DERIVACE ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ

(Pro všechna x, kde jsou funkce definovány)

$(c)' = 0$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \; n \in \mathbb{N}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \; a \neq 1, a > 0$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(x^s)' = s \cdot x^{s-1}, \; s \in \mathbb{R}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

Př.: Určete derivaci funkce $y = \sqrt{x^7}$

Řešení: $y = x^{\frac{7}{2}} \Rightarrow y' = \frac{7}{2} \cdot x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2} \cdot x^{\frac{5}{2}} = \frac{7\sqrt{x^5}}{2}$

Př.: Určete derivaci funkce $y = \frac{1}{x^2}$

Řešení: $y = x^{-2} \Rightarrow y' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

PRAVIDLA PRO DERIVOVÁNÍ:

derivace součtu $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

rozdílu $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$

součinu $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

podílu $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

pro konstantu $c \in \mathbb{R}$: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

Př.: $y = \sin x + 3 \cdot \cos x$

$y' =$

Př.: $y = x^3 \cdot \ln x$

$y' =$

Př.: $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

$y' =$

DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ:

Je-li $f'(x)$ definovaná na intervalu I a má-li na tomto intervalu derivaci, pak tuto derivaci značíme $f''(x)$ a nazýváme DRUHOU DERIVACÍ funkce $f(x)$. Podobně $f'''(x), f^{(4)}(x), \dots$ nazýváme souhrnně DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE $F(x)=f(\varphi(x))$

Má-li vnitřní složka $u=\varphi(x)$ derivaci v bodě x_0 a vnější složka $f(u)$ derivaci v bodě $u_0=\varphi(x_0)$, pak existuje $F'(x_0)$ a platí:

$$\boxed{F'(x_0)=\left(f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)\right)=f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)}$$

Př.: $F(x)=\sqrt{x^2+1}$ je složená funkce.

Vnitřní složka: $u=x^2+1$

Vnější složka: $f(u)=\sqrt{u}$

Platí: $u'=2x$

$f'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}$

tedy $F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=$

$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$

Pomocí derivací lze řešit velmi rozsáhlou skupinu praktických úloh (např. výpočet složitých limit, hledání extrémů funkcí, vyšetřování průběhu funkce, přibližné výpočty, atd...)

Př.: Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)=e^{1-x}$ v bodě $T[1,1]$ $\left(f(1)=e^0=1\right)$

Řešení: Pro směrnici tečny k_T platí:

$k_T=f'(1)$. Určíme $f'(x)=$

tedy $f'(1)=$

Rovnice přímky se směrnicí k_T, jdoucí bodem $[1,0]$ je: $\boxed{y-f(1)=k_T(x-1)}\Rightarrow$

POUŽITÍ DERIVACÍ

1, L'HÔSPITALOVO PRAVIDLO

– počítání limit (typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$")

Věta : Nechť $f(x), g(x)$ jsou takové funkce, že

- $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$

NEBO

- $\lim f(x) = \pm\infty, \lim g(x) = \pm\infty$.

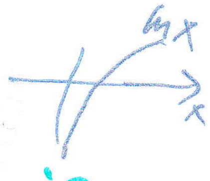
Existuje-li limita $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$, pak existuje i $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí :

$$\boxed{\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha .}$$

(Zde symbol lim může značit jakoukoliv limitu pro $x \to a \in \mathbb{R}^*$, případně i jednostrannou limitu pro $x \to a^+$ nebo $x \to a^-$).

Př.: spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Řešení: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = „\frac{0}{0}" \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} =$



$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \underline{\underline{1}}$

Pozn.: Při výpočtu některých limit je nejprve nutné je převést do tvaru $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$

Př.: $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \ln x = „0 \cdot (-\infty)" = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = „\frac{-\infty}{\infty}" =$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0+} -2x^{\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x\to 0+} -2\sqrt{x} = \underline{\underline{0}}$

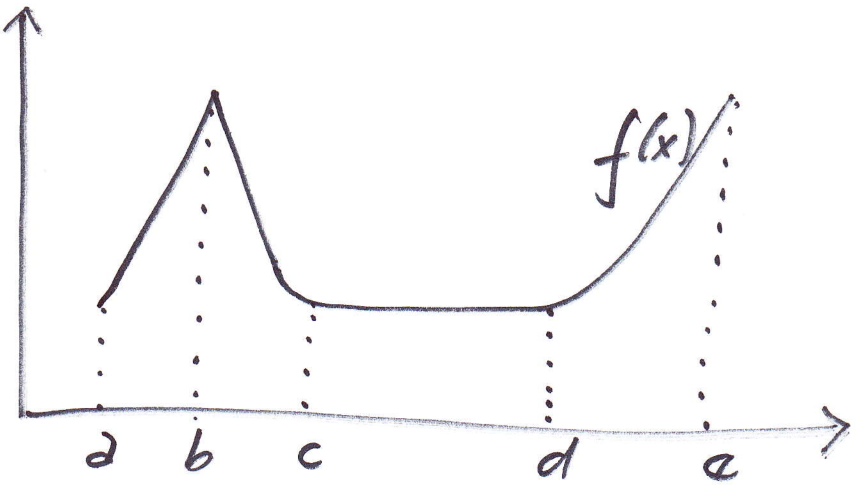
FUNKCE MONOTÓNNÍ NA INTERVALU

Def.: O funkci $f(x)$ řekneme, že je na intervalu I

- <u>rostoucí</u>, jestliže pro $\forall x_1, x_2 \in I$:
  $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- <u>klesající</u>, jestliže pro $\forall x_1, x_2 \in I$:
  $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
- <u>neklesající</u>, jestliže pro $\forall x_1, x_2 \in I$:
  $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
- <u>nerostoucí</u>, jestliže pro $\forall x_1, x_2 \in I$:
  $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Pozn.: Všechny tyto funkce nazýváme společným názvem <u>MONOTÓNNÍ</u>. Rostoucí a klesající funkce se označují jako <u>RYZE MONOTÓNNÍ</u>.

Př.:



Funkce $f(x)$ je na: $\langle a,b\rangle$ rostoucí, $\langle b,c\rangle$ klesající, $\langle b,d\rangle$ nerostoucí, $\langle c,d\rangle$ neklesající, $\langle d,e\rangle$ rostoucí

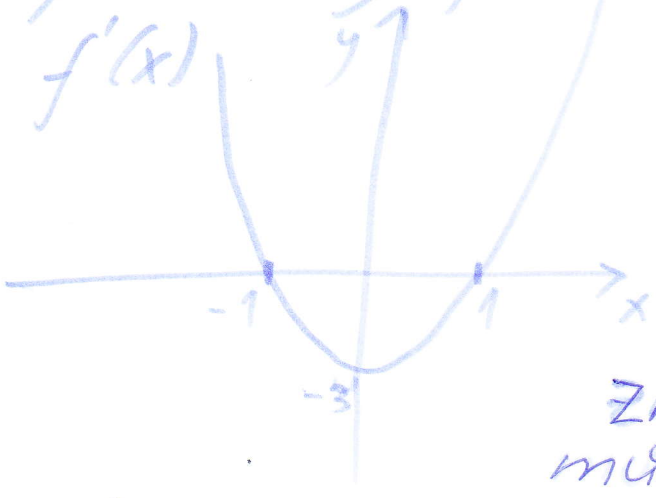
Věta: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I a nechť zde má derivaci $f'(x)$. Pak:

- je-li $\underline{f'(x) > 0}$ pro $x \in I$, pak $f(x)$ je na intervalu I <u>rostoucí</u>
- $\forall x \in I$: $\underline{f'(x) < 0} \Rightarrow f(x)$ je na I <u>klesající</u>
- $\forall x \in I$: $\underline{f'(x) \geq 0} \Rightarrow f(x)$ je na I <u>neklesající</u>
- $\forall x \in I$: $\underline{f'(x) \leq 0} \Rightarrow f(x)$ je na I <u>nerostoucí</u>

Př.: Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Řešení: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

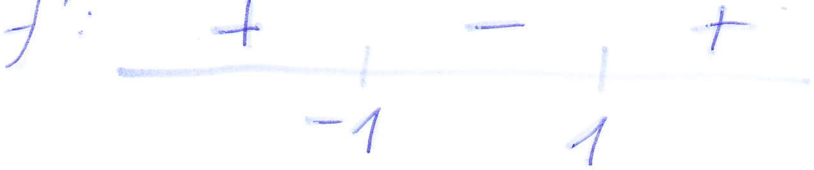
Nulovými body funkce $f'(x)$ jsou $-1, +1$:



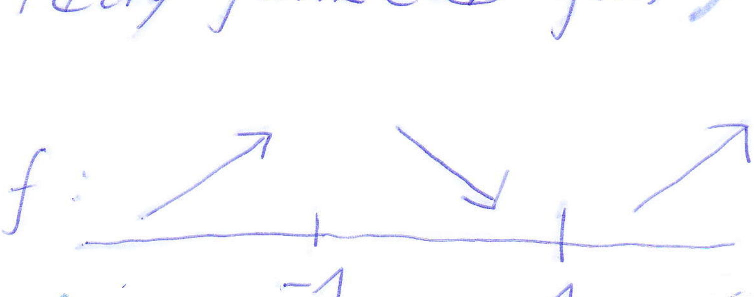
Pro $x \in (-1, 1)$ je $f'(x) < 0$

Pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ je $f'(x) > 0$;

Znaménko funkce $f'(x)$ můžeme vyznačit na ose:



Tedy funkce $f(x)$ je: rostoucí na: $(-\infty, -1)$
klesající na: $(-1, +1)$
rostoucí na: $(1, \infty)$



f Není rostoucí na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

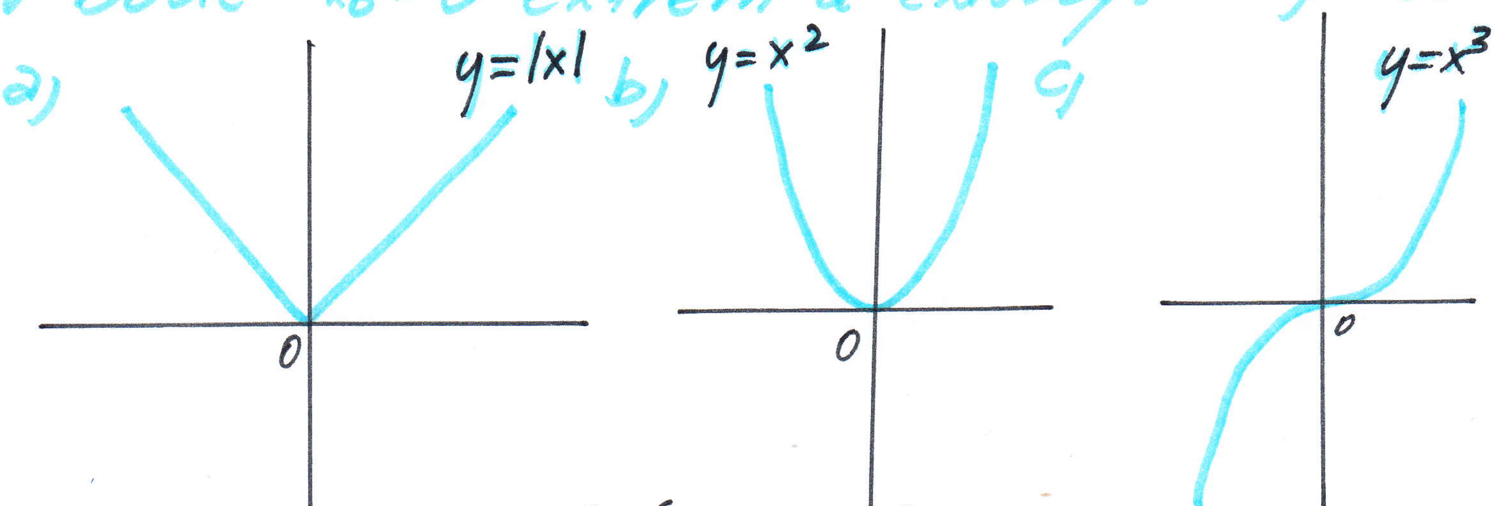
2) LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Def.: Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 <u>LOKÁLNÍ MINIMUM</u> (MAXIMUM), jestliže je definovaná v nějakém okolí bodu x_0 a platí-li pro všechna x z tohoto okolí $\boxed{f(x_0) \le f(x)}$ (resp. $f(x_0) \ge f(x)$)

Pozn.: Lokální minima a maxima souhrnně nazýváme lokální extrémy.

Věta: Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém. Pak existuje-li derivace v bodě x_0, platí: $\boxed{f'(x_0) = 0}$

Př.: Rozhodněte, zda má funkce na obr. v bodě $x_0 = 0$ extrém a existuje-li $f'(0)$.



Věta: EXISTENCE LOKÁLNÍHO EXTRÉMU

Nechť $f'(x_0) = 0$. Pak existuje-li $\delta > 0$:
$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0): f'(x) > 0 \wedge \forall x \in (x_0, x_0 + \delta): f'(x) < 0$
$\Rightarrow$ v bodě x_0 je LOKÁLNÍ MAXIMUM

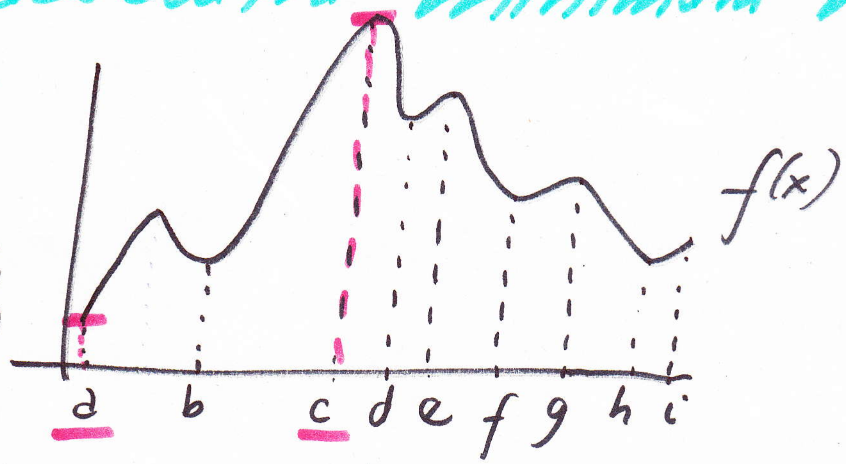
Je-li $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0): f'(x) < 0 \wedge \forall x \in (x_0, x_0 + \delta): f'(x) > 0$
$\Rightarrow$ v bodě x_0 je LOKÁLNÍ MINIMUM

ABSOLUTNÍ EXTRÉMY

Def.: Řekneme, že $f(x)$ má na množině M absolutní minimum (resp. maximum) v bodě $x_0 \in M$, jestliže $f(x)$ je definována na M a pro $\forall x \in M$: $f(x) \geq f(x_0)$.
(resp. $f(x) \leq f(x_0)$)

Pozn.: Podobně jako u lokálních extrémů můžeme také definovat ostré (či vlastní) absolutní minimum nebo maximum.

Př.:



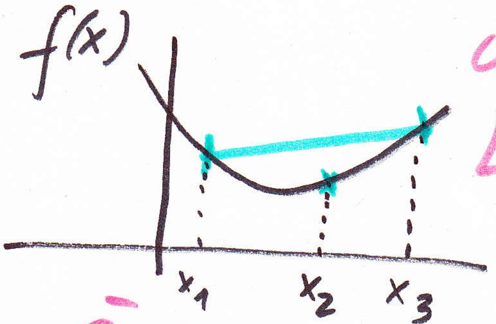
Je-li $M = \langle a, i \rangle$, pak funkce $f(x)$ má na M absolutní minimum v bodě a, absolutní maximum v bodě c, v ostatních vyznačených bodech jsou pouze lok. extrémy.

Věta (Weierstrassova)
Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom existují body $x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$ tak, že funkce $f(x)$ nabývá na $\langle a, b \rangle$ svého absolutního minima v x_0 a absolutního maxima v x_1. Body x_0, x_1 jsou buď krajními body $\langle a, b \rangle$ nebo body lokálních extrémů.

3) KONVEXITA A KONKÁVNOST FUNKCE

Def. : Řekneme, že funkce $f(x)$ je na intervalu I ryze <u>konvexní</u>, jestliže pro $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in I$:

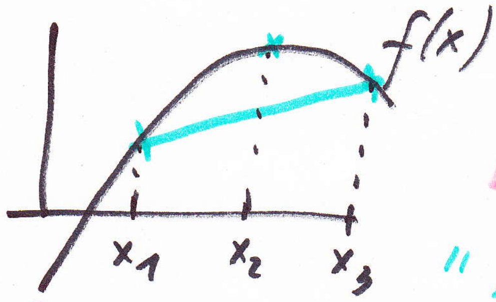
$x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$ bod $[x_2, f(x_2)]$ leží <u>**pod**</u> úsečkou spojující body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_3, f(x_3)]$



„graf je vypouklý směrem dolů"

Řekneme, že $f(x)$ je na I <u>ryze konkávní</u> jestliže pro $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in I$:

$x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$ bod $[x_2, f(x_2)]$ leží <u>nad</u> úsečkou spojující body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$.



„graf je vypouklý směrem nahoru"

Pozn.: Připustíme-li, aby bod $[x_2, f(x_2)]$ ležel i <u>na</u> úsečce $[x_1, f(x_1)]$, $[x_3, f(x_3)]$, pak vypouštíme z definice slůvko „ryze".

Věta : Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu I. Pak existuje-li $f''(x)$ na I a

- je-li $\underline{f''(x) \geq 0}$ pro $\forall x \in I$, je $f(x)$ <u>konvexní</u> na I,
- je-li $\underline{f''(x) \leq 0}$ pro $\forall x \in I$, je $f(x)$ <u>konkávní</u> na I.

Pozn.: Body, v nichž se mění konvexita a konkávnost funkce, budeme nazývat **INFLEXNÍ**. Přesné zavedení inflexního bodu je v def. 5.4.

Funkce $f(x)$ může mít inflexní bod pouze v bodech, v nichž existuje první derivace a druhá derivace buď neexistuje nebo je nulová.

Věta 5.15.: Nechť platí
$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$, a $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Je-li n sudé, pak funkce $f(x)$ má v x_0 inflexní bod.

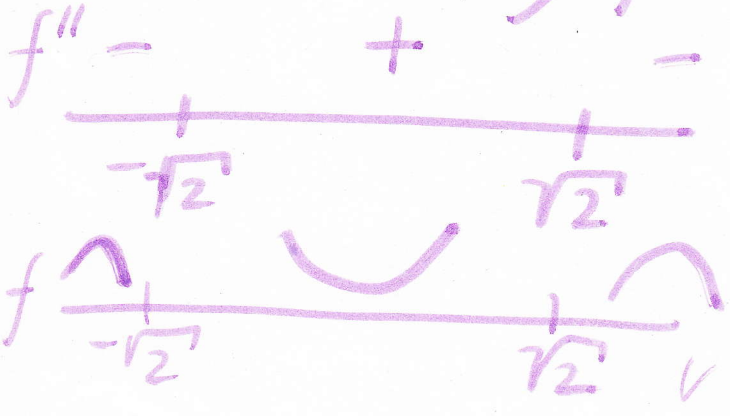
Př.: Určete intervaly konvexity a konkávnosti funkce $f(x) = \ln(x^2+2)$ a nalezněte inflexní body.

Řešení: určíme druhou derivaci:

$D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{x^2+2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+2}$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^2+2) - 2x \cdot (2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$$

Určíme znaménko funkce $f''(x)$:
nulové body $f''(x)$ jsou: $4 - 2x^2 = 0$
$x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$



, tedy f je konkávní na $(-\infty, -\sqrt{2})$, konvexní na $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a konkávní na $(\sqrt{2}, \infty)$.
V bodech $\pm\sqrt{2}$ jsou inflexní body

4) PRŮBĚH FUNKCE

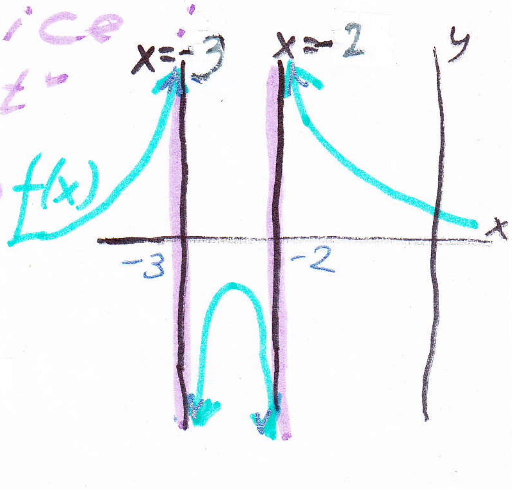
Při vyšetřování průběhu funkce $f(x)$ zjišťujeme:

- D_f, nulové body f, znaménko funkce (tj. kde leží graf nad osou x a kde pod osou x), zda je f sudá, lichá, či periodická.
- intervaly monotónnosti, extrémy
- kde je funkce konvexní, kde konkávní a kde jsou inflexní body.
- asymptoty a graf

Asymptoty jsou přímky, ke kterým se „blíží graf" funkce.

Def. Asymptotou bez směrnice funkce $y=f(x)$ nazýváme přímku $x=a$ $(a\in\mathbb{R})$, jestliže $\lim f(x)=\pm\infty$, přičemž výraz $\lim$ značí alespoň jeden ze symbolů $\lim\limits_{x\to a^+}$, $\lim\limits_{x\to a^-}$, $\lim\limits_{x\to a}$.

Př.: funkce $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}=\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$ má dvě asymptoty bez směrnice: $x=-2$ a $x=-3$, neboť



$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=$ a $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=$

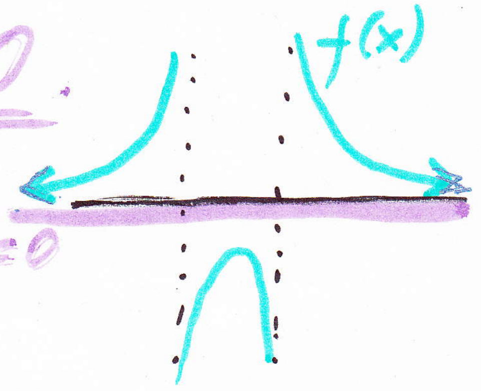
$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=$

Def. : Asymptotou funtce $y=f(x)$ v nevlastním bodě $+\infty$ (resp. $-\infty$) nazýváme přímku $y = Ax+B$, (kde $A,B \in \mathbb{R}$) jestliže $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (Ax+B)] = 0$.

(resp. $\lim_{x\to-\infty}$ —— " ——)

Př.: funtce z předchozího příkladu $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ má v nevlastních bodech $\pm\infty$ asymptotu $y=0$, neboť

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{(x+2)(x+3)} - 0\right) = \underline{\underline{0}}.$$



Pozn.: funtce nemusí mít žádné asymptoty, např. $f(x) = \sin x$

Věta :

Přímka $y = Ax+B$ je asymptotou grafu $f(x)$ v $\infty \Longleftrightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = A \ , \ B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax)}$

(v $-\infty$ $\Leftarrow$) $\lim_{x\to-\infty}$ —— " —— $\lim_{x\to-\infty}$ —— " ——)

Př.: Najděte asymptoty funtce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$

1) ABS : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\lim_{x\to0+} f(x) = +\infty$ ("$\frac{1}{+0}$"), $\lim_{x\to0-} f(x) = -\infty$

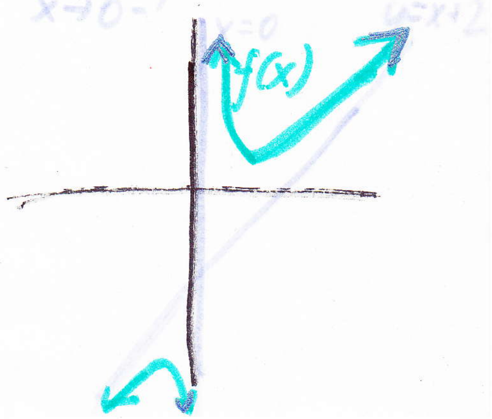
$\underline{\underline{x=0}}$

2) ASS (se směrnicí) :

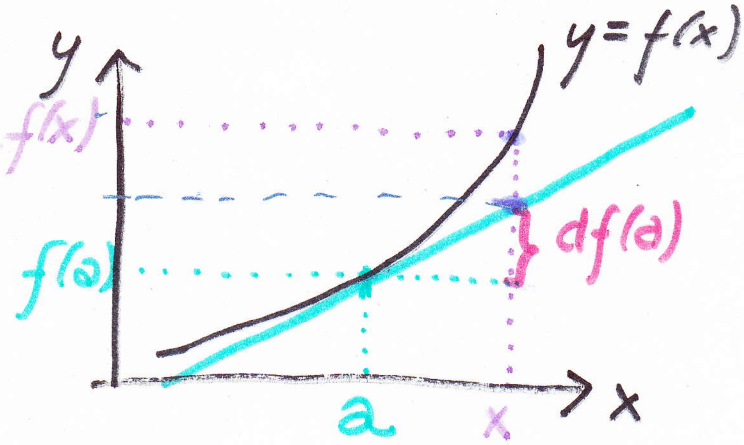
v $+\infty$: $A = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$ totéž v $-\infty$

$B = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x} = 2$

$\underline{\underline{y = x+2}}$



5) DIFERENCIÁL, TAYLORŮV POLYNOM



$t: y = f(a) + \underbrace{f'(a)\cdot(x-a)}_{df(a)}$

Nechť je dána funkce $f(x)$, která má v bodě a derivaci. Uvažujme tečnu t ke grafu $f(x)$ v bodě a.
V okolí bodu a je tečna t „blízko" grafu funkce f, tedy neznáme-li hodnotu $f(x)$ pro x blízko bodu a, můžeme ji přibližně odhadnout jako $f(x) \doteq f(a) + \underbrace{f'(a)\cdot(x-a)}_{df(a)}$

Výraz $df(a) := f'(a)\cdot(x-a)$ nazýváme diferenciálem funkce f v bodě a, píšeme $df(a) = f'(a)\cdot dx$ (jde o funkci se závislou proměnnou dx)

Př.: Určete diferenciál funkce $f(x)=\sqrt{x}$ v bodě $a=4$, odhadněte pomocí diferenciálu hodnotu $\sqrt{4,1}$.

Řešení: $\boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$; $f'(a) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, $\boxed{df(4) = \frac{1}{4}\cdot dx}$

pro x blízko a:

Platí $f(x) \doteq f(4) + df(4)$, tedy pro $x = 4,1$:

$$\sqrt{4,1} \doteq 2 + \frac{1}{4}\cdot dx = 2 + \frac{1}{4}\cdot 0,1 = \underline{\underline{2,025}}$$

$dx = x - a = 4,1 - 4 = 0,1$

Ještě „přesnější odhady" lze získat pomocí Taylorova polynomu:

Polynom $\underbrace{T_n(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)} + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$,

nazveme Taylorovým polynomem stupně n příslušným funkci $f(x)$ v bodě a.

Pozn.: V bodě a mají $f(x)$ a $T_n(x)$ stejnou funkční hodnotu a hodnotu všech derivací až do řádu n. Pro x „blízké bodu a" platí $\boxed{f(x) \doteq T_n(x)}$, přičemž chybu $R: f(x) - T_n(x)$ lze vyjádřit v různých tvarech.

Př.: Určete $T_3(x)$ pro funkci $f(x) = \ln x$ v bodě $a = 1$.

řešení: $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{+2}{x^3}$

$$T_3(x) = \underbrace{\ln 1}_{0} + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{-\frac{1}{1^2}}{2}(x-1)^2 + \frac{\frac{2}{1^3}}{6}(x-1)^3 =$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$

Pozn.: Nyní můžeme např. odhadnout $\ln(1{,}1)$:

- pomocí diferenciálu: $f(1{,}1) \doteq T_1(1{,}1) = (x-1) = 0{,}1$
- pomocí $T_2(x)$: $f(1{,}1) \doteq T_2(1{,}1) = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} = 0{,}1 + \frac{0{,}01}{2} = 0{,}105$
- pomocí $T_3(x)$: $f(1{,}1) \doteq (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} = 0{,}105 + \frac{0{,}001}{3} =$

$0{,}105\overline{3}$

NEURČITÝ INTEGRÁL

Def.: Primitivní funtce

Nechť $F(x)$, $f(x)$ jsou takové funtce na intervalu I, že v každém vnitřním bodě intervalu I platí: $\boxed{F'(x) = f(x)}$

(a platí $F'^{+}(a) = f(a)$, je-li a levým koncovým bodem intervalu I, resp. $F'^{-}(a) = f(a)$, je-li pravým koncovým bodem I)

Př.: Funtce $F(x) = x^3 - 4x^2 + 7x + 1$ je primitivní k funtci $f(x) = 3x^2 - 8x + 7$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Pozn.: Je-li funtce $F(x)$ na intervalu I primitivní k nějaké funtci $f(x)$, má tedy na I derivaci a tudíž je na I spojitá.

Pozn.: Existují funtce, ke kterým neexistuje funtce primitivní, avšak platí:

Věta: Je-li funtce $f(x)$ spojitá na I, pak k ní na intervalu I existuje primitivní funtce $F(x)$.

Je primitivní funtce k $f(x)$ na I určena jednoznačně?

Př. K funtci $f(x) = 3x^2 - 8x + 7$ z předchozího příkladu je primitivní na $(-\infty, \infty)$ též funtce $G(x) = x^3 - 4x^2 + 7x + 5$.

Pozn.: Jsou-li funkce $F(x)$, $G(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na I, pak existuje číslo c tak, že $\boxed{G(x) = F(x) + c}$,

neboť funkce $G(x) - F(x)$ je konstantní na I, její derivace $(G(x)-F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Def.: NEURČITÝ INTEGRÁL

Množinu všech primitivních funkcí k $f(x)$ na intervalu I nazýváme neurčitým integrálem $f(x)$ na I a označujeme symbolem $\boxed{\int f(x)dx}$. Píšeme:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c\,,\quad x \in I},$$

kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na I, dx je diferenciál neodvisle proměnné a c tzv. integrační konstanta.

Př.: Určete neurčité integrály

a) $\int \sin x\, dx$,

b) $\int x^3 dx$,

c) $\int e^{2x} dx$

Řešení: a) hledáme funkci $F(x) = ?$ tak, aby $F'(x) = \sin x$. Víme, že $(\cos x)' = -\sin x$, tedy

$$\boxed{\int \sin x\, dx = -\cos x + c},\quad x \in (-\infty, \infty)$$

b) Víme, že $(x^4)' = 4 . x^3$, tedy $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{4}{4}x^3$, a

$$\boxed{\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c},\quad x \in (-\infty, \infty)$$

c) Víme, že $(e^{2x})' = 2 . e^{2x}$, tedy $\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' = e^{2x}$, a

$$\boxed{\int e^{2x} dx = e^{2x}/2 + c}.\quad x \in (-\infty, \infty)$$

ZÁKLADNÍ NEURČITÉ INTEGRÁLY

$\int 0\,dx = c$, $x \in (-\infty, \infty)$

$\int e^x dx = e^x + c$, — " —

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$, — " —

$\int \cos x\, dx = \sin x + c$, — " —

$\int \frac{1\,dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$, — " —

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$, $x \in (-1,1)$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$,
- $x \in (-\infty, \infty)$ pro n celé, $n \geq 0$
- $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ pro $n \neq -1$ celé, $n < 0$
- $x \in (0, \infty)$, n necelé

$\int \frac{1\,dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in (0, \infty)$ nebo $x \in (-\infty, 0)$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$, v libovolném otevřeném intervalu, kde je $\cos x \neq 0$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c$, — " — $\sin x \neq 0$

Věta .: Integrace lineární kombinace funkcí
Nechť na intervalu I existují neurčité integrály funkcí $f_1(x), \dots, f_n(x)$. Pak pro libovolná čísla $c_1, \dots, c_n$ existuje neurčitý integrál funkce $c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)$ a platí:

$$\boxed{\int (c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x))\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + \dots + c_n \int f_n(x)\,dx}$$

METODA PER PARTES

Věta: Nechť funkce $u(x), v(x)$ mají na otevřeném intervalu I spojité derivace $u'(x), v'(x)$. Pak na I platí:

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$$

Př.: $\displaystyle\int x.\sin x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u'=\sin x & v=x \\ u=-\cos x & v'=1 \end{array}\right| =$

$= -x.\cos x + \displaystyle\int \cos x\,dx =$

$= -x.\cos x + \sin x + c$

Př.: $\displaystyle\int x^2.e^x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u'=e^x & v=x^2 \\ u=e^x & v'=2x \end{array}\right| =$

$= x^2.e^x - \displaystyle\int 2x.e^x\,dx =$

$= \left|\begin{array}{ll} u'=e^x & v=2x \\ u=e^x & v'=2 \end{array}\right| = x^2.e^x - \left(2x.e^x - \displaystyle\int 2e^x\,dx\right)$

$= x^2.e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$

Př.: $\displaystyle\int 1.\operatorname{arctg} x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u'=1 & v=\operatorname{arctg} x \\ u=x & v'=\dfrac{1}{1+x^2} \end{array}\right|$

$= x.\operatorname{arctg} x - \displaystyle\int x.\frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$= x.\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

(viz substituční metoda)

VÝPOČET NEURČITÉHO INTEGRÁLU SUBSTITUCÍ

Věta ⇒ I. výpočet integrálu substitucí

⇒ postup při výpočtu $\boxed{\int f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt}$:

- zvolíme substituci $x = \varphi(t)$
- vypočítáme $\boxed{dx = \varphi'(t)dt}$
- do integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\boxed{\int f(x)dx}$.
- najdeme $F(x) = \int f(x)dx$
- určíme interval I, na kterém platí $[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t)).\varphi'(t)$ ⇒

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c,\ t \in I}.$$

Př.: Vypočítejte a) $\int \sin 2x\, dx$

b) $\int e^{3x+1} dx$

c) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

Řešení: a) $\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x) . 2dx = \left| \begin{matrix} \text{subst. } u = 2x \\ du = 2dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \sin u\, du = \underline{\frac{1}{2}(-\cos 2x) + c}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1} . 3dx = \left| \begin{matrix} \text{subst. } u = 3x+1 \\ du = 3dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int e^u du = \underline{\underline{\frac{1}{3}e^{3x+1} + c}}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} . 2x dx = \left| \begin{matrix} \text{subst. } u = x^2+1 \\ du = 2x dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c}}$, $x \in \mathbb{R}$

Pozn.: $\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \ln|\varphi(t)|,\ t \in I : \varphi(t) \neq 0$

Věta $\Rightarrow$ II. výpočet integrálu substitucí

$\Rightarrow$ postup při výpočtu $\boxed{\int f(x)\,dx}$:

- zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby ex. $\varphi^{-1}(x)$.
- vypočítáme $dx = \varphi'(t)\,dt$ a dosadíme do integrálu, dostaneme $\boxed{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$
- najdeme $G(t) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$
- dosadíme za $t = \varphi^{-1}(x)$ a dostaneme $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$.
- zkontrolujeme, zda $F'(x) = f(x)$ a určíme interval I, na němž $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$.

Př.: Vypočítejte a) $\int \frac{1}{x^2+2}\,dx$

b) $\int (\ln x)^2\,dt$

Řešení: a) $\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst. } x = \sqrt{2}\,t \\ dx = \sqrt{2}\,dt \end{array} \right| =$

$= \int \frac{1}{2t^2+2}\sqrt{2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\, t + c =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c,\ x \in \mathbb{R}$

b) $\int (\ln x)^2\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst. } x = e^t \\ dx = e^t\,dt \end{array} \right| = \int t^2 \cdot e^t\,dt =$

$= \left| \begin{array}{ll} \text{P.P. } u' = e^t & v = t^2 \\ u = e^t & v' = 2t \end{array} \right| = t^2 e^t - \int 2te^t\,dt =$

$= \left| \begin{array}{ll} \text{P.P. } u' = e^t & v = 2t \\ u = e^t & v' = 2 \end{array} \right| = t^2 e^t - \left(2te^t - \int 2e^t\,dt\right) =$

$= e^t(t^2 - 2t + 2) + c = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + c,\ x > 0$