Zobecněný lineární regresní model

Zobecněný lineární regresní (jednorovnicový) model je charakterizován následujícími vlastnostmi modelových veličin :

A) **Centrovanost náhodných složek** $E\varepsilon = 0$

B) **Obecnost kovarianční matice náhodných složek**: $Cov(\varepsilon,\varepsilon') = \Sigma$ (obecná, nestochastická matice)

1b) **heteroskedasticita**

2b) **autokorelovanost** náhodných složek

C) **Nekorelovanost náhodných složek s nezávisle proměnnými** $EX'\varepsilon = 0$

D) **Plná hodnost matice vysvětlujících proměnných** $h(X) = k$

Odhadová funkce zobecněné metody nejmenších čtverců (GLS) v zobecněném lineárním regresním modelu

(tzv. Aitkenovo zobecnění MNČ/OLS)

poskytuje odhad ${}_{GLS}\hat{\beta}$ regresních koeficientů β ve tvaru

$${}_{GLS}\hat{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$$

a má v zobecněném lineárním regresním modelu následující vlastnosti :

1. odhad ${}_{GLS}\hat{\beta}$ je nestranný (pro libovolnou velikost vzorku T)

$$E({}_{GLS}\hat{\beta}) = E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y = E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}(X\beta + \varepsilon) =$$
$$= E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}X\beta + E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon =$$
$$= E\beta + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}E\varepsilon = \beta + 0 = \beta$$

2. odhad ${}_{GLS}\hat{\beta}$ je lineární (vůči $\boldsymbol{y}$)

neboť je lineární formou pozorování závisle proměnné ${}_{GLS}\hat{\beta} = (\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{y}$ s maticí $\boldsymbol{C}' = (\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}$ koeficientů příslušné lineární formy. Poznamenejme, že vždy platí $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}_k$, kde $\boldsymbol{I}_k$ je jednotková matice řádu $\boldsymbol{k}$.

3. kovarianční matice příslušná odhadové funkci má tvar

$$\boldsymbol{Cov}({}_{GLS}\hat{\beta}) = \boldsymbol{E}\left[(\hat{\beta}-\boldsymbol{E}\hat{\beta}).(\hat{\beta}-\boldsymbol{E}\hat{\beta})'\right] = \boldsymbol{E}\left[(\hat{\beta}-\beta).(\hat{\beta}-\beta)'\right] =$$

$$= E\left[\left((X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y-\beta\right)\right].\left[\left((X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y-\beta\right)'\right] =$$

$$= E\left[\left((X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}(X\beta+\varepsilon)\right)-\beta\right].\left[\left((X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}(X\beta+\varepsilon)\right)-\beta\right]' =$$

$$= E\left[\beta+(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon-\beta\right].\left[\beta+(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon-\beta\right]' =$$

$$= E\left[(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon\right].\left[(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon\right]' =$$

$$= (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}E[\varepsilon\varepsilon'].\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} =$$

$$= (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}(X'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}X)(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1} \qquad \square.$$

4. odhad ${}_{GLS}\hat{\beta}$ je nejlepší ve smyslu *minimální kovarianční matice* $\boldsymbol{Cov}({}_{GLS}\hat{\beta})$,

neboť pro kovarianční matici kterékoliv jiné (lineární) odhadové funkce $\tilde{\beta}$ platí:

$$Cov(\tilde{\beta}) - Cov({}_{GLS}\hat{\beta}) = \Omega$$

kde Ω je nějaká pozitivně semidefinitní matice řádu $\boldsymbol{k}$ (rozměrů $\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{k}$).

Ověření Bez újmy na obecnosti můžeme matici $\boldsymbol{D}$ libovolné jiné lineární odhadové funkce $\tilde{\beta}$ vyjádřit ve tvaru

$$D = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1} + G'$$

Poznámka Vzhledem k požadavku na nestrannost ${}_{GLS}\hat{\beta}$ musí s ohledem na platnost $\boldsymbol{D}'\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{G}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}_T$, vždy platit $\boldsymbol{G}'\boldsymbol{X} = 0$.

Pr*o libovolnou jinou (lineární, nestrannou) odhadovou funkci tedy musí platit

$$Cov(\tilde{\beta}) = E\left[(\tilde{\beta}-E\tilde{\beta}).(\tilde{\beta}-E\tilde{\beta})'\right] = E\left[(\tilde{\beta}-\beta).(\tilde{\beta}-\beta)'\right] =$$

$$= E\left[\left(\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}X'\Sigma^{-1}+G'\right)y-\beta\right].\left[\left(\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}X'\Sigma^{-1}+G'\right)y'-\beta'\right] =$$

$$= E\left[\left(\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}X'\Sigma^{-1}+G'\right)(X\beta+\varepsilon)-\beta\right].\left[\left(\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}X'\Sigma^{-1}+G'\right)(X\beta+\varepsilon)-\beta\right]' =$$

$$= \boldsymbol{E}\left[\left((\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\beta+\boldsymbol{G}'\boldsymbol{X}\beta+\varepsilon\right)+\boldsymbol{G}'\varepsilon-\beta\right]\left[\left((\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\beta+\boldsymbol{G}'\boldsymbol{X}\beta+\varepsilon\right)+\boldsymbol{G}'\varepsilon-\beta\right]'$$

....

$$= E\left[\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon+G'\varepsilon\right]*\left[\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon+G'\varepsilon\right]' =$$

$$=E\Big[\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon\varepsilon'\Sigma^{-1}X\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}+G'\varepsilon\varepsilon'G+\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon\varepsilon'G+$$

$$+G'\varepsilon\varepsilon'\Sigma^{-1}X\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}\ \Big]=$$

$$=(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}E\varepsilon\varepsilon'\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}+G'E\varepsilon\varepsilon'G+(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}E\varepsilon\varepsilon'G+$$

$$+G'E\varepsilon\varepsilon'\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}=$$

$$=(\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}+\boldsymbol{G}'\Sigma\boldsymbol{G}+(\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\Sigma\boldsymbol{G}+\boldsymbol{G}\Sigma\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}=$$

$$=(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}+G'\Sigma G+(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'G+G'X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}=$$

$$=(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}+G'\Sigma G\ =Cov({}_{GLS}\hat{\beta})+G'\Sigma G \qquad \square.$$

kde $G'\Sigma G$ je zřejmě pozitivně semidefinitní matice.

Poznámka 1 Odhadová funkce zobecněné metody nejmenších čtverců ${}_{GLS}\hat{\beta}$ ve tvaru ${}_{GLS}\hat{\beta}=(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$ v situacích, kdy (což je pravidlem) neznáme přesný tvar kovarianční matice Σ, není přímo použitelná. Proto je ji nutno zpravidla nahradit výrazem

$${}_{GLS}\hat{\beta}=(X'\hat{\Sigma}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Sigma}^{-1}y$$

kde $\hat{\Sigma}$ je nějaký vhodný odhad matice Σ.[1]

Poznámka: Všimněme-si, že zobecněná metoda nejmenších čtverců přechází v případě, že kovarianční matici náhodných složek je diagonální se stejnými prvky v obyčejnou metodu nejmenších čtverců:

${}_{GLS}\hat{\beta}=(X'\Sigma^{*-1}X)^{-1}X'\Sigma^{*-1}y$, kde $\Sigma^*=\sigma^2 I_T$, pak zřejmě platí

$$ {}_{GLS}\hat{\beta}=(X'(\sigma^2.I_T)^{-1}X)^{-1}X'(\sigma^2.I_T)^{-1}y=(X'\sigma^{-2}X)^{-1}(X'\sigma^{-2}y)=_2$$
$$=\sigma^2(X'X)^{-1}\sigma^{-2}X'y=(X'X)^{-1}X'y={}_{OLS}\hat{\beta}$$

Poznámka 2 Odhadová funkce obyčejné metody nejmenších čtverců (OLS) ${}_{OLS}\tilde{\beta}$ má v zobecněném lineárním regresním modelu tyto vlastnosti :

1) odhad ${}_{OLS}\tilde{\beta}$ je nestranný

2) odhad ${}_{OLS}\tilde{\beta}$ je lineární

3) odhad ${}_{OLS}\tilde{\beta}$ není nejlepší

---

[1] Získat odhad kovarianční matice Σ použitelné pro GLS estimátor je ovšem daleko problematičtější než odhad jediného prvku- rozptylu o OLS, kde lze snadno užít výrazy. Uvědomme si, že k odhadu obecně $T(T+1)/2$ máme jen $Tx(k+1)$ pozorovaných hodnot. Těch bude zpravidla méně než neznámých parametrů – prvků matice Σ.

[2] Z odvozování je patrné, že by totéž platilo i pro kovarianční matici obou těchto estimátorů.

Odvození zobecněné metody nejmenších čtverců GLS

Uvažujme nejprve lineární regresní model ve tvaru

(1) $$y = X\beta + \varepsilon$$

u kterého uvolníme předpoklad ***B)*** a nahradíme ho předpokladem ***B*)***
Kovarianční matice náhodných složek má obecný tvar :

B*) $Cov(\varepsilon,\varepsilon') = \Sigma$ (obecná, nestochastická matice),

což znamená ***B1*)*** ***heteroskedasticita***

B2*) ***autokorelovanost náhodných složek***

Znormujeme-li matici Σ "průměrným rozptylem" σ^2 , můžeme ji vyjádřit ve tvaru

$$\Sigma = \sigma^2.V$$

kde σ^2 je skalár a ***V*** je symetrická pozitivně definitní matice. Matice ***V*** je normována tak, aby její stopa byla rovna ***T*** (tj. $\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{T}$) . Průměr diagonálních prvků Σ je pak roven σ^2 .

Formálně zapsáno

$$\Sigma = \sigma^2.V = \sigma^2.\begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} & \frac{\sigma_{12}}{\sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_{1T}}{\sigma^2} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sigma^2} & \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_{2T}}{\sigma^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sigma_{1T}}{\sigma^2} & \frac{\sigma_{2T}}{\sigma^2} & \dots. & \frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} \end{bmatrix}$$

Pro $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I_T}$ model přechází ve standardní lineární regresní model.

Připomeňme, že **libovolnou symetrickou pozitivně definitní matici lze vyjádřit ve tvaru součinu dvou regulárních vzájemně transponovaných matic**. Zapišme tedy

(2) $V = R^{-1}.R'^{-1}$ neboli $V^{-1} = (R^{-1}.R'^{-1})^{-1} = R'.R$

Přitom zřejmě platí $R.V.R' = I_T$.

Vynásobíme-li model ***1)*** touto nesingulární maticí ***R*** (řádu i hodnosti T), dostaneme

(3a) $$Ry = R.X.\beta + R.\varepsilon$$ neboli

(3) $$y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$$

kde píšeme $y^* = R.y\,,\ X^* = R.X\,,\ \varepsilon^* = R.\varepsilon\,.$

Určeme kovarianční matici náhodného vektoru transformovaných náhodných složek

(4) $$E(\varepsilon^*.\varepsilon^{*\prime}) = E(R.\varepsilon.\varepsilon' R') = R.E(\varepsilon.\varepsilon').R' = \sigma^2 R.V.R' = \sigma^2.I_T$$

(Podotkněme, že matice R byla volena právě s cílem dosáhnout diagonální kovarianční matice náhodných složek)

Ukážeme, že **transformovaný model** *3)* **má vlastnosti** ***standardního lineárního regresního modelu***. Náhodné složky ε^* jsou totiž

a) centrované $E(\varepsilon^*) = E(R.\varepsilon) = 0$

b) vzájemně nekorelované a homoskedastické

$$E(\varepsilon^*.\varepsilon^{*\prime}) = E(R.\varepsilon.\varepsilon'.R') = \sigma^2.R.V.R' = \sigma^2.I_T$$

c) nekorelované s vysvětlujícími proměnnými

$$E(X^{*\prime}.\varepsilon^*) = E(X'R'R\varepsilon) = (RX)'R(E\varepsilon) = 0$$

(předsunutí před střední hodnotu je možné vzhledem k nestochastičnosti matic X, R).

Nyní ukážeme, jak lze takovou matici R sestrojit:

Protože matice V^{-1} je stejně jako V symetrická a pozitivně definitní, lze ji vyjádřit takto:

(5) $$V^{-1}A = A.D$$

- matice $A_{[TxT]}$ je matice, jejíž sloupce tvoří vlastní (charakteristické) vektory matice V^{-1}. Vlastní vektory mohou být zapsány při vhodné normalizaci v ortonormálním tvaru, takže pro sloupce matice A lze psát $a_i.a_j = 1$, $a_i.a_j = 0$ pro $i \neq j$. Proto tedy platí $A.A' = I_T$.

- matice D rozměrů $[TxT]$ je diagonální matice s diagonálou tvořenou vlastními (charakteristickými) čísly R^{-1}: $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^T$ Pro matici V^{-1} lze psát (při násobení ***5)*** maticí A' zprava) :

(5a) $$V^{-1} = A.D.A' = A.D^{1/2}.D^{1/2}.A'$$

kde D je diagonální matice, na jejíž diagonále jsou nějak (vzestupně či sestupně) seřazeny charakteristické kořeny/čísla matice V^{-1}. Matici R definujeme vztahem

$$R = D^{1/2}.A' \qquad \square .$$

Je zřejmé, že při této volbě matice R bude platit :

(6) $$R'R = A.D^{1/2}.D^{1/2}A' = V^{-1}$$

Využijeme-li nyní odhadovou funkci *obyčejné metody nejmenších čtverců OLS* k odhadu parametrů modelu ***3)***, dostaneme :

$$_{OLS}\beta^* = (X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}y^* = (X'R'RX)^{-1}X'R'Ry = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$

nebo rovnocenně

(7) $$_{OLS}\beta^* = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$$

Kovarianční matice příslušná této odhadové funkci má tvar

(8) $$Cov(\beta^*) = \sigma^2.(X^{*\prime}X^*)^{-1} = \sigma^2.(X'V^{-1}X)^{-1} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$$

Vzhledem k tomu, že prvky matice ***V*** zpravidla neznáme, je nutno při praktickém uplatnění odhadové funkce GLS (zobecněné metody nejmenších čtverců) použít nějaký její odhad.

Nestranný odhad s^2 pro σ^2 získáme standardním způsobem:

(9)
$$s^2 = \frac{e^{*\prime} e^*}{T-k} = \frac{\lfloor y^* - X^* b \rfloor' . \lfloor y^* - X^* b \rfloor}{T-k} =$$
$$= \frac{[R.y - R.Xb]' . [R.y - RXb]}{T-k} = \frac{[y - Xb]' . R' R [y - Xb]}{T-k} = \frac{e' V^{-1} e}{T-k}$$

Poznámka: Pracujeme-li s centrovanými veličinami y^*, lze *rozptyl závisle proměnné* vyjádřit jako

$$y^{*\prime} y^* = \lfloor X^* b + e^* \rfloor' \lfloor X^* b + e^* \rfloor = b' X' R' R X b + e' . R' R . e = b' X' V^{-1} X b + e' V^{-1} e$$

První člen představuje *vysvětlený*, druhý člen *nevysvětlený (též reziduální) rozptyl*. Reziduální rozptyl je představován kvadratickou formou v proměnných e s maticí koeficientů V^{-1}.

Získat takový odhad není však pro obecný případ (obecná matice Σ) vůbec snadné, neboť narážíme na nedostatek vstupní modelové informace. Matice Σ má až $(T+1).T/2$ různých prvků, zatímco modelová informace obsažená v matici X sestává pouze z Txk pozorovaných hodnot vysvětlujících proměnných. Při T=20 bychom potřebovali odhadnout až 210 různých prvků matice Σ. Z tohoto důvodu se v reálných situacích zpravidla uplatňují jednodušší verze obecné GLS-metody, hlavně

- **vážená metoda nejmenších čtverců WLS**, která operuje s maticí Σ, jež má nenulové prvky (rozptyly) pouze na hlavní diagonále
- **různé speciální tvary matice** Σ, jejíž prvky závisí na (podstatně) menším počtu jiných parametrů, které jsou snáze odvoditelné z dostupných dat.

Uvědomme si, že v případě:

a) *standardního lineárního regresního modelu* (metodou OLS) můžeme využít k odhadu jediného parametru matice Σ (stejně velkého rozptylu náhodných složek) celkem T reziduálních hodnot e_t.

b) *zobecněného lineárního regresního modelu postiženého toliko heteroskedasticitou* (metodou WLS) můžeme použít k odhadu T - parametrů matice Σ právě stejný počet T reziduálních hodnot e_t.

c) *zobecněného lineárního regresního modelu v plné jeho obecnosti* (metodou GLS) můžeme použít k odhadu $(T+1).T/2$ parametrů matice Σ právě jen těch T reziduálních hodnot e_t. (což zřejmě bez další případné doprovodné informace nestačí).

V případě metody WLS se problém řeší zpravidla využitím apriorního předpokladu o velikosti náhodných složek (obvykle se zde uplatní vztah velikosti rezidua vůči velikosti vysvětlované proměnné).[1]

V případě metody GLS se zpravidla vysloví (problém zjednodušující) předpoklad o konkrétním tvaru závislosti náhodných složek navzájem (např. předpoklad o jejich vzájemné autokorelovanosti 1. řádu), čímž se výrazně sníží počet neznámých (odhadovaných) parametrů. [2]

---

[1] Způsoby řešení tohoto problému budou podrobněji vyloženy v oddíle *Heteroskedasticita*

[2] Způsoby řešení tohoto problému budou podrobněji vyloženy v oddíle *Autokorelace.*

Odhadová funkce vážené metody nejmenších čtverců (WLS)

Vážená metoda nejmenších čtverců *je speciálním případem zobecněné metody nejmenších čtverců*. Je použitelná v situacích, kdy náhodné složky regresní rovnice nevykazují vzájemnou korelovanost.

Poskytuje odhady vykazující příznivé vlastnosti v modelu, který se vyznačuje (pouze) *heteroskedasticitou*, nikoliv *autokorelací náhodných složek*. Z obou podmínek vztahujících se k tvaru kovarianční matice náhodných složek Σ platí tedy jen

2a) (čistá) *heteroskedasticita* $Cov(\varepsilon,\varepsilon') = \Sigma$ (diagonální nestochastická matice) neboli

(10)
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

přičemž prvky hlavní diagonály matice Σ jsou obecně různé.[1]

Pro váženou metodu nejmenších čtverců platí v modelu zatíženém pouze heteroskedasticitou všechny vlastnosti zobecněné metody nejmenších čtverců. Odhadová funkce však bude mít jednodušší tvar, protože **prvky diagonály inverzní matice** Σ^{-1} značené σ^{ii} **mají tvar**

(11)
$$\sigma^{ii} = \frac{adj(\sigma_{ii})}{|\Sigma|} = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{T} \sigma_{jj}}{\prod\limits_{j=1}^{T} \sigma_{jj}} = \frac{1}{\sigma_{ii}} \quad , \qquad \sigma^{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j$$

Matice Σ^{-1} je tedy také diagonální.

Nyní zapíšeme ***tvar WLS-odhadové funkce*** $_{WLS}\hat{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$ **ve „strukturním" tvaru**

$$X'\Sigma^{-1}X = \begin{pmatrix} \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{t1}^2 & \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{t1}x_{t2} & \dots & \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{t1}x_{tk} \\ \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{t2}x_{t1} & \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{t2}^2 & \dots & \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{t2}x_{tk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{tk}x_{t1} & \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{tk}x_{t2} & \dots & \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{tk}^2 \end{pmatrix} \quad X'\Sigma^{-1}y = \begin{pmatrix} \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{t1}y_t \\ \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{t2}y_t \\ \dots\dots \\ \sum\limits_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{tk}y_t \end{pmatrix}$$

Stejně jako v případě GLS, k praktickému nasazení odhadové metody WLS je zapotřebí uplatnit nějakým způsobem odhadnutý tvar $\tilde{\Sigma}$ kovarianční matice Σ. Budeme tedy pracovat s odhadovou funkcí tvaru

(12)
$$_{WLS}\hat{\beta} = (X'\tilde{\Sigma}^{-1}X)^{-1}X'\tilde{\Sigma}^{-1}y\,.$$

---

[1] Diagonální prvky matice Σ (rozptyly) se značí buď σ_t^2 nebo jen σ_{tt} (tj. bez druhé mocniny)

$$\mathbf{X}'\tilde{\Sigma}^{-1}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{t1}^{2} & \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{t1} x_{t2} & \cdots & \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{t1} x_{tT} \\ \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{t2} x_{t1} & \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{t2}^{2} & \cdots & \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{t2} x_{tT} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{tT} x_{t1} & \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{tT} x_{t2} & \cdots & \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{tT}^{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'\tilde{\Sigma}^{-1}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{t1} y_t \\ \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{t2} y_t \\ \cdots\cdots \\ \sum_{t=1}^{T} s^{tt} x_{tT} y_t \end{pmatrix}$$

Váhy v případě vážené metody nejmenších čtverců WLS bychom ovšem mohli stanovit i zcela subjektivně tak, že bychom užili odhadovou funkci *12)* s maticí $\tilde{\Sigma}*$ s prvky

(13)
$$\tilde{\Sigma}* = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & w_r \end{pmatrix}$$

Abychom získali příslušnou odhadovou funkci, stačí nyní všechny pozorované hodnoty ve vektoru y a v matici X dělit (po řádcích) odmocninami vah $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_T$ neboli

(14)
$$y^* = \begin{pmatrix} y_1/\sqrt{w_1} \\ y_2/\sqrt{w_2} \\ \cdots \\ y_T/\sqrt{w_T} \end{pmatrix}, \quad X^* = \begin{pmatrix} x_{11}/\sqrt{w_1} & x_{12}/\sqrt{w_1} & \ldots & x_{1k}/\sqrt{w_1} \\ x_{21}/\sqrt{w_2} & x_{22}/\sqrt{w_2} & \ldots & x_{2k}/\sqrt{w_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ x_{T1}/\sqrt{w_T} & x_{T2}/\sqrt{w_T} & \ldots & x_{Tk}/\sqrt{w_T} \end{pmatrix}$$

Poznámka 1: Měli bychom rozlišovat metodu WLS ze dvou hledisek. Jednak jde o matematický (technický postup, které podle příslušní´ho algoritmu **(12)** umožňuje provedení výpočtu regresních koeficientů zobecněného lineárního modelu zatíženého jen heteroskedasticitou.

Poznámka 2: Avšak statistické vlastnosti metody WLS (konkrétně **vydatnost**) silně závisí na volbě vah. Čím blíže jsou váhy w_t blíže skutečným hodnotám směrodatných odchylek náhodných složek, tím bud odhad vydatnější. To na druhé straně znamená, že pokud bychom vzali váhy nepatřičné (např. bychom pozorování ve **(14)** směrodatnými odchylkami σ_t násobili (nikoliv dělili), mohli bychom dostat odhady parametrů ještě méně vydatné než při nasazení metody OLS.

Pomocná tvrzení:

Tvrzení 1. Převedení symetrické matice na diagonální

Nechť A je symetrická matice. Potom existuje nesingulární matice B taková, že BAB' je diagonální matrice, tj. matici A lze vyjádřit jako součin $C.\Delta.C'$, kde C je nesingulární matice a Δ je diagonální matice.

Postup a důkaz tvrzení**:**

Uvažujme první diagonální prvek matice A. Je-li nenulový, užijeme ho jako pivotálního prvku a anulujeme všechny ostatní prvky prvního řádku a stejně tak i prvky prvního sloupce. Postup je ekvivalentní postupnému násobení matice A zprava a zleva elementárními maticemi; přitom matice, kterými se násobí zprava j jsou transponované matice k těm, kterými se násobí zleva, protože A symetrická. Výsledná matice je také symetrická.

Stejně tak se postupuje s druhým diagonálním prvkem, první řádek a první sloupec upravené matice se v této další fázi nezmění. V postupu se pokračuje, dokud se při některém kroku nenarazí na nulový diagonální prvek. Jestliže jsou v příslušném řádku a sloupci samé nulové prvky, přejdeme k dalšímu diagonálnímu prvku a postupujeme shodně jako dříve.

Jestliže řádek nebo sloupec s nulovým prvkem na diagonále obsahuje nenulové prvky, pak můžeme dosáhnout toho, že na diagonále bude nenulový prvek a pak se pokračuje jako dříve. I tento obrat je symetrickou operací, kterou lze vyjádřit jako násobení elementárními maticemi.
Na závěr důkazu položíme B rovno součinu elementárních matic, kterými jsme násobili matici A zleva a $C = B^{-1}$. □ .