. . . .
Jméno studenta (hůlkovým písmem)

. . . .
podpis a datum odevzdání

Práce opravovaná tutorem, lineární algebra

Termín a způsob odevzdání určí tutor.

Práce může být napsaná ručně, avšak se slušnou úpravou, musí být podepsaná a listy musí být pevně spojeny. Součástí odevzdané práce musí být toto zadání, doplněné o uvedené údaje. Pořiďte si kopii své práce. Tuto kopii si musíte vzít ke zkoušce i k případnému jejímu opakování.

Příklad 1. Vypočítejte matici

$$\mathbf{A} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 3 & -7 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad 2. Napište matici soustavy a matici rozšířenou systému rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -12 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \\ & & 3x_2 & - & 7x_3 & = & 8 \end{array}$$

Tento systém lineárních rovnic zapište v maticové notaci.

Příklad 3. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{63}{253} & \frac{30}{253} & -\frac{50}{253} & \frac{4}{23} \\ -\frac{53}{253} & \frac{35}{253} & \frac{26}{253} & -\frac{3}{23} \\ \frac{76}{253} & -\frac{12}{253} & \frac{20}{253} & \frac{3}{23} \\ -\frac{19}{253} & \frac{3}{253} & -\frac{5}{253} & \frac{5}{23} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

a) Dokažte, že matice **B** je inverzní k matici **A**

b) Užitím inverzní matice k matici **A** řešte systém rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Příklad 4. Zjistěte maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve skupině vektorů

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 1 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

K výpočtu použijte převod matice, jejíž řádky jsou vektory transponované k daným vektorům, na schodovitou matici.

Příklad 5. Určete p tak, aby vektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ p \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

byly na sebe kolmé. Určete jejich normy pro vypočítané p.

Příklad 6. Nech≫ $M = \{(1,0,2),\ (2,1,0),\ (4,1,4)\}$. Označme vektorový podprostor prostoru $_3$ generovaný množinou M. Určete nějakou jeho bázi. Patří vektor $(3,1,1)$ do tohoto podprostoru?

Příklad 7. Je dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 8 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 7 \\ 2x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda má tato soustava žádné, právě jedno nebo nekonečně mnoho řešení. Zdůvodněte.

Příklad 8. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Jordanovy metody najděte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad 9. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -5 \\ -2 & 3 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 7 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete hodnotu determinantu $det(\mathbf{A})$.

a) Užitím elementárních transformací

b) Rozvojem podle vhodného sloupce nebo řádku

Příklad 10. Najděte všechna řešení homogenního systému s maticí soustavy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & 2 & -1 \\ -2 & -17 & 1 & -16 & 4 \\ 3 & 25 & -6 & 25 & 0 \\ 1 & 10 & 13 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 11. Je dán systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Řešte systém Gaussovou metodou.