LINEÁRNÍ ALGEBRA

Vektor, matice:

Uspořádanou n-tici reálných čísel $a_1, \dots, a_n$ nazveme **VEKTOREM**, píšeme

- $a = (a_1, \dots, a_n)$ ... ŘÁDKOVÝ VEKTOR nebo
- $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ... SLOUPCOVÝ VEKTOR

Uspořádanou $m.n$-tici reálných čísel zapsaných do obdélníkového schématu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazveme **MATICÍ** typu (m, n).

Př.: Vyrábí-li firma ve dvou závodech Z_1, Z_2 tři různé výrobky V_1, V_2, V_3, můžeme množství různých výrobků vyráběné v jednotlivých závodech zapsat do matice A typu $(2,3)$: $A = (a_{ij})$, kde a_{ij} = množství j-tého výrobku vyprodukované v i-tém závodě

OPERACE S MATICEMI

Matice můžeme násobit reálným číslem

Př.: Matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ vyjadřuje denní produkci výrobků V_1, V_2, V_3 v závodech Z_1, Z_2. Matice

$$B = 5 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$ vyjadřuje týdenní produkci

Matice stejných typů můžeme sčítat

Př.:

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 18 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

K matici $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ definujeme matici **TRANSPONOVANOU** $\boxed{A^T = (a_{ji})}$

Př.:

$$B^T = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 0 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$$

matice B^T je typu $(3,2)$

Matice „navazujících typů" můžeme násobit.

Př.: Firma má odběratele O_1, O_2, O_3.

Nechť matice $\mathbb{C} = (c_{ij})$, $i = 1, 2, 3$
$j = 1, 2, 3$

vyjadřuje cenu zaplacenou i-tým odběratelem O_i za j-tý výrobek V_j.

Potom pro matici cen $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 14 \\ 31 & 33 & 26 \end{pmatrix}$$

je matice typu $(2,3)$, kde prvek d_{ij} vyjadřuje částku, kterou by zaplatil j-tý odběratel O_j za produkci závodu Z_i. POZOR: $\boxed{\mathbb{A} \cdot \mathbb{C} \neq \mathbb{C} \cdot \mathbb{A}\ !}$

(matice $\mathbb{C} \cdot \mathbb{A}$ neexistuje)

RELACE MEZI MATICEMI

Matice stejných typů můžeme porovnávat.

Př.: Rozhodněte, která z relací „$=, <, >, \leq, \geq$" je mezi maticemi $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

$\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$

SYSTÉM LINEÁRNÍCH ROVNIC

Soustavu m lineárních algebraických rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$ můžeme zapsat takto:

$$\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}$$

Maticovým zápisem soustavy rovnic rozumíme vztah $\boxed{\mathbb{A} \cdot \mathbb{x} = \mathbb{b}}$, kde:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme MATICE SOUSTAVY,

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ VEKTOR NEZNÁMÝCH a $$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ VEKTOR PRAVÝCH STRAN,

matici

$$(\mathbb{A}|\mathbb{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

ROZŠÍŘENOU MATICÍ SOUSTAVY

Vektor $\mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ nazveme ŘEŠENÍM SOUSTAVY, platí-li

$$\boxed{\mathbb{A} \cdot \mathbb{c} = \mathbb{b}}$$

Př.: Je dána soustava 2 rovnic o 3 neznámých

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Určete matici a rozšířenou matici soustavy, vektor pravých stran a rozhodněte, zda jsou vektory $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ řešením soustavy.

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$A \cdot c = \begin{pmatrix} 1.0 + 2.1 - 3.(-1) \\ 2.0 + 4.1 + 1.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓ c je řešením

$A \cdot d = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓ d je řešením

POČÍTÁNÍ S MATICEMI, SPECIÁLNÍ MATICE

Matici $O = (o_{ij})$, kde $o_{ij} = 0$ $\quad i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

nazveme **NULOVOU MATICÍ** typu (m,n)

Pro lib. matici A typu (m,n) platí: $\boxed{A + O = A}$

Matici $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \; 1 \end{pmatrix}$ typu (n,n) nazveme **JEDNOTKOVOU MATICÍ** řádu n.

Pro lib. matice $B_{(m,n)}$ i $C_{(n,k)}$ platí: $\boxed{\begin{aligned} B \cdot E &= B \\ E \cdot C &= C \end{aligned}}$

SPECIÁLNÍ TVARY MATIC

Matici typu (n,n) nazveme ČTVERCOVOU.

Př.:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ je v diagonálním tvaru

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ je v horním trojúhelníkovém tvaru

Def.: Platí-li pro matici A následující:

- všechny nulové řádky jsou dole
- každý nenulový řádek „začíná více nulami než předchozí",

pak řekneme že A je v HORNÍM SCHODOVITÉM TVARU.

Př.: Rozhodněte, které z matic jsou schodovité:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

ARITMETICKÝ VEKTOROVÝ PROSTOR

Uvažujme $n \in \mathbb{N}$. Na $\mathbb{R}^n$ (množina uspořádaných n-tic reálných čísel) zavedeme operace sčítání a násobení $\mathbb{R}$ číslem: pro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $\mathbb{b}=(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{a}+\mathbb{b}=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$$
$$\alpha.\mathbb{a}=(\alpha.a_1,\dots,\alpha.a_n).$$

Označme $\mathbb{V}_n=(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ množinu $\mathbb{R}^n$ s těmito operacemi nazveme **ARITMETICKÝM VEKTOROVÝM PROSTOREM**. Prvky $\mathbb{V}_n$ nazveme VEKTORY.

Pozn.: Pro všechna čísla α, β a libovolné $\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c} \in \mathbb{V}_n$ platí:

- $\mathbb{a}+\mathbb{b}=\mathbb{b}+\mathbb{a}$
- $\mathbb{a}+(\mathbb{b}+\mathbb{c})=(\mathbb{a}+\mathbb{b})+\mathbb{c}$
- $\mathbb{a}+\mathbb{0}=\mathbb{a}$
- existuje $-\mathbb{a}$: $\mathbb{a}+(-\mathbb{a})=\mathbb{0}$
- $1.\mathbb{a}=\mathbb{a}$
- $\alpha.(\beta\mathbb{a})=(\alpha.\beta).\mathbb{a}$
- $(\alpha+\beta).\mathbb{a}=\alpha\mathbb{a}+\beta\mathbb{a}$
- $\alpha.(\mathbb{a}+\mathbb{b})=\alpha\mathbb{a}+\alpha\mathbb{b}$

Pozn.: Vektorovým (či též lineárním) prostorem můžeme nazvat strukturu $(P, \text{„}+\text{“}, \text{„}\cdot\text{“})$ pro lib. množinu P, pokud zde zavedeme operace sčítání a násobení číslem tak, aby platily vlastnosti předchozí poznámky.

Př.: $\mathbb{M}^{m,n}=(M^{m,n},+,\cdot)$, kde $M^{m,n}$ je množina všech matic typu (m,n).

LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ

Jsou-li ${}^{1}x, \dots, {}^{m}x$ vektory z V_n a $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, pak vektor $x = c_1 \cdot {}^{1}x + \dots + c_m \cdot {}^{m}x$ nazveme LINEÁRNÍ KOMBINACÍ vektorů ${}^{1}x, \dots, {}^{m}x$.

Př.: Vektor $x = (4, -1, 10, 12) \in V_4$ je lineární kombinací vektorů ${}^{1}x = (1, 0, 5, 7)$ a ${}^{2}x = (2, -1, 0, -2)$, neboť

$x = 2 \cdot {}^{1}x + 1 \cdot {}^{2}x$ $\qquad x - 2\,{}^{1}x - {}^{2}x = o$

Řekneme, že vektory ${}^{1}x, \dots, {}^{m}x$ jsou LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ, jestliže mezi nimi existuje aspoň jeden vektor, který je kombinací ostatních. Pokud žádný z vektorů nelze vyjádřit jako kombinaci ostatních, řekneme že ${}^{1}x, \dots, {}^{m}x$ jsou LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ

Př.: Vektory $x, {}^{1}x, {}^{2}x$ z předchozího příkladu jsou ...LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ $\qquad {}^{2}x = x - 2\,{}^{1}x \qquad {}^{1}x = \frac{x - {}^{2}x}{2}$

Vektory ${}^{1}x, {}^{2}x$ jsou LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ.

Pozn.: Vektory ${}^{1}x, \dots, {}^{m}x$ jsou lineárně <u>nezávislé</u> $\Leftrightarrow$ vektorová rovnice $c_1 \cdot {}^{1}x + \dots + c_m \cdot {}^{m}x = o$ má <u>jediné</u> řešení $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_m = 0$.
Vektory ${}^{1}x, \dots, {}^{m}x$ jsou lineárně závislé $\Leftrightarrow$ existuje i jiné než nulové řešení.

BÁZE VEKTOROVÉHO PROSTORU

Je-li $\mathbb{P}$ vektorový prostor a $^1e, \dots, {}^ne$ takové vektory, že:

- jsou lineárně <u>nezávislé</u>
- každý vektor z $\mathbb{P}$ jde vyjádřit jako jejich kombinaci,

pak $^1e, \dots, {}^ne$ nazveme **BÁZÍ** prostoru $\mathbb{P}$.

Př.: Uvažujme prostor V_3 a v něm vektory
$a = (1,0,3)$, $b = (0,1,2)$, $c = (1,0,0)$, $d = (0,0,0)$

1) tvoří b, c, d bázi V_3?
2) tvoří b, c bázi V_3?
3) tvoří a, b, c bázi V_3?

Řešení:

1) NETVOŘÍ
2) NETVOŘÍ, např. $(0,1,0) \neq c_1 \cdot b + c_2 \cdot c$ pro ~~že~~ žádné c_1, c_2
3) TVOŘÍ BÁZI

Pozn.: V prostoru V_n existuje vždy báze, např. tzv. <u>kanonická</u> báze

$$^1e = (1, 0, \dots, 0)$$
$$^2e = (0, 1, 0, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$^ne = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \cdot {}^1e + a_2 \cdot {}^2e + \dots + a_n \cdot {}^ne$$

Pozn.: Každá skupina n lineárně nezávislých vektorů z V_n tvoří bázi. V jakékoliv skupině vektorů z V_n je nejvýše n lineárně nezávislých. Číslo n nazýváme **DIMENZÍ** prostoru V_n.

HODNOST

Je-li $\mathbb{X} = (\overset{1}{\mathbb{X}}, \dots, \overset{m}{\mathbb{X}})$ skupina vektorů z prostoru $\mathbb{P}$, pak maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve skupině $\mathbb{X}$ nazveme **HODNOSTÍ** $\mathbb{X}$ a značíme $h(\mathbb{X})$

Pozn.: Uvažujme matici $\mathbb{A}$ typu (m, n). Položíme-li za $\mathbb{X}$ řádky matice $\mathbb{A}$, nazveme $h(\mathbb{X})$ **ŘÁDKOVOU HODNOSTÍ** matice $\mathbb{A}$, pro sloupce matice $\mathbb{A}$ dostaneme **SLOUPCOVOU HODNOST**.

Př.: Určete řádkovou a sloupcovou hodnost matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Řešení:

řádková hodnost $= 2$
(řádky jsou nezávislé)

sloupcová hodnost $= 2$
(poslední dva sloupce nezávislé, ostatní jsou jejich kombinace)

Věta: Horní schodovitá matice má řádkovou hodnost rovnu počtu jejích nenulových řádků

Př.: Určete řádkovou hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: $h(A) = 3$

Věta: Je-li A matice typu (m,n), pak její sloupcová hodnost je rovna její řádkové hodnosti, označíme ji $h(A)$.

Důsledek: $h(A) \leq \min(m,n)$

Důsledek: $h(A) = h(A^T)$

ELEMENTÁRNÍ ÚPRAVY

Nechť A je matice typu (m,n). Vytvoříme-li z matice A matici B tak, že:

- vyměníme navzájem dva libovolné řádky matice a zbytek necháme beze změny,
- jeden řádek vynásobíme libovolným nenulovým číslem a ostatní necháme, nebo
- k jednomu z řádků přičteme jiný řádek a ostatní necháme

pak řekneme, že B vznikla z A pomocí **ZÁKLADNÍCH ELEMENTÁRNÍCH TRANSFORMACÍ**. Jestliže aplikujeme několik těchto základních úprav po sobě, řekneme, že B vzniká z A pomocí **ELEMENTÁRNÍCH TRANSFORMACÍ** a píšeme: $A \sim B$

Použití:

- určení hodnosti matice
- řešení systému rovnic
- hledání inverzní matice
- výpočet determinantu

Pomocí elementárních transformací

Př.: upravte matici na schodovitý tvar:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \\ \\ \end{matrix}$$

řešení:

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Věta: Elementární úpravy nemění hodnost matice.

Př.: Hodnost matice z předchozího příkladu: $h(\mathbb{A}) = 3$

Při řešení úlohy určení hodnosti matice nejprve matici převedeme do schodovitého tvaru a potom určíme hodnost jako počet nenulových řádků.

DETERMINANT MATICE

Nechť A je čtvercová matice řádu n.

<u>Determinant</u> matice je <u>číslo</u> značené $|A|$ definované jako

- a_{11} pro $n=1$
- $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ pro $n=2$
- $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} a_{32} a_{23} + a_{21} a_{12} a_{33})$

  pro $n=3$

  (TZV. SARUSOVO PRAVIDLO)

- pro $n \geq 4$ definujeme determinant pomocí „rozvoje podle 1. řádku"

  (NEEXISTUJE OBDOBA SARUSOVA PRAVIDLA PRO $n \geq 4$)

  $$a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{13} \cdot |A_{13}| - a_{14} \cdot |A_{14}| \; (+ \dots)$$

  kde A_{ij} je submatice, která vznikne z A vypuštěním <u>i</u>-tého řádku a <u>j</u>-tého sloupce

Př.:
$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = -11$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \end{array} = \cancel{-5 + 0 + 6 - 0 - (-8)} = 6$$

$$= \underline{\underline{8}}$$

Př.:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

Pozn.: Determinant matice v horním trojúhelníkovém tvaru je roven součinu diagonálních prvků.

Př.:
$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = \underline{\underline{70}}$$

Pozn.: Při výpočtu determinantu lze využít elementárních transformací a převést matici na trojúhelníkový tvar. Přitom je třeba zohlednit, že některé transformace mění hodnotu determinantu

VLIV ELEMENTÁRNÍCH TRANSFORMACÍ NA HODNOTU DETERMINANTU

Jestliže matice B vznikne z matice A pomocí základní úpravy

- výměna řádků, pak $|B| = -|A|$
- vynásobením jednoho řádku číslem α, pak $|B| = \alpha|A|$
- přičtením jednoho řádku k jinému, pak $|B| = |A|$

Př.: Určete hodnotu determinantu pomocí elementárních transformací

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{+}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \cdot 4 \\ \end{matrix} - \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & +10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 4\cdot 10\cdot 3 = \underline{\underline{-60}}$$

REGULÁRNÍ MATICE

Čtvercovou matici A, pro niž platí $|A| \neq 0$ nazveme **REGULÁRNÍ**, má-li A nulový determinant, nazveme ji **SINGULÁRNÍ**.

INVERZNÍ MATICE

Nechť A je regulární matice. Pak existuje matice B, pro niž platí:

$$\boxed{A \cdot B = B \cdot A = E}$$

O matici B řekneme, že je **INVERZNÍ** k A. Matice B je určena jednoznačně, značíme ji A^{-1}

Př.: Ověřte, zda je matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ inverzní k matici $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

PŘÍMÉ ŘEŠENÍ SYSTÉMU ROVNIC POMOCÍ A^{-1}

Je-li $A \cdot x = b$ systém rovnic s regulární maticí A, pak má jediné řešení

$$\boxed{x = A^{-1} \cdot b}$$

Př.: Najděte řešení systému pomocí inverzní matice.

$$3x_1 + x_2 = 5$$
$$5x_1 + 2x_2 = 7$$

řešení: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

PŘÍMÉ ŘEŠENÍ SYSTÉMU ROVNIC POMOCÍ DETERMINANTŮ – CRAMEROVO PRAVIDLO

Je-li A regulární matice řádu n a b vektor pravých stran, pak řešení systému $A.x=b$ je určeno jednoznačně, platí

$$x_i = \frac{|B_i|}{|A|}, \quad i=1,\dots,n$$

kde matice B_i vznikne z A nahrazením i-tého sloupce vektorem b.

Př.: Cramerovým pravidlem vyřešte systém

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

řešení:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \qquad |B_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \qquad |B_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$ $\qquad$ $x_3 =$

POUŽITÍ DETERMINANTŮ K URČENÍ INVERZNÍ MATICE

Aplikací Cramerova pravidla na řešení maticové rovnice $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{E}$ dostaneme předpis pro prvky matice $\mathbb{B}$ inverzní k regulární matici $\mathbb{A}$ řádu n:

$$\boxed{b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{|\mathbb{A}_{ji}|}{|\mathbb{A}|}}, \quad i,j = 1, \dots, n$$

(zde $\mathbb{A}_{ji}$ je submatice vzniklá vypuštěním j-tého řádku a i-tého sloupce z $\mathbb{A}$.

Pozn.: Pro $n=2$ dostáváme

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{|\mathbb{A}_{11}|}{|\mathbb{A}|} & -\frac{|\mathbb{A}_{21}|}{|\mathbb{A}|} \\ -\frac{|\mathbb{A}_{12}|}{|\mathbb{A}|} & \frac{|\mathbb{A}_{22}|}{|\mathbb{A}|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbb{A}|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Př.: Určete inverzní matici k

$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Proveďte zkoušku.

řešení:

METODY ŘEŠENÍ SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC

Dva systémy lineárních rovnic $\mathbb{A}x = b$, $\mathbb{C}x = d$ nazveme **EKVIVALENTNÍ** jestliže každé řešení systému $\mathbb{A}x = b$ je zároveň i řešením systému $\mathbb{C}x = d$ a naopak.

Věta: Je-li $(\mathbb{A}|b)$ rozšířená matice systému $\mathbb{A}x = b$ a vznikne-li $(\mathbb{C}|d)$ z $(\mathbb{A}|b)$ pomocí elementárních transformací, pak je systém $\mathbb{C}x = d$ ekvivalentní s $\mathbb{A}x = b$.

Pomocí vhodných elementárních úprav můžeme převést problém řešení soustavy $\mathbb{A}x = b$ na řešení ekvivalentního systému $\mathbb{C}x = d$ s maticí $\mathbb{C}$ ve speciálním tvaru

ŘEŠENÍ SYSTÉMU S MATICÍ V HORNÍM Δ TVARU

Systém $\mathbb{C}x = d$, kde $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots \; 0 & c_{nn} \end{pmatrix}$, $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$

řešíme metodou ZPĚTNÉ SUBSTITUCE: z poslední rovnice vyjádříme $x_n = d_n / c_{nn}$. Dosadíme do předposlední rovnice a spočítáme x_{n-1}, atd.....

Př.:
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

má řešení $x_3 =$

$\Rightarrow x_2 = 4x_3 - 5 =$

$\Rightarrow x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 =$

ŘEŠENÍ SYSTÉMU S REGULÁRNÍ MATICÍ

GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA

- matici $(\mathbb{A}|\mathbb{b})$ převedeme elementárními úpravami na matici $(\mathbb{C}|\mathbb{d})$, kde $\mathbb{C}$ je horní schodovitá a dále postupujeme metodou zpětné substituce

JORDANOVA ELIMINAČNÍ METODA

- matici $(\mathbb{A}|\mathbb{b})$ převedeme elementárními úpravami na matici $(\mathbb{C}|\mathbb{d})$, kde $\mathbb{C}$ je v diagonálním tvaru. Pak

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1 &= d_1 \\ c_{22}x_2 &= d_2 \\ &\vdots \\ c_{nn}x_n &= d_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{přímo} \quad \begin{aligned} x_1 &= d_1/c_{11} \\ x_2 &= d_2/c_{22} \\ &\vdots \\ x_n &= d_n/c_{nn} \end{aligned}$$

Jordanova metoda lze použít i při řešení maticové rovnice $\mathbb{A}.\mathbb{X}=\mathbb{B}$ (řešíme několik systémů se stejnou maticí $\mathbb{A}$ a pravými stranami $\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m$, kde $\mathbb{B}=(\mathbb{b}_1, \dots \mathbb{b}_m)$) současně). $\mathbb{X}$ je neznámá matice typu (n,m), jejíž sloupce $\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_m$ jsou řešením systémů s pravými stranami $\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m$.

Upravujeme rozšířenou matici $(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ na matici $(\mathbb{E}|\mathbb{D})$. Potom pro neznámou matici $\mathbb{X}$ platí $\boxed{\mathbb{E}.\mathbb{X}=\mathbb{D}}$, tedy $\boxed{\mathbb{X}=\mathbb{D}}$

JORDANOVA METODA PRO URČENÍ INVERZNÍ MATICE

Nechť $\mathbb{A}$ je regulární. Upravujme matici $(\mathbb{A}|\mathbb{E})$ (hledáme řešení rovnice $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{E}$) na matici $(\mathbb{E}|\mathbb{D})$. Hledaná matice $\mathbb{X}=\mathbb{A}^{-1}$ je rovna matici $\mathbb{D}$.

Př.: Najděte inverzní matici k $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$