INTEGRACE RACIONÁLNÍ LOMENÉ FUNKCE

Opakování:

Rozklad polynomu v $\mathbb{R}$: Nechť

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom

Platí: $$f(x) = a_n (x-\alpha)^k \cdot (x-\beta)^l \dots (x-\gamma)^m \dots \\ \dots \left[(x-a)^2 + b^2\right]^p \dots \left[(x-c)^2 + d^2\right]^q,$$

kde α je k-násobný kořen $\in \mathbb{R}$,

β l- — " ——

⋮

γ m- —" ——

a $a \pm ib$ jsou komplexně sdružené nereálné kořeny násobnosti p,

⋮ $c \pm id$ —— " ——— q.

Př.: Polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ má jistě kořen $x = 1$, neboť $f(1) = 0$. Můžeme napsat $f(x) = (x-1)(x^4 - 1)$. Podle vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ můžeme dále rozložit:

$f(x) = (x-1) \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = (x-1)(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Závorka (x^2+1) již nejde v $\mathbb{R}$ rozložit, tedy $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x+1)(x^2+1)$ je rozkladem $f(x)$ v $\mathbb{R}$.

Definice: Racionální lomenou funkcí nazýváme každou funkci tvaru $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x), q(x)$ jsou polynomy. ($D_f = \{x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0\}$).

Je-li stupeň polynomu $p(x)$ menší než stupeň polynomu $q(x)$, nazveme $f(x)$ RYZE (racionální) lomenou funkcí.

Pozn.: Pokud je stupeň $p(x) \geq$ stupeň $q(x)$, nazýváme funkci $f(x)$ neryze lomenou a lze ji zapsat jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

$f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená,

vydělíme polynomy:

$$
\begin{aligned}
&(x^3+2x^2+3x-1):(x^2+1) = x+2,\ \text{zb. } 2x-3\\
&-(x^3 \qquad\quad + x)\\
&\qquad 2x^2+2x-1\\
&\quad -(2x^2 \qquad +2)\\
&\qquad\quad 2x-3 \ \dots\ \text{zbytek}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{x+2}_{\text{polynom}} + \underbrace{\frac{2x-3}{x^2+1}}_{\to\ \text{ryze lomená funkce}}$$

Nemají-li $p(x)$ a $q(x)$ společné kořeny, lze RYZE lomenou funkci $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ rozložit na SOUČET PARCIÁLNÍCH ZLOMKŮ,

Př.: a) $\dfrac{x^3-x+1}{(x-2)^3\cdot(x^2+2)} = \dfrac{A}{(x-2)^3} + \dfrac{B}{(x-2)^2} + \dfrac{C}{(x-2)} + \dfrac{Dx+E}{x^2+2}$, $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$

b) $\dfrac{3x^5-4x^3+7}{(x-3)\cdot x\cdot(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1} + \dfrac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$, $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$.

Jmenovatele jednotlivých parciálních zlomků jsou dány rozkladem polynomu $q(x)$ a čitatele parciálních zlomků určíme například tzv. METODOU NEURČITÝCH KOEFICIENTŮ.

Př.: Rozložte funkci na součet parciálních zlomků:

$$\frac{8x^2+x+6}{(x)^2\cdot(x-2)\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Upravíme zlomky na pravé straně na společný jmenovatel:

$$\frac{8x^2+x+6}{x^2(x-2)(x^2+1)} = \frac{A(x-2)(x^2+1)+Bx(x-2)(x^2+1)+Cx^2(x^2+1)}{x^2(x-2)(x^2+1)}$$

$$\frac{+Dx^3(x-2)+Ex^2(x-2)}{x^2(x-2)(x^2+1)}$$

Tedy:

$$\begin{aligned} 8x^2+x+6 = {} & A\cdot(x^3-2x^2+x-2) \\ & + B\cdot(x^4-2x^3+x^2-2x) \\ & + C\cdot(x^4+x^2) \\ & + D\cdot(x^4-2x^3) \\ & + E\cdot(x^3-2x^2) \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x^4 &: \quad 0 = B + C + D \\ x^3 &: \quad 0 = A - 2B - 2D + E \\ x^2 &: \quad 8 = -2A + B + C - 2E \\ x^1 &: \quad 1 = A - 2B \\ x^0 &: \quad 6 = -2A \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{A=-3}}$

$\Rightarrow -2B = 1 - A = 4, \underline{\underline{B=-2}}$

$\Rightarrow E = 2B - A + 2D = \underline{-1}$

$C = 8 + 2A - B + 2E = \underline{\underline{2}}$

$D = -B - C = \underline{\underline{0}}$

Tedy $$\frac{8x^2+x+6}{x^2(x-2)(x^2+1)} = \frac{-3}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x^2+1}$$

Při výpočtu integrálu z racionální lomené funkce využijeme rozkladu na parciální zlomky.

Př.: Integrál z funkce z předchozího příkladu:

$$\int \frac{8x^2+x+6}{x^2(x-2)(x^2+1)}\,dx = \int -\frac{3}{x^2}dx - \int\frac{2}{x}dx + \int\frac{2}{x-2}dx - \int\frac{1\,dx}{x^2+1} =$$

$$= -3.(-x^{-1}) - 2\ln|x| + 2\ln|x-2| - \operatorname{arctg} x + c$$

Pozn.: U některých typů integrálů se používají speciální substituce, které výpočet převedou na integrál z racionální lomené funkce. Například u integrálů typu $\int \cos^m x \sin^n x\,dx$, kde m, n jsou celá čísla, z nichž alespoň jedno je liché, volíme substituci $\cos x = t$ pro m sudé, nebo $\sin x = t$ pro n sudé.

Př.: $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst. } \cos x = t \quad \Rightarrow \sin^2 x = 1-t^2 \\ -\sin x\,dx = dt \end{array} \right|$

$$= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\cdot \sin x\,dx = -\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2}\cdot dt$$

rozložíme: $\frac{-t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{(1-t)^2} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{(1+t)^2} + \frac{D}{1+t}$

$$-t^2 = A.(1+t)^2 + B(1-t)(1+t)^2 + C(1-t)^2 + D(1+t)(1-t)^2$$

$$-t^2 = A.(1+2t+t^2) + B(-t^3-t^2+t+1) + C(1-2t+t^2) + D(t^3-t^2-t+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} t^3:\ 0 = -B + D \\ t^2:\ -1 = A - B + C - D \\ t:\ 0 = 2A + B - 2C - D \\ t^0:\ 0 = A + B + C + D \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -\frac{1}{4},\ C = -\frac{1}{4} \\ B = D = \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\Rightarrow -\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt = -\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1-t)^2}dt + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t} =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{(1-t)} - \frac{1}{4}\ln|1-t| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+t)} + \frac{1}{4}\ln|1+t|$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{1-\cos x} - \frac{1}{4}\ln(1-\cos x) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{4}\ln(1+\cos x) + c$$

RIEMANNŮV INTEGRÁL

Nechť $x_1, \dots, x_{n+1}$ jsou body z $\langle a, b \rangle$, že $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$.
Řekněme, že intervaly

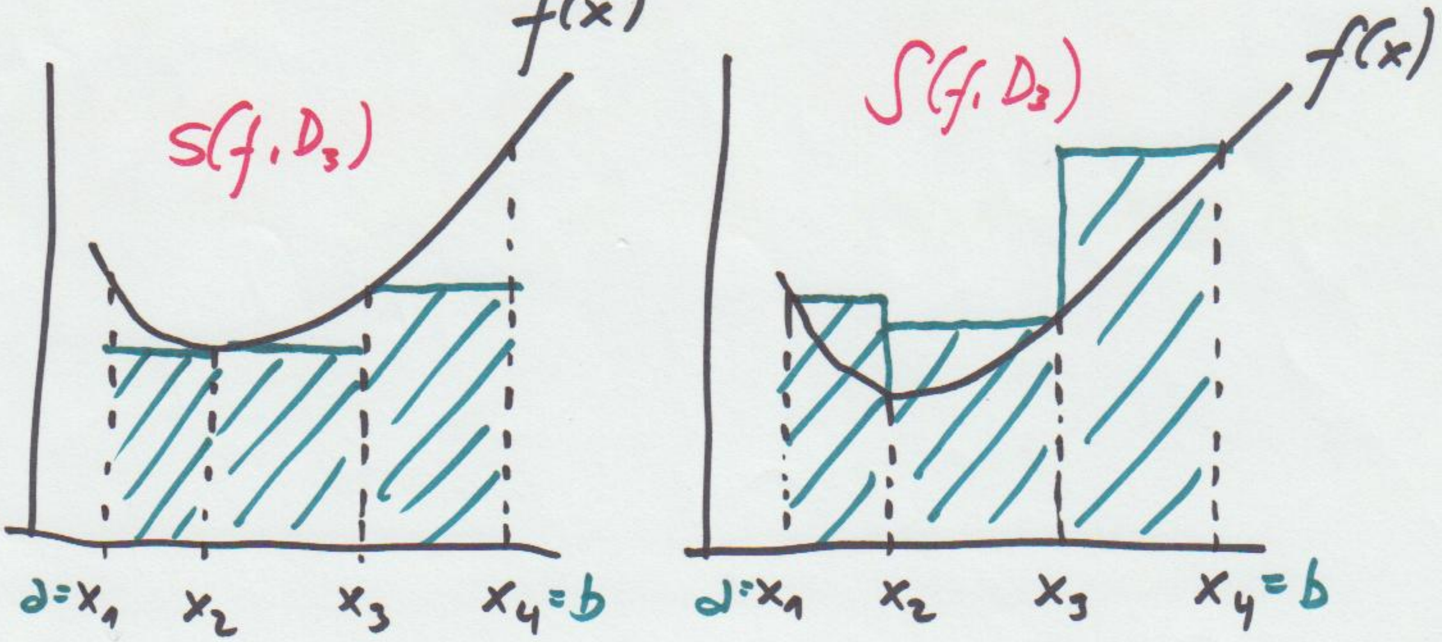
$$\langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \dots, \langle x_n, x_{n+1} \rangle$$

tvoří <u>dělení</u> intervalu $\langle a, b \rangle$, D_n.

Dále označme
$$m_i = \inf_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} f(x)$$
$$M_i = \sup_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} f(x)$$

Čísla $s(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_{i+1} - x_i)$ a
$S(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_{i+1} - x_i)$ nazveme dolním a horním Riemannovým součtem.

Př.:



Je-li f omezená na $\langle a,b\rangle$, existuje $\sup\limits_D s(f,D)$ a $\inf\limits_D S(f,D)$ přes všechna dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$. Ozn.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_D s(f,D)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_D S(f,D)$$ a nazveme je dolním a horním Riemannovým integrálem.

Def.: Je-li $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, řekneme, že $f(x)$ má na $\langle a,b\rangle$ Riemannův integrál a klademe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Pozn.: Číslo a se nazývá dolní mez, číslo b - horní mez integrálu. Jestliže existuje $\int_a^b f(x)\,dx$, řekneme, že $f(x)$ je na $\langle a,b\rangle$ INTEGRABILNÍ

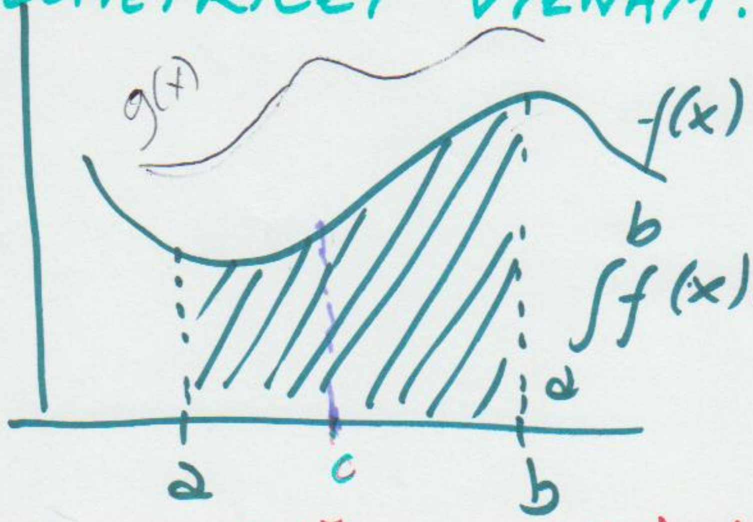
Def.: Rozšíření pojmu integrálu pro $a=b$ a $a>b$: Definujeme

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

VLASTNOSTI R INTEGRÁLU

GEOMETRICKÝ VÝZNAM:



$$\int_a^b f(x)\,dx = S(\ldots)$$

Věta: Nechť f má integrál na $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$. Pak má f integrál na $\langle a,b\rangle$ a platí: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Věta: Nechť f a g jsou integrovatelné na $\langle a,b\rangle$ a $f(x) \leq g(x)$ pro $x \in \langle a,b\rangle$. Pak $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Věta: Nechť f je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Pak je zde integrovatelná i funkce $|f|$ a platí: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$

Věta: Nechť f a g jsou integrovatelné na $\langle a,b\rangle$ a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak je funkce $\alpha f + \beta g$ integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a platí

$$\int_a^b (f(x).\alpha + g(x).\beta)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

EXISTENCE R INTEGRÁLU

Věta: Nechť funkce $f(x)$ spojitá na $\langle a,b\rangle$. Pak je na $\langle a,b\rangle$ integrovatelná.

Pozn.: Dokonce stačí, aby $f(x)$ byla na $\langle a,b\rangle$ omezená a spojitá s výjimkou konečně mnoho bodů nespojitosti.

VÝPOČET R INTEGRÁLU

Věta: Nechť f je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a buď $x_0 \in \langle a,b\rangle$ lib. Pak funkce $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a ve všech bodech, kde je f spojitá, platí $F'(x) = f(x)$.

Pozn.: Pro f spojitou na $\langle a,b\rangle$ je zde tedy F primitivní funkcí k f.

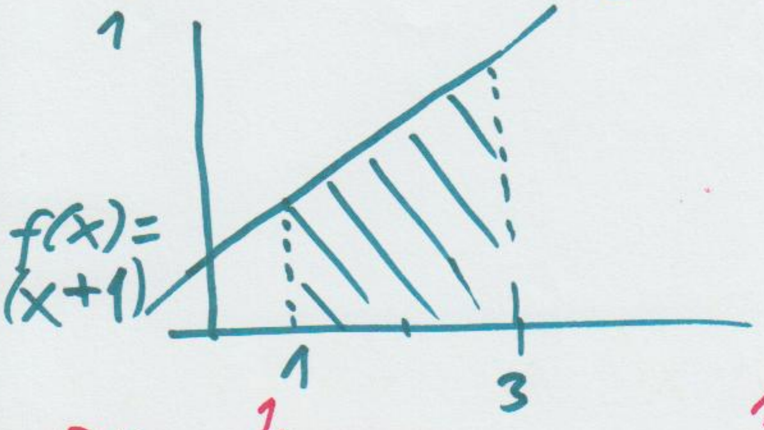
Věta. NEWTONŮV INTEGRÁL

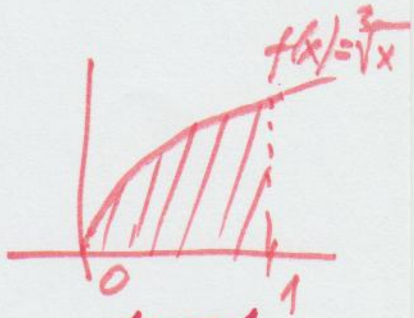
Nechť $f(x)$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a $F(x)$ je lib. primitivní funkce k f na $\langle a,b\rangle$. Potom pro $\forall \alpha, \beta \in \langle a,b\rangle$ platí:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta)^{+c} - F(\alpha)^{-c}}$$

Př.: $f(x) = x+1$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$

$$\int_1^3 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_1^3 = \left(\frac{9}{2}+3\right) - \left(\frac{1}{2}+1\right) = \underline{\underline{6}}$$





Př.: $$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

Věta: Metoda per partes

Nechť $u(x)$, $v(x)$ mají na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojité derivace. Potom platí

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Př.: $$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = \left| \begin{matrix} v = x^2 & u' = e^x \\ v' = 2x & u = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\,e^x\,dx = \left| \begin{matrix} v = 2x & u' = e^x \\ v' = 2 & u = e^x \end{matrix} \right|$$

$$= \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \left(\left[2x\,e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx\right) =$$

$$= \left[x^2 e^x - 2x\,e^x + 2e^x\right]_0^1 = e - 2e + 2e - 2 = \boxed{e-2}$$

Věta . . . : I. věta o substituci

Nechť funkce $x = \varphi(t)$ má na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci a nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$. Potom platí:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.}$$

Př.: $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t+1}{t^2+2t+3}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2t+2}{t^2+2t+3}\,dt =$
subst. $x = t^2+2t+3$, $dx = (2t+2)\,dt$, $x(-1) = 2$, $x(0) = 3$

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{2}\ln|x|\right]_2^3 \left(= \left[\frac{1}{2}\ln|t^2+2t+3|\right]_{-1}^{0}\right) = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}}$$

Věta . . : II. věta o substituci

Nechť funkce $x = \varphi(t)$ má na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$ a nechť existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}(x)$ na intervalu o koncových bodech $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Potom platí

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.}$$

Př.: $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx =$
subst. $x = \ln(t^2+1)$, $dx = \dfrac{2t}{t^2+1}\,dt$, $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{e^x-1}$, $\varphi^{-1}(0) = 0$, $\varphi^{-1}(\ln 2) = 1$

$$= \int_0^1 \overbrace{\sqrt{t^2+1-1}}^{t} \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\int_0^1 \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2\left[t - \operatorname{arctg} t\right]_0^1$$

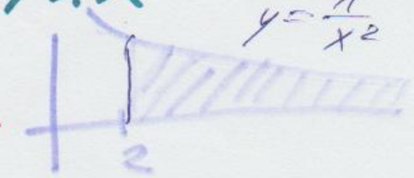
$$= 2(1 - \operatorname{arctg} 1 - 0 + \operatorname{arctg} 0) = \underline{\underline{2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}}$$

NEVLASTNÍ INTEGRÁLY (VZHLEDEM K INTERVALU)

Def.: $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$

pokud lim existuje. Jinak nazveme int. divergentním.

Pozn.: Analogicky $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$



Př.: $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \int_2^\infty x^{-2}\,dx =$

$= \lim\limits_{t\to\infty} \left[-1x^{-1}\right]_2^t = \lim\limits_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$

Def.: Řekneme, že $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ konverguje, jestliže konvergují int.

$\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ a $\int_c^\infty f(x)\,dx$ pro $c \in \mathbb{R}$

Potom položíme $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)$

Př.: $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-2x+1+4}\,dx$

$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst. 2. typu} \\ \boxed{x = 2t+1} \\ dx = 2dt \\ -\infty \to -\infty \\ \infty \to \infty \end{array} \right| =$

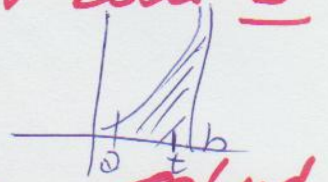
$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4t^2+4} \cdot 2dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt$

$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} t\right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} t\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0\right)$

$= \frac{\pi}{2}$

NEVLASTNÍ INTEGRÁL vzhledem k f:

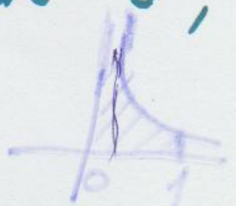
Jestliže $f(x)$ je omezená v lib. $\langle a,t\rangle$ pro $\forall\, t \in \langle a,b\rangle$ (a v bodě b neomezená), definujeme



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx,$$

pokud tato lim. existuje (jinak řekneme že diverguje).

Pozn.: Je-li neomezená v bodě a, definujeme analogicky



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx.$$

Př.: $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\,dx = \int_0^1 x^{-\frac{4}{5}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[5x^{\frac{1}{5}}\right]_{t}^{1}$$

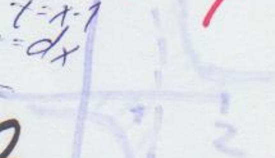
$$\lim_{t\to 0^+}\left[5\cdot 1^{\frac{1}{5}} - 5\cdot t^{\frac{1}{5}}\right]$$

$$= 5 - 0 = \underline{\underline{5}}$$

Pozn.: Je-li f neomezená v bodě $c \in (a,b)$ definujeme $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$ pokud oba integrály napravo existují.

Př.: Spočtěte $$\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

subst. $t = x-1$, $dt = dx$, $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|$



Špatný postup: $$= \left[\ln|x-1|\right]_0^2 = \ln 1 - \ln 1 = 0$$

Správný postup:

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$\lim_{t\to 1^-}\left[\ln|x-1|\right]_0^t + \lim_{t\to 1^+}\left[\ln|x-1|\right]_t^2 = -\infty + \infty$$

diverguje

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Def.: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{V}_n$ ($\mathbb{R}^n$) ($\mathbb{V}_n$ … prostor uspořádaných n-tic) zobrazení f množiny D do $\mathbb{R}$ nazveme reálnou funkcí n proměnných. Píšeme

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ kde}$$

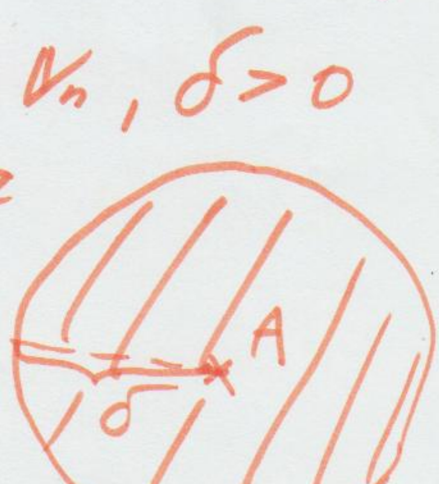
$$[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{V}_n.$$

Pozn.: Metrika v prostoru $\mathbb{V}_n$

Nechť $A[a_1, \dots, a_n]$, $B[b_1, \dots, b_n] \in \mathbb{V}_n$. V dalším budeme používat euklidovskou metriku

$$\rho_2(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Pozn.: Nechť $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{V}_n$, $\delta > 0$. δ-okolím bodu A nazveme množinu všech bodů $X \in \mathbb{V}_n$, jejichž vzdálenost od A je menší než δ, tj.



$$U_\delta(A) = \{ X \in \mathbb{V}_n : \rho(A, X) < \delta \}$$

Def.: Limita funkce

Řekneme, že $f(x_1, \dots, x_n)$ má v bodě $X^0[x_1^0, \dots, x_n^0] \in D \subseteq V_n$ limitu $A \in \mathbb{R}$ a píšeme

$$\lim_{X \to X^0} f(X) = A$$

jestliže pro lib. $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tak, že $f(X)$ je definovaná v $U_\delta(X^0) \setminus \{X^0\}$ a pro $\forall X \in U_\delta(X^0) \setminus \{X^0\}$ platí:

$$\boxed{|f(X) - A| < \varepsilon}$$

Pozn.: Nevlastní limity a počítání limit je analogické případu $n = 1$.

Def.: Řekneme, že $f(x_1, \dots, x_n)$ je spojitá v bodě $X_0[x_1^0, \dots, x_n^0]$ jestliže:

1, $f(X)$ je v bodě X^0 definovaná
2) $f(X)$ má v X^0 limitu a platí: $\lim_{X \to X^0} f(X) = f(X^0)$

Př.: $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
je spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$
kromě bodu $[0,0]$

PARCIÁLNÍ DERIVACE

Uvažujme funkci $f(x,y)$ a dosadíme za y hodnotu y_0. Dostaneme funkci 1 proměnné

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Má-li g v bodě x_0 derivaci $g'(x_0)$

tj. $g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ ex.,

nazveme ji parciální derivací $f(x,y)$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$.
Budeme ji označovat

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \text{ nebo } \boxed{f'_x(x_0,y_0)} \text{ nebo } f_x(x_0,y_0).$$

Pozn.: Analogicky parciální derivace podle y

Pozn.: Pro funkci n proměnných definujeme parciální derivaci obdobně. Derivujeme-li podle x_i, ostatní proměnné považujeme za konstanty

konstanty.

Př.: $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2xy - 5y + 1$

$f'_x(x,y) = 2x + 0 + 2y + 0$

$f'_y(x,y) = 0 + 6y + 2x - 5 + 0$

Př.: $f(x,y,z) = 3x^2 - y^2 + z^3 - xyz$

$f'_x = 6x - yz$

$f'_y = -2y - xz$

$f'_z = 3z^2 - xy$

Př.: $f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

$f'_x(x,y) = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{y} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$

$f'_y(x,y) = \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot (-xy^{-2}) = -\frac{1}{y}$

Pozn.: Dosud jsme počítali derivace 1. řádu. Zaveďme parciální derivace vyšších řádů: Nechť $f(x_1, \dots, x_n)$ má parc. derivaci f'_{x_i} na $\Omega \subseteq V_n$. Jestliže tato funkce má v $X_0 \in \Omega$ parc. derivaci podle x_j, označíme ji p. der. 2. řádu podle x_i a x_j

Píšeme

$$\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j} \text{ nebo } f''_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } f_{x_i x_j}(X_0)$$

Jestliže $i=j$, píšeme

$$\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}, \quad f''_{x_i}(X_0).$$

Př.: Vypočtěte všechny parciální derivace 2. řádu funkce

$$f(x,y,z) = 3x^2 - y^2 + z^3 - xyz.$$

$$f''_{xx} = (6x - yz)'_x = 6$$

$$f''_{yy} = (-2y - xz)'_y = -2$$

$$f''_{zz} = (3z^2 - xy)'_z = 6z$$

$$f''_{xy} = -z, \quad f''_{yx} = -z$$

$$f''_{yz} = -x, \quad f''_{zy} = -x$$

$$f''_{xz} = -y, \quad f''_{zx} = -y$$

Věta: Nechť funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ má v nějakém okolí $U_\delta(X_0)$ bodu X_0 spojité všechny parciální derivace řádu k. Pak nezáleží na pořadí proměnných, podle nichž derivujeme. Tedy např.

$$f''_{x_1 x_2}(X^0) = f''_{x_2 x_1}(X^0).$$

TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

Def.: Nechť $f(X)$, $X=[x_1, \dots, x_n]$ má na Ω spojité parc. derivace 1. řádu. Potom má $\forall X \in \Omega$ totální diferenciál

$$df(dx_1, \dots, dx_n) = \frac{\partial f(X)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} dx_n$$

(Jde o lin. funkci n proměnných)

Př.: Napište diferenciál fce $f(x,y) = e^{(x^2+y^2)}$ v bodě $[1,1]$.

$$f'_x(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \qquad f'_x(1,1) = e^2 \cdot 2$$

$$f'_y(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2y \qquad f'_y(1,1) = e^2 \cdot 2$$

$$df = 2e^2 \cdot dx + 2e^2 \cdot dy$$

Pozn.: Za jistých podmínek platí

$$f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + df_{[x_0,y_0]}(x-x_0, y-y_0)$$

Pozn.: Přidáním členů s p. derivacemi vyšších řádů na pravou stranu dostaneme Taylorův polynom.

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Def.: Řekneme, že funkce $f(X)$ definovaná na $\Omega \subseteq V_n$ nabývá v $X_0 \in \Omega$ své lokální maximum, jestliže existuje nějaké okolí $U_\delta(X_0)$ takové, že pro $\forall X \in \Omega \cap U_\delta(X_0)$ je

$$f(X) \leq f(X_0)$$

(Pro lok. minimum $f(X) \geq f(X_0)$)

Pozn.: V případě ostrých nerovností $\Rightarrow$ ostré extrémy.

Pozn.: Má-li $f(X)$ v bodě X_0 lok. extrém, musí být všechny parc. derivace 1. ř., které zde existují, rovny 0. (Body, ve kterých jsou všechny p. der. 1. řádu nulové, nazýváme STACIONÁRNÍ)

Věta: Nechť $f(x,y)$ má v jistém okolí bodu (x_0,y_0) spojité parc. derivace 2. řádu. Nechť

$$f'_x(x_0,y_0)=0, \quad f'_y(x_0,y_0)=0$$

Položme $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$.

Je-li $\Delta(x_0,y_0) > 0$, má f v (x_0,y_0) lok. extrém. (je-li $\Delta(x_0,y_0) < 0$, není zde extrém) Pokud navíc

- $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$, má zde f lok. minimum
- $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ l. maximum

Př.: Najděte lok. extrémy fce

$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

SOUSTAVA ROVNIC !?

$f'_x = 2x = 0$

$f'_y = 2(y-1) = 0$

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y-2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

stac. bod $[x_0,y_0] = [0,1]$

$f''_x = 2$, $f''_y = 2$, $f''_{xy} = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \; f''_x = 2 > 0 \Rightarrow$$

v $[0,1]$ lok. min.

Věta: Nechť $f(x)$ je def. na $\Omega \subseteq V_n$ a nechť x_0 je stac. bod, v jehož okolí jsou spojité parc. derivace 2. řádu. Označme

$$D_k = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_k} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_k} \\ \vdots & & & \\ f''_{x_kx_1} & f''_{x_kx_2} & \cdots & f''_{x_kx_k} \end{vmatrix}$$

D_1	D_2	D_3	D_4	
$-$	$+$	$-$	$+$	… max
$+$	$+$	$+$	$+$	min

Je-li $D_1(x_0) > 0,\ D_2(x_0) > 0, \dots, D_n(x_0) > 0$
pak má f v x_0 lok. min.

Je-li $D_1(x_0) < 0,\ D_2(x_0) > 0,\ <, >, < \dots$
$\dots, (-1)^n D_n(x_0) > 0, \Rightarrow$ lok. max.

Př.: Pro $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz$
najděte lok. ex.

D_1	D_2	D_3	
$-$	$+$	$-$	$\Rightarrow$ max.
$+$	$+$	$+$	$\Rightarrow$ min.

jinak není extrém

$$f'_x = 2x + y - z = 0$$
$$f'_y = 2y + x = 0$$
$$f'_z = 2z - x = 0$$

Řešením dostaneme 1 stac. bod $[0,0,0]$.

$$\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$D_1 = 2 > 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$

$D_3 = \ \ > 0$

$\Rightarrow$ lok. minimum