Řešení systému s maticí soustavy A typu (m,n) hodnosti $\boxed{h = h(A) \leq n}$

→ Převedeme matici elementárními úpravami do schodovitého tvaru. Převedeme na systém rovnic, ve kterém na levé straně ponecháme pouze proměnné odpovídající „začátku některého schodu", ostatní neznámé převedeme na pravou stranu. Těchto $n-h$ proměnných považujeme za <u>parametry</u>. Koeficienty u neznámých na levé straně nyní tvoří horní trojúhelníkovou matici, úlohu dále tedy řešíme METODOU ZPĚTNÉ SUBSTITUCE.

Př.: Najděte VŠECHNA řešení systému

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\
3x_2 + 6x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0 \\
-2x_4 + 2x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

Řešení: Matice soustavy již je ve schodovitém tvaru, $h(A) = 3$, $n = 5$; $h < n$.
„Začátkům schodů" odpovídají neznámé x_1, x_2, x_4 – ty ponecháme nalevo, ostatní, tedy x_3 a x_5 převedeme na pravou stranu.

Dostaneme systém

$$3x_1 + 5x_2 + x_4 = 2x_5 - x_3$$
$$3x_2 + 4x_4 = x_5 - 6x_3$$
$$-2x_4 = -2x_5$$

Pro libovolnou hodnotu x_3, x_5 můžeme dopočítat x_1, x_2, x_4, aby byly rovnice splněny.

Položme tedy $x_3 = p$, $x_5 = q$; $p, q \in \mathbb{R}$ parametry.

Potom z poslední rovnice $-2x_4 = -2q$, tj. $\underline{\underline{x_4 = q}}$

Z druhé rovnice dostaneme $3x_2 + 4q = q - 6p$

$$\Rightarrow 3x_2 = -3q - 6p ; \quad \underline{\underline{x_2 = -q - 2p}}$$

Po dosazení do první rovnice:

$$3x_1 + 5\cdot(-q - 2p) + q = 2q - p \Rightarrow$$
$$3x_1 = 6q + 9p ; \quad \underline{\underline{x_1 = 2q + 3p}}$$

ZÁVĚR: Množina všech řešení, tzv. **OBECNÉ ŘEŠENÍ**, závisí na 2 parametrech, tj. pro libovolnou volbu p, q dostaneme nějaké řešení systému a naopak každé konkrétní řešení lze zapsat ve tvaru

$$x = \begin{pmatrix} 2q+3p \\ -q-2p \\ p \\ q \\ q \end{pmatrix} = q \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pro nějaké } p, q \in \mathbb{R}$$

Pozn.: Např. pro $p = 1, q = 1$ dostaneme $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Říkáme, že dosazením hodnot za parametry dostaneme PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ.

Pozn.: Systém s nulovou pravou stranou = HOMOGENNÍ SYSTÉM

ŘEŠITELNOST SYSTÉMU ROVNIC:

FROBENIOVA VĚTA !!!

Buď $Ax = b$ systém $\boxed{m}$ rovnic o $\boxed{n}$ neznámých.
Pak je-li:

- $h(A) < h(A|b)$ ⇒ systém nemá řešení
- $h(A) = h(A|b) = n$ ⇒ systém má právě 1 řešení
- $h(A) = h(A|b) = h < n$ ⇒ systém má nekonečně mnoho řešení závislých na $n-h$ parametrech.

Pozn.: Je-li $h(A) < h(A|b)$, pak systém odpovídající schodovitému tvaru matice (A, b) obsahuje rovnici $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = c$, kde $c \neq 0$. Systém tedy zřejmě nemá řešení, ale existují metody PŘIBLIŽNÉHO řešení takových systémů - dále se setkáme například s METODOU NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

MATEMATICKÁ ANALÝZA

Základní pojmy:

Funkce: Pro $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ nazýváme předpis $f: A \to B$, který každému $x \in A$ přiřadí právě jedno $y \in B$ reálnou funkcí reálné proměnné.

Pozn.: Pro $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mluvíme o funkci n proměnných

Píšeme: $y = f(x)$, čteme y je obrazem x nebo x je vzorem y

$A =: Df$ definiční obor funkce

$Hf := \{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$ obor hodnot funkce

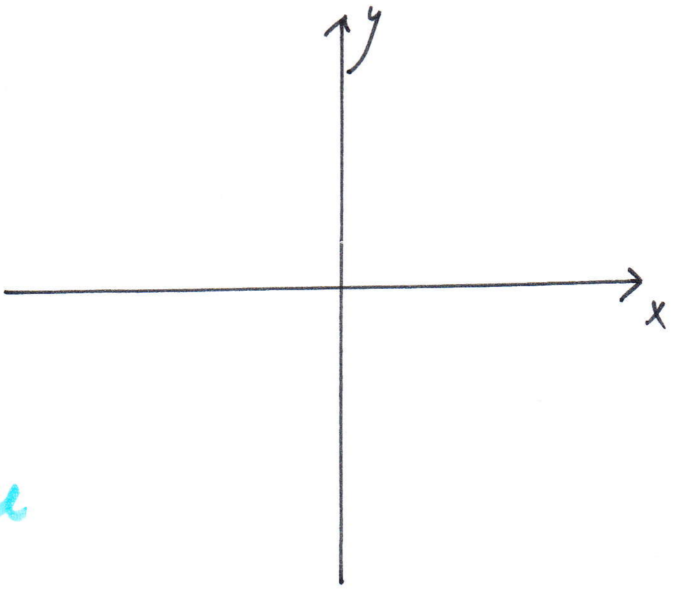
Pozn.: Funkci většinou zadáváme výrazem, definičním oborem pak rozumíme množinu $A \subseteq \mathbb{R}$, pro jejíž prvky má výraz smysl.

Graf funkce:

Množina bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ vyznačená v kartézském souřadném systému

Př.: $f(x) =$

$Df:$

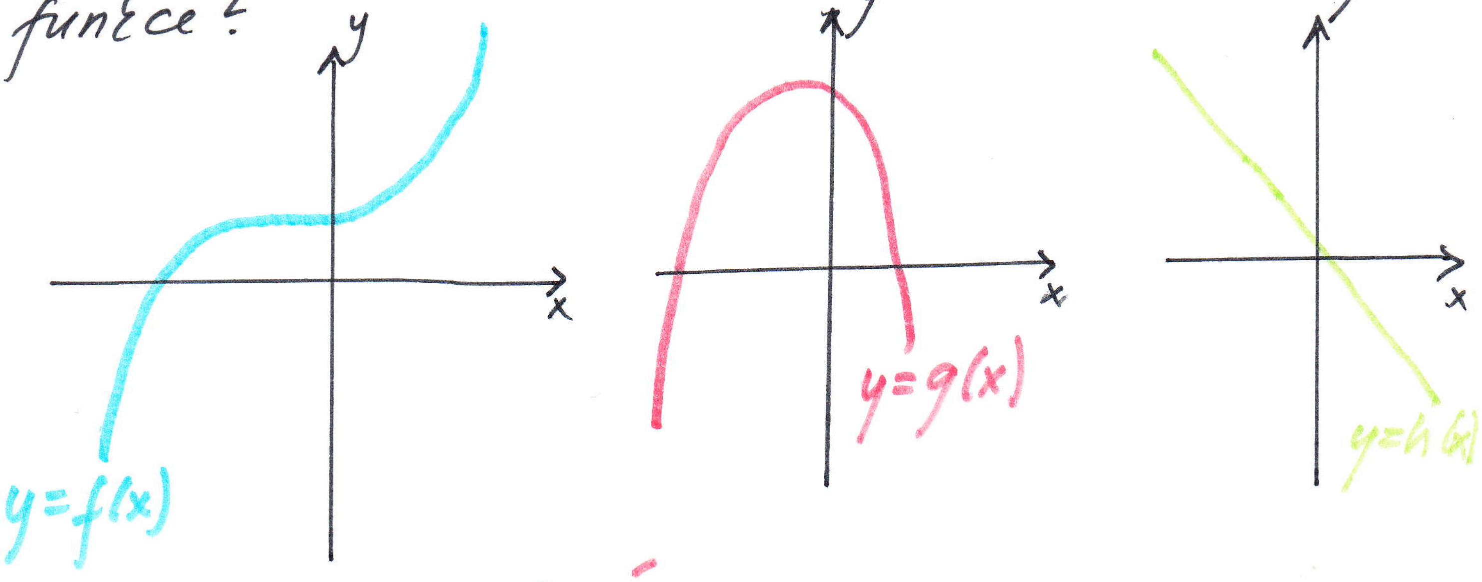


PROSTÁ FUNKCE

$f: A \to B$ je **PROSTÁ** $\Leftrightarrow \forall x, y \in A: \boxed{x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)}$

(tj. „v různých bodech nabývá funkce různých hodnot")

Př.: Na kterém z obrázků je graf prosté funkce?

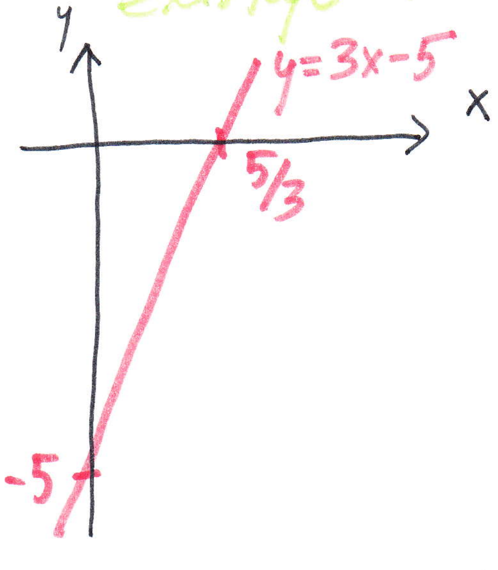


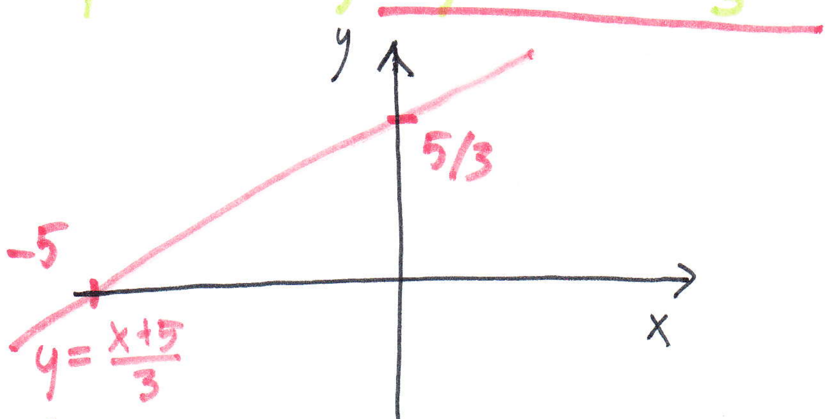
Funkce INVERZNÍ:

Je-li $f: A \to B$ prostá a je-li $B = H_f$, pak existuje funkce $f^{-1}: B \to A$, která každému $y \in B$ přiřadí jeho vzor, tj.

$$\boxed{f^{-1}(y) = x} \text{ pro } y = f(x).$$

Př.: $f(x) = y = 3x - 5$ je prostá, $H_f = \mathbb{R} \Rightarrow$ existuje inverzní funkce $f^{-1}(y) = x = \frac{y+5}{3}$





(V grafu jsme zvyklí označovat závislou proměnnou y a nezávislou x.)

SAMI ZOPAKOVAT:

- parita funkce (sudá, lichá)
- periodická funkce
- elementární funkce (polynom, racionální lomená funkce, mocninná funkce, exponenciální, logaritmus, goniometrické...)

CYKLOMETRICKÉ FUNKCE

- definujeme je jako inverzní ke goniometrickým funkcím:

Pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ definujeme

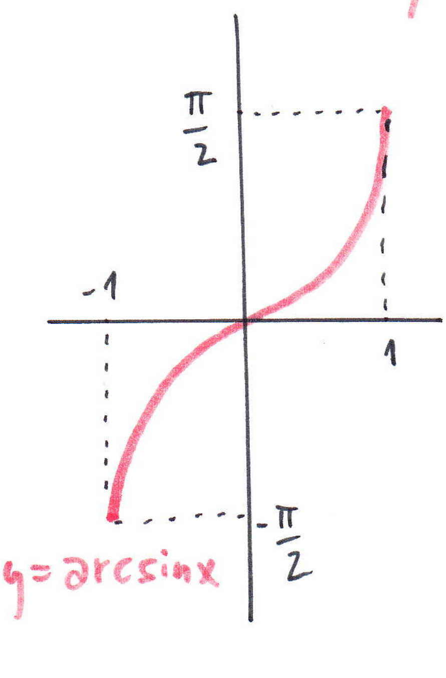
$\arcsin x := u \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ takové, že $\sin u = x$

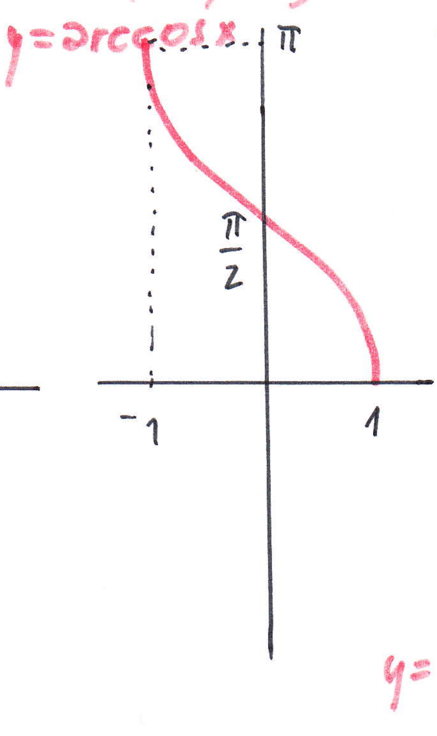
$\arccos x := u \in \langle 0, \pi \rangle$ takové, že $\cos u = x$

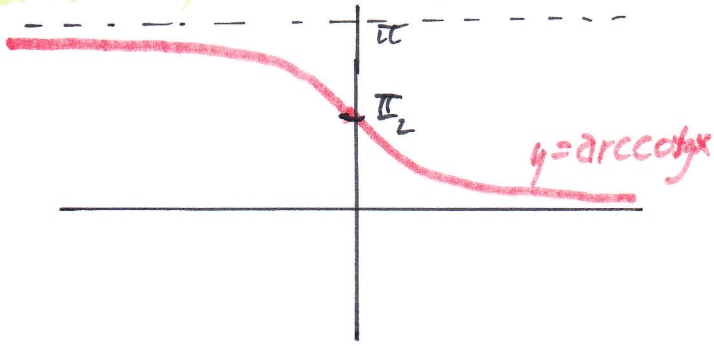
Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

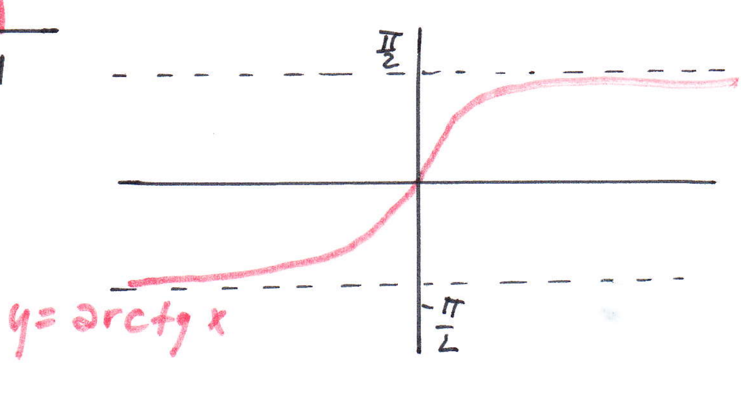
$\operatorname{arctg} x := u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ takové, že $\operatorname{tg} u = x$

$\operatorname{arccotg} x : u \in (0, \pi)$ takové, že $\operatorname{cotg} u = x$









SLOŽENÁ FUNKCE

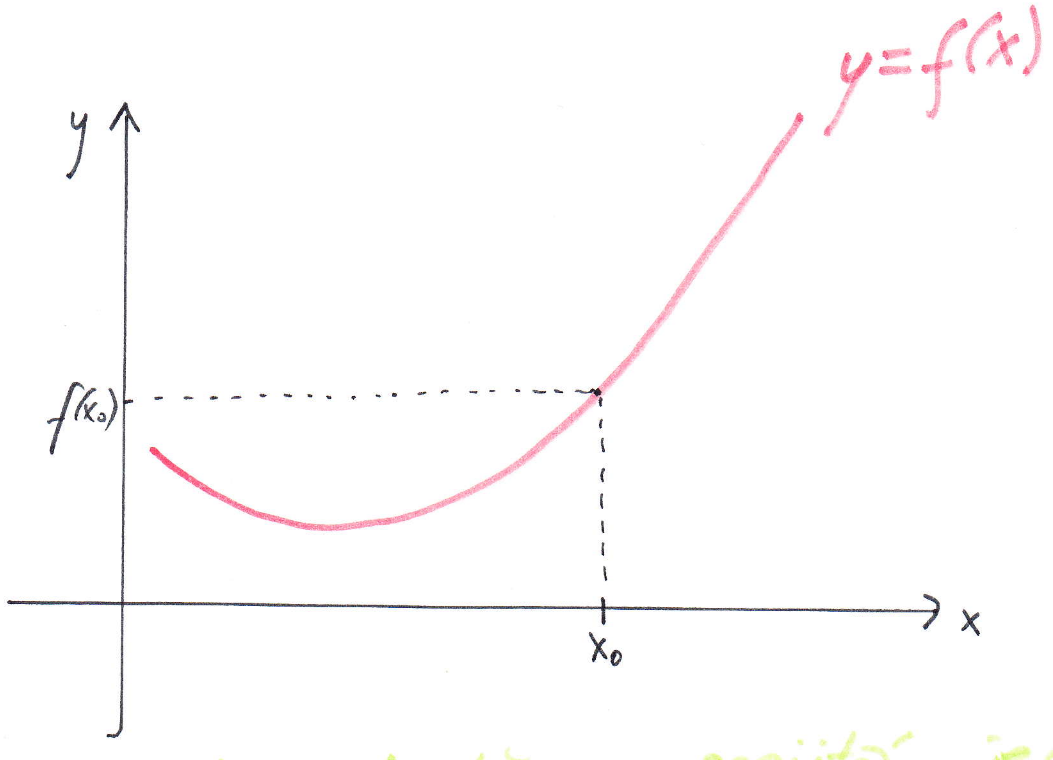
Je-li $u = \varphi(x)$ funkce z A na B a $y = f(u) : B \to C$, pak definujeme **SLOŽENOU FUNKCI** $F(x) = f(\varphi(x))$.
Funkci f nazýváme vnější složkou, funkci φ vnitřní složkou.

Př.: $F(x) = \frac{1}{3x+5}$ je složená funkce.

Vnější složka $f(u) =$

vnitřní složka $\varphi(x) =$

SPOJITÁ FUNKCE



Funkce f je v bodě x_0 spojitá, jestliže existuje $f(x_0)$ a pro lib. přesnost $\varepsilon > 0$ platí, že pro <u>všechna</u> x z nějakého <u>okolí x_0</u>:

$$\boxed{f(x) \doteq f(x_0)} \quad (\pm \varepsilon)$$

Pozn.: Definujeme též spojitost ZLEVA (ZPRAVA) pro levé (pravé) okolí x_0.

LIMITA FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

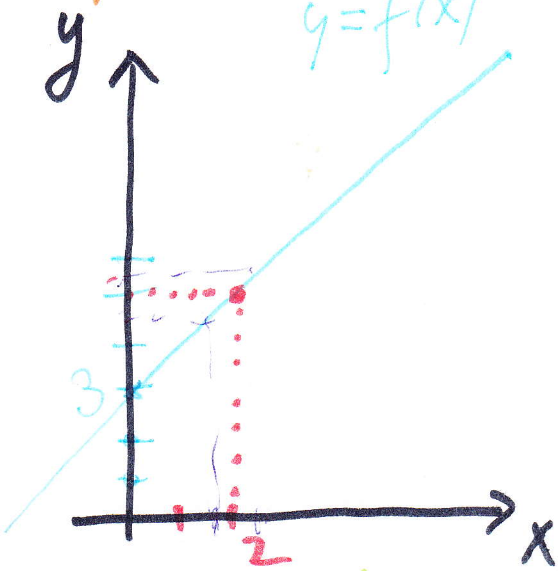
Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu a, $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = a}$

jestliže „pro všechna x blízká x_0 je funkční hodnota $f(x)$ blízká a."

Př.: Určete limitu $\lim_{x \to 2} (x+3)$. Tedy $f(x) = x+3$
$x_0 = 2$, $a = ?$

Jaké jsou funkční hodnoty pro „x blízká 2"?

např.: $f(2{,}1) =$
$f(1{,}9) =$
$f(2{,}01) =$
$f(1{,}99) =$



závěr: $a = \lim_{x \to 2} (x+3) =$

Platí: Pokud je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0, platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Pozn.: Funkce $f(x)$ může mít limitu i v bodě x_0, kde není definovaná

Př.: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

Řešení: Funkce není v bodě -1 definována

($f(-1) = \frac{-1+1}{1-1} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$)

Avšak platí: $f(-1{,}1) =$

$f(-0{,}9) =$

atd.

Závěr: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} =$

Pozn.: Pokud platí $f(x) = g(x)$ pro $\forall x \neq x_0$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existuje $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existuje a platí: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Př.: Pro funkci $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ z předchozího příkladu platí $f(x) = \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)}$, tedy $\underline{g(x) = f(x)\ \forall x \neq -1}$

označme $g(x) = \frac{1}{x-1}$, potom:

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} g(x) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{x-1} =$

NEVLASTNÍ LIMITY: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Řekneme, že limita funkce $f(x)$ v $+\infty$ je rovna a, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, jestliže pro všechna dostatečně velká x platí $f(x) \doteq a$

"(resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$ analogicky)

ROZŠÍŘENÍ MNOŽINY $\mathbb{R}$:

Označme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Symboly $-\infty$ a ∞ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

$$a + \infty = \infty + a = \infty$$
$$\infty + \infty = \infty$$
$$a - \infty = -\infty + a = -\infty$$
$$-\infty - \infty = -\infty$$
$$\frac{a}{\pm\infty} = 0$$
$$\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$$
$$\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$
$$-\infty \cdot (-\infty) = \infty$$
$$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0 \\ -\infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$
$$a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0 \\ \infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

Některé operace nejsou definovány, např.: $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$

Př.: Spočtěte $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{x+5}$.

Řešení: Např. pro $x = 95; 995; 9995$:

$f(95) =$ $f(995) =$ $f(9995) =$

Ztráceně: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{x+5} =$ „$\frac{3}{\infty}$" $=$

Pravidla pro počítání limit:

je-li $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$, kde $A, B, x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak platí:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

(pokud má pravá strana význam v $\mathbb{R}^*$)

Př.: Vypočítejte: $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2}$.

Řešení: limita čitatele $\lim_{x \to \infty} (2x^2+5x+1) = \infty$

limita jmenovatele $\lim_{x \to \infty} (3-x^2) = -\infty$

Výraz <u>není definován</u>. $\left(= \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\right)$

Pro $x \neq 0$ můžeme zlomek upravit:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2+\overbrace{\frac{5}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}-1} = \frac{2}{-1} = \underline{\underline{-2}}$$

Př.: Vypočítejte $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4+x^2}{x^2+5}$.

Řešení: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4+x^2}{x^2+5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4+x^2}{x^2+5} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{1+\underbrace{\frac{5}{x^2}}_{\to 0}} = \underline{\underline{\infty}}$

Př.: $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x^3-3} =$

LIMITA SLOŽENÉ FUNKCE

Je-li $F(x) = f(\varphi(x))$ složená funkce, kde

$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$, a funkce f je spojitá v a

Pak: $$\lim_{x \to x_0} F(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right) = f(a)$$

Př.: $$\lim_{x \to \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\right) = \sin(0) = 0$$

Př.: $$\lim_{x \to \infty} x^{-x} = \lim_{x \to \infty} e^{-x \cdot \ln x} = e^{\lim\limits_{x \to \infty}(-x \cdot \ln x)} =$$

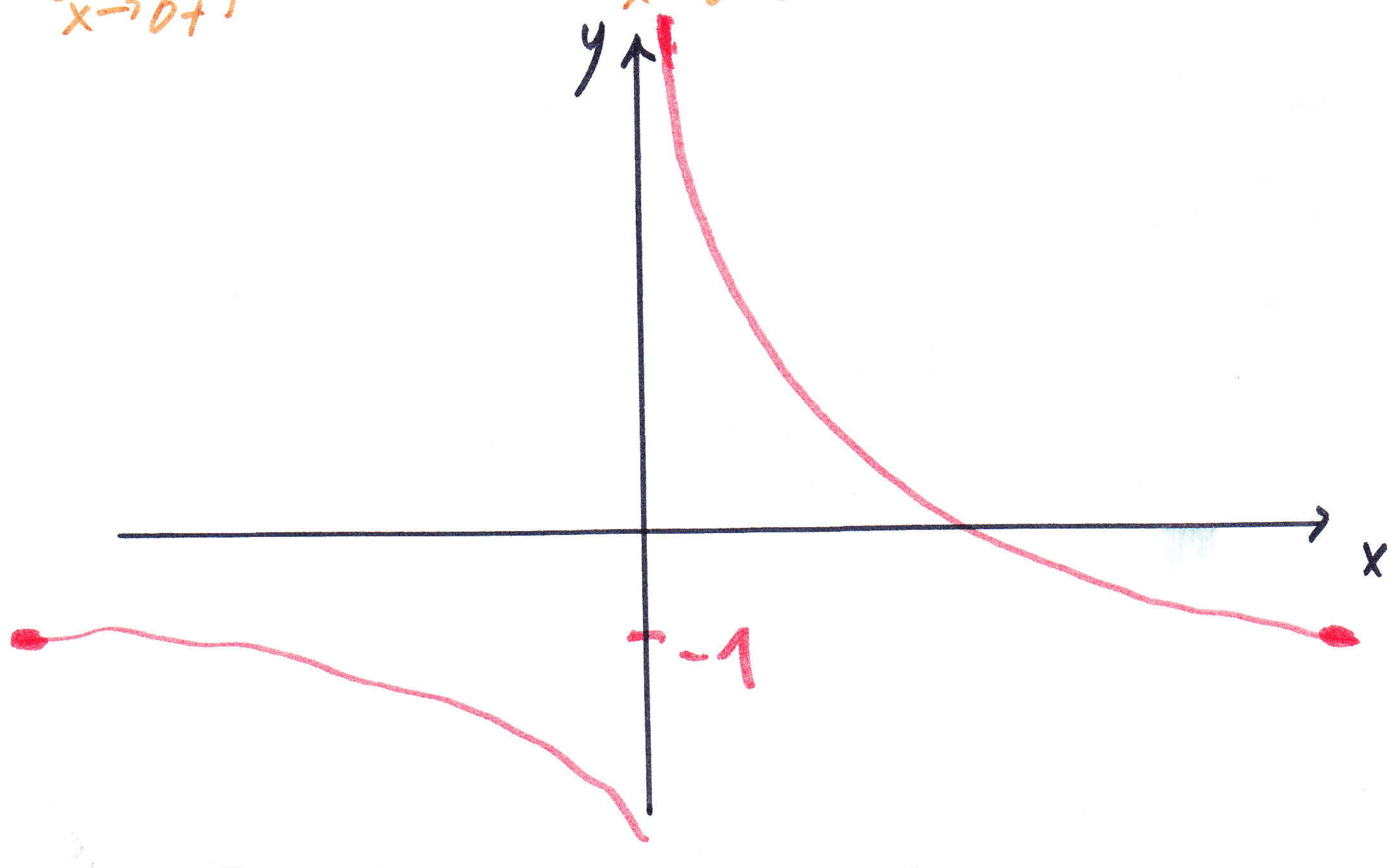
$x = e^{\ln x}$

$$= \text{„}e^{-\infty}\text{"} = \text{„}\frac{1}{e^{\infty}}\text{"} = 0$$

Př.: Načrtněte graf funkce $y = f(x)$, tak aby

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$$



Pozn.: U limit typu $0\cdot(\pm\infty)$, $\infty-\infty$, apod. se někdy funkce rozšíří vhodným výrazem na podílový tvar.

$(a-b)(a+b)$

Př.: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \left(\text{„}\infty-\infty\text{"}\right) =$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$= \text{„}\dfrac{1}{\infty}\text{"} = 0$

Př.: $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-2x}\cdot 3^{x} = \left(\text{„}0\cdot\infty\text{"}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x}{2^{2x}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x}{4^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^x = 0$

Jednostranné limity:

Řekneme, že $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zprava, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = a$, (kde $a\in\mathbb{R}^*$)

jestliže „pro $x>x_0$, $\underbrace{x \text{ blízko } x_0}$ platí $f(x) \doteq a$"

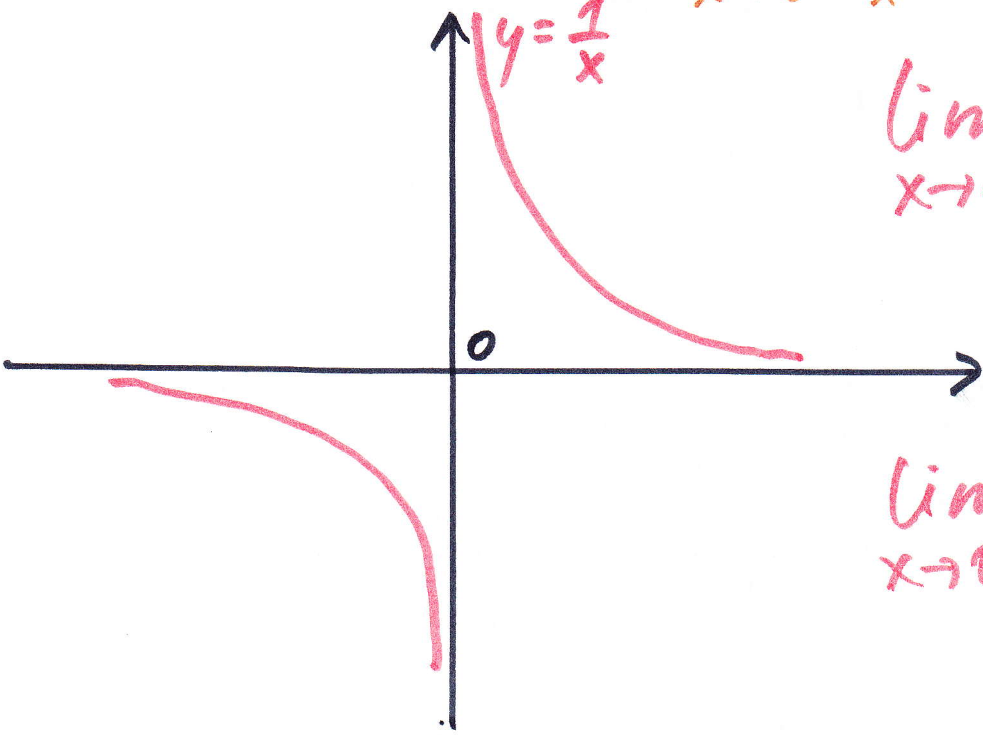
Analogicky limita zleva $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = a$

pokud „pro $x<x_0$, x blízko x_0: $f(x)\doteq a$"

Př.: $\lim\limits_{x\to 0}\log x$ neexistuje, neboť pro $x<0$ není logaritmus definován

Avšak $\lim\limits_{x\to 0+}\log x = -\infty$ ($\log 0{,}1 =$ $\log 0{,}01 =$ $\log 0{,}001 =$)

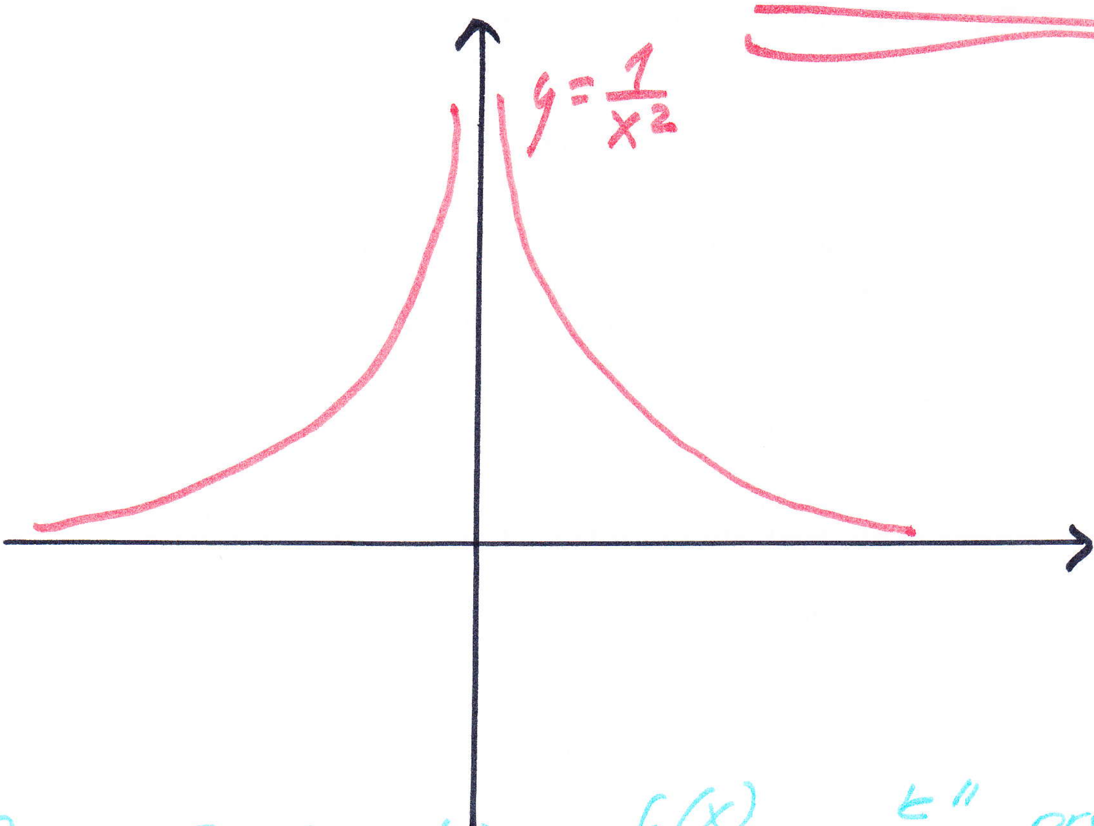
Př.: Určete limitu $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ NEEX



$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

Př.: Určete limitu $\underline{\underline{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty}}$



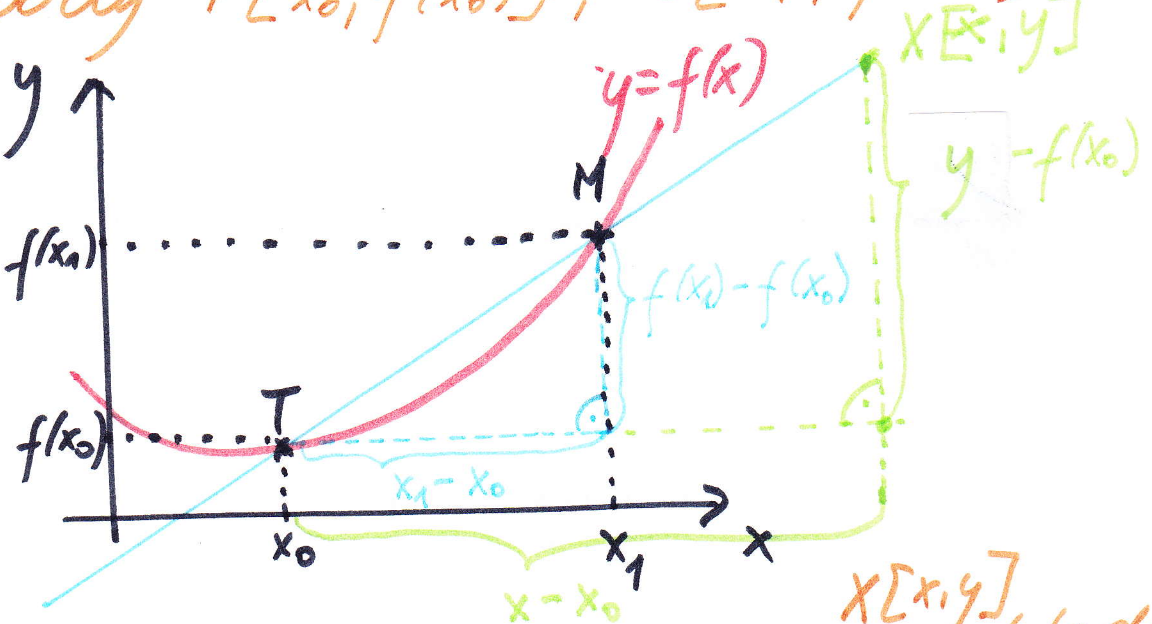
Pozn.: Je-li $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = „\frac{k}{0}“$ pro $x_0, k \in \mathbb{R}, k \neq 0$,
pak $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, pokud je $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ v okolí x_0

— " — $-\infty$ —— " —— $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ — " —

DERIVACE FUNKCE 1 PROMĚNNÉ

Zavedení pojmu derivace

Př.: Určete rovnici přímky procházející body $T[x_0, f(x_0)]$, $M[x_1, f(x_1)]$:



Řešení: Pro libovolný bod $X[x, y]$ na hledané přímce platí: $x \neq x_0 \Rightarrow$

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}} \qquad / \cdot (x - x_0)$$

(viz podobné trojúhelníky)

Tedy rovnice hledané přímky je

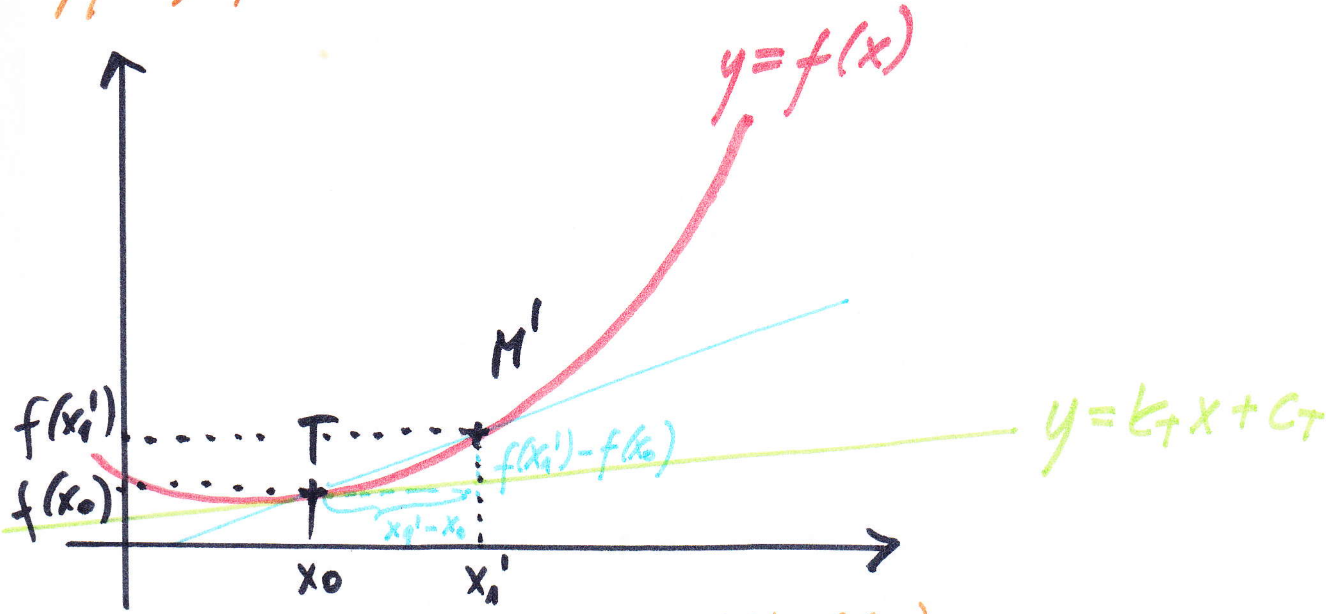
$$\boxed{y - f(x_0) = \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0)}$$

Pozn.: Červeně jsou znázorněny <u>proměnné</u>! hnědě <u>konstanty</u>!, jde tedy opravdu o lineární vztah - rovnici přímky.

Číslo $k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ nazýváme směrnicí nebo též směrový tangens přímky.

Přibliží-li se bod M k bodu T, bude sečná přímka přecházet v TEČNU ke grafu $y=f(x)$.

Př.: Určete směrnici přímky $\overleftrightarrow{MT}$, jestliže $M \to T$



Pro M' platí: $k' = \dfrac{f(x_1') - f(x_0)}{x_1' - x_0}$. Posuneme-li se ještě blíže bodu T dostaneme postupně:

$$\boxed{k_T = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

DERIVACE:

Jestliže pro funkci f a bod x_0 existuje číslo $\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$, nazýváme toto číslo **derivací** funkce $f(x)$ v bodě x_0.

(Pozn.: V případě $\lim_{x \to x_0^+}$ mluvíme o derivaci zprava, resp. $\lim_{x \to x_0^-}$ o derivaci zleva)

Př: Určete $f'(2)$, je-li $f(x) = x^2$

Řešení:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x \to 2}$$

$$=$$

Pozn.: ~~Je~~-li Vyjadřuje funkce nějakou závislost mezi ekonomickými veličinami, např. $y = f(Q)$ vyjadřující celkové náklady v závislosti na velikosti produkce, neboli $y = TC(Q)$, pak zderivovaná funkce vyjadřuje MARGINÁLNÍ (MEZNÍ) veličinu $y' = MC(Q)$. (okamžitý relativní přírůstek)

Pozn.: Pro $y = f(x)$ též píšeme $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ „PODÍL PŘÍRŮSTKŮ y a x"

DERIVACE JAKO FUNKCE

Má-li funkce $f(x)$ derivaci v každém bodě x_0 z intervalu $I \subseteq D_f$, pak můžeme každému $x_0 \in I$ přiřadit hodnotu $f'(x_0)$ a dostaneme tak funkci $f'(x)$.

Př.: Určete funkci $f'(x)$, je-li $f(x) = x^2$.

Řešení: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$

Dostali jsme funkci $f'(x) = 2x$

DERIVACE ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ

(Pro všechna x, kde jsou funkce definovány)

$(c)' = 0$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a \neq 1, a > 0$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(x^s)' = s \cdot x^{s-1}$, $s \in \mathbb{R}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

Př.: Určete derivaci funkce $y = \sqrt{x^7}$

Řešení: $y = x^{\frac{7}{2}} \Rightarrow y' = \frac{7}{2} \cdot x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2} \cdot x^{\frac{5}{2}} = \frac{7\sqrt{x^5}}{2}$

Př.: Určete derivaci funkce $y = \frac{1}{x^2}$

Řešení: $y = x^{-2} \Rightarrow y' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

PRAVIDLA PRO DERIVOVÁNÍ:

derivace součtu $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

rozdílu $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$

součinu $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

podílu $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

pro konstantu $c \in \mathbb{R}$: $(c.f(x))' = c.f'(x)$

Př.: $y = \sin x + 3.\cos x$

$y' =$

Př.: $y = x^3.\ln x$

$y' =$

Př.: $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

$y' =$

DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE $F(x)=f(\varphi(x))$

Má-li vnitřní složka $u=\varphi(x)$ derivaci v bodě x_0 a vnější složka $f(u)$ derivaci v bodě $u_0=\varphi(x_0)$, pak existuje $F'(x_0)$ a platí:

$$\boxed{F'(x_0)=\left(f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)\right)=f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)}$$

Př.: $F(x)=\sqrt{x^2+1}$ je složená funkce.

Vnitřní složka: $u=x^2+1$

Vnější složka: $f(u)=\sqrt{u}$ „$\frac{1}{2\sqrt{u}}$"

Platí: $u'=2x$

$f'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}$

$f'(u)=\frac{1}{2}\cdot u^{\frac{1}{2}-1}$

$=\frac{1}{2}\cdot u^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}}$

tedy $F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=$

$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in R$

Pomocí derivací lze řešit velmi rozsáhlou skupinu praktických úloh (např. výpočet složitých limit, hledání extrémů funkcí, vyšetřování průběhu funkce, přibližné výpočty, atd...)

Př.: Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)=e^{1-x}$ v bodě $T[1,1]$ $\left(f(1)=e^0=1\right)$

Řešení: Pro směrnici tečny k_T platí:

$k_T=f'(1)$. Určíme $f'(x)=$

tedy $f'(1)=$

Rovnice přímky se směrnicí k_T, jdoucí bodem $[1,0]$ je: $\boxed{y-f(1)=k_T(x-1)}\Rightarrow$

POUŽITÍ DERIVACÍ

1) L'HÔSPITALOVO PRAVIDLO

– počítání limit (typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$")

Věta 5.20: Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou takové funkce, že

- $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$

NEBO

- $\lim f(x) = \pm\infty$, $\lim g(x) = \pm\infty$.

Existuje-li limita $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$, pak existuje i $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$\boxed{\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha .}$$

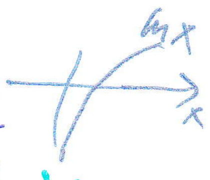
(Zde symbol lim může značit jakoukoliv limitu pro $x \to a \in \mathbb{R}^*$, případně i jednostrannou limitu pro $x \to a^+$ nebo $x \to a^-$).

Př.: Spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Řešení: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = „\frac{0}{0}" \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \underline{\underline{1}}$

$\sqrt{x} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$



Pozn.: Při výpočtu některých limit je nejprve nutné je převést do tvaru $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$

Př.: $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \ln x = „0\cdot(-\infty)" = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = „\frac{-\infty}{\infty}" =$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0+} -2x^{\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x\to 0+} -2\sqrt{x} = \underline{\underline{0}}$

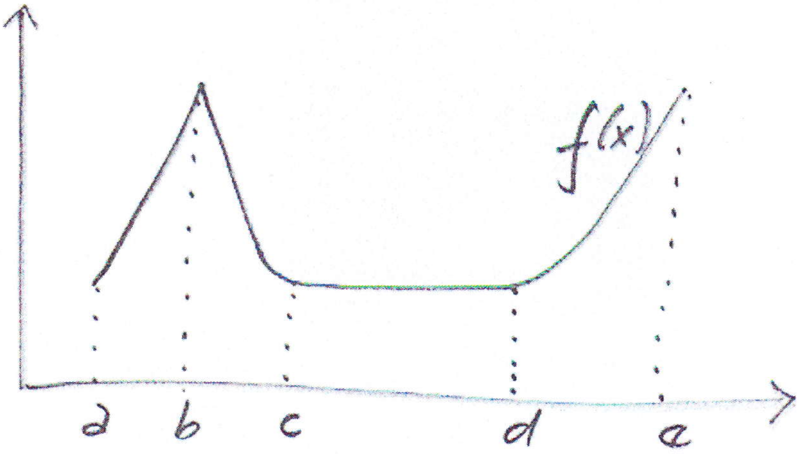
FUNKCE MONOTÓNNÍ NA INTERVALU

Def.: O funkci $f(x)$ řekneme, že je na intervalu I

- **rostoucí**, jestliže pro $\forall x_1, x_2 \in I$:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **klesající**, jestliže pro $\forall x_1, x_2 \in I$:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **neklesající**, jestliže pro $\forall x_1, x_2 \in I$:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **nerostoucí**, jestliže pro $\forall x_1, x_2 \in I$:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Pozn.: Všechny tyto funkce nazýváme společným názvem **MONOTÓNNÍ**. Rostoucí a klesající funkce se označují jako **RYZE MONOTÓNNÍ**.

Př.:



Funkce $f(x)$ je na: $\langle a,b\rangle$ rostoucí, $\langle b,c\rangle$ klesající, $\langle b,d\rangle$ nerostoucí, $\langle c,d\rangle$ neklesající, $\langle d,e\rangle$ rostoucí

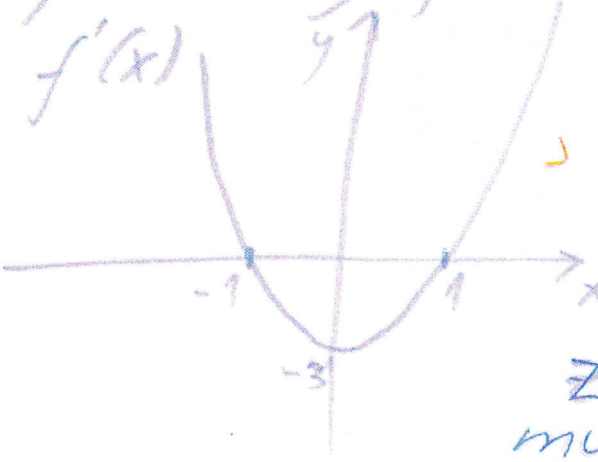
Věta 5.6.: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I a nechť zde má derivaci $f'(x)$. Pak:

- je-li $\underline{f'(x) > 0}$ pro $x \in I$, pak $f(x)$ je na intervalu I <u>rostoucí</u>
- $\forall x \in I: \underline{f'(x) < 0} \Rightarrow f(x)$ je na I <u>klesající</u>
- $\forall x \in I: \underline{f'(x) \geq 0} \Rightarrow f(x)$ je na I <u>neklesající</u>
- $\forall x \in I: \underline{f'(x) \leq 0} \Rightarrow f(x)$ je na I <u>nerostoucí</u>

Př.: Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Řešení: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

Nulovými body funkce $f'(x)$ jsou $-1, +1$:



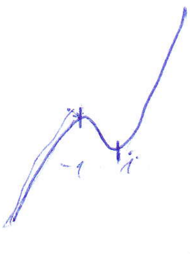
Pro $x \in (-1, 1)$ je $f'(x) < 0$

Pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ je $f'(x) > 0$;

Znaménko funkce $f'(x)$ můžeme vyznačit na ose:

f': + − +

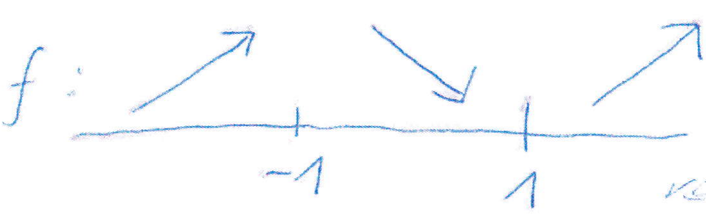
−1 1



Tedy funkce $f(x)$ je: rostoucí na: $(-\infty, -1)$

klesající na: $(-1, +1)$

rostoucí na: $(1, \infty)$



!

~~rostoucí na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$~~