}^*$ od skutečné y_p:

(4) $$d_p = y_p{}^* - y_p = X_p b - (X_p\beta + \varepsilon_p) = X_p(b - \beta) - \varepsilon_p$$

Všimněme si, že zdrojem chyb předpovědi vektoru skutečných hodnot y_p je jednak variabilita náhodné složky ε_p, jednak výběrová chyba odhadové funkce b zpravidla pořízené *metodou nejmenších čtverců OLS* :

Střední chyba vektoru chyb predikčního vektoru d_p v **(4)** je nulová, protože platí

---

1 Predikční funkce je náhodný vektor o m složkách.

2 Jde o totožnost středních hodnot stejnolehlých složek příslušných náhodných vektorů.

3 Podle ***1)*** je $\boldsymbol{y_p} = \boldsymbol{X_p}.\beta + \varepsilon_{\boldsymbol{p}}$ a náhodnost vektoru $\boldsymbol{y_p}$ pramení z náhodnosti ε_p, zatímco v případě $\boldsymbol{y^*_p}$ vyplývá náhodnost tohoto vektoru z náhodnosti $\boldsymbol{b}$ (a přeneseně tudíž pochází z ε).

$$E(d_p) = E(y_p * - y_p) = X_p E(b - \beta) - E\varepsilon_p = 0$$

Před odvozením kovarianční matice tohoto vektoru upravíme d_p do tvaru

(5)
$$d_p = X_p.b - X_p\beta - \varepsilon_p = -\varepsilon_p - X_p\beta + X_p(X'X)^{-1}X'y =$$
$$= -\varepsilon_p - X_p\beta + X_p\beta + X_p(X'X)^{-1}X'\varepsilon = -\varepsilon_p + X_p(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Poznámka Vektor reziduí předpovídaných hodnot závisí tedy na náhodných složkách pozorovaného i náhodných složkách predikovaného období.

Za přijatých předpokladů ***a) – d)*** lze pro kovarianční matici *náhodného predikčního vektoru* (***5)*** psát :

$$Cov(d_p) = E\left[-\varepsilon_p + X_p(X'X)^{-1}X'\varepsilon\ \right] * \left[-\varepsilon_p + X_p(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]' =$$ [4]

[nekorelovanost $\varepsilon, \varepsilon_p$]

$$= \underbrace{E\left[\varepsilon_p.\varepsilon_p'\right]}_{[E\varepsilon_p.\varepsilon_p' = \sigma^2 I_m]} + \underbrace{E\left[X_p(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}X_p\right]}_{[E\varepsilon.\varepsilon' = \sigma^2 I_T]} =$$

$$= \sigma^2.\left[I_m + X_p(X'X)^{-1}X_p'\right]$$

Poznámka **Speciální případ jediné predikované hodnoty** tzn. případ $m = 1$:

$$Cov(d_p) = \sigma^2\left[1 + X_p(X'X)^{-1}X_p'\ \right]$$

V tomto případě jsou y_p a ε_p skalární hodnoty a matice X_p se redukuje na řádkový vektor x_p o k složkách.

Standardní chybu (směrodatnou odchylku) bodové předpovědi skutečné hodnoty vysvětlované proměnné dostaneme nahrazením rozptylu σ^2 jeho nestranným odhadem s^2 získaným například metodou OLS. Pak

$$s_{d_p} =_{OLS} s.\sqrt{\left[1 + X_p(X'X)^{-1}X_p'\right]}$$ [5]

Lze ukázat, že **vyhovuje-li model předpokladu normality, pak bodová predikční funkce založená na odhadu β metodou OLS má** též **normální rozdělení**, tedy:

(6)
$$y^*_p \approx N\left[X_p.\beta\ ;\ \sigma^2 X_p(X'X)^{-1}X_p'\right]$$

Protože, jak již jsme dokázali výše v **(3)**

(3*)
$$E(y_p*) = E(X_p.b) = X_p E(b) = X_p.\beta = E(y_p) \quad .$$

a dále

---

[4] Bereme v úvahu nekorelovanost ε a ε_p .

[5] Pokud m=1, pak $\boldsymbol{x_p}$ je vektor a veličina $\boldsymbol{x_p(X'X)^{-1}x_p'}$ je skalár , pokud m >1, pak se vezme diagonální prvek matice $\boldsymbol{X_p(X'X)^{-1}X_p'}$ pořadím příslušný dané složce vektoru parametrů β .

$$Cov(y_p^{*}) = Cov(X_p.b) = X_p.Cov(b).X_p' = X_p.\sigma^2(X'X)^{-1}X_p' = \sigma^2 X_p.(X'X)^{-1}X_p'$$

[Cov(b)= σ^2. $(X'X)^{-1}$] [σ^2 je skalár]