

Trendy s konstantními parametry

Obecně lze trendové funkce lze rozdělit v podstatě do dvou skupin:

A. trendy lineární v parametrech (a nelineární pouze v proměnných)

V tomto případě lze trendovou složku psát ve tvaru **funkce lineární v parametrech**

$$(1) \quad Tr=y_i = \beta_0 + \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t) + \beta_3 f_3(t) \dots + \beta_k f_k(t)$$

tzv. ve tvaru **lineárně-aditivního schématu** případně

$$(2) \quad Tr=g(y) = \beta_0 + \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t) + \beta_3 f_3(t) \dots + \beta_k f_k(t) + \varepsilon$$

Vztah (2) se nazývá tvar **lineární v parametrech** po transformaci vysvětlované proměnné nebo také (podle W.Eichhorna) **zobecněná kvazilineární funkce**.¹

Výpočet parametrů trendových funkcí lineárních v parametrech (1) nečiní problém a provádí se **prostou metodou nejmenších čtverců MNČ/OLS**. Protože všechny vysvětlující proměnné jsou nestochastické, je situace s respektováním podmínek **standardního lineárního regresního modelu** usnadněna:

a) Přítomnost jedničkového vektoru zajišťuje nulovou střední hodnotu náhodných složek ε_i . (Konstantu β_0 lze interpretovat jako výchozí úroveň ukazatele v čase 0)

b) Je automaticky zajištěna **nestochastičnost** všech vysvětlujících proměnných (jde zpravidla o jednoduché transformace trendu). Není proto třeba ověřovat pro *konzistenci odhadové funkce* nutnou podmínku $E(\varepsilon_j, \varepsilon) = 0$, protože ta je zde splněna vždy.

c) V „matici plánu“, $[t, f_1(t), \dots, f_k(t)]$ se nemohou vyskytnout přesné lineární závislosti mezi „vysvětlujícími“, proměnnými (takže nemůže vzniknout **problém multikolinearity**)². Pokud navíc nevolíme funkce f_j příliš „blízké“ (např. $t^{7/8}$ a $t^{8/9}$), nehrozí ani **multikolinearita přibližná**.

V obou předchozích případech přijímáme aditivní připojení náhodné složky ε_i , takže stochastický/regresní tvar trendové (1) funkce je tedy

$$(1St) \quad y_i = \beta_0 + \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t) + \beta_3 f_3(t) \dots + \beta_k f_k(t) + \varepsilon_i \text{ a obdobně}$$

Stochastický/regresní tvar trendové (2) závislosti je

$$(2St) \quad g(y) = \beta_0 + \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t) + \beta_3 f_3(t) \dots + \beta_k f_k(t) + \varepsilon_i.$$

¹ **Kvazilineární funkce** může být zapsána schématem

$$H(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n) = g^{-1}(a + b_1 g(x_1) + \dots + b_n g(x_n)), \quad \text{kde}$$

g je spojitá monotónní funkce a dále a, b_1, \dots, b_n jsou vhodné konstanty (a nenulové).

Zobecněnou kvazilineární funkci H lze zapsat ve tvaru:

$$H(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n) = H(f_1(x_1), \dots, f_s(x_s), \dots, f_n(x_n)), \quad \text{kde}$$

f_1, \dots, f_n jsou vesměs spojitě a ryze monotónní funkce. Oproti **kvazilineární** funkci se nevyžaduje symetrie vnitřních funkcí $g_i, i=1, \dots, n$ vůči jednotlivým argumentům.

² S přirozenou podmínkou, že funkce $f_1(t), \dots, f_k(t)$ jsou vzájemně různé.

Standardní OLS-kritérium pro výpočet trendových parametrů má tvar

pro případ (1St)
$$\text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n [y_t - \hat{y}_t]^2 = \text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n \left[y_t - \sum_{j=1}^k \beta_j f_j(t) \right]^2$$
 přes $\beta/\beta \cdot f_k$, ale

pro případ (2St)
$$\text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n [g(y_t) - g(\hat{y}_t)]^2 = \text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n \left[g(y_t) - g \left(\sum_{j=1}^k \beta_j f_j(t) \right) \right]^2$$

V jednom i ve druhém případě lze užít *prostou metodou nejmenších čtverců MNČ/OLS* bez korekcí, avšak za uvědomění stojí, že v případě (4) OLS-kritérium neminimalizuje rozdíl prostých, nýbrž transformovaných (funkcí g) pozorovaných y_t a vyrovnaných \hat{y}_t hodnot časové řady.³

B. trendy nelineární v parametrech (případně nelineární i v proměnných).

V tomto obecném případě lze trendovou funkci psát ve tvaru

(3)
$$Tt=y_t = h(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k, f_1(t), f_2(t), \dots, f_r(t))$$

případně ještě obecněji

(4)
$$Tt=g(y_t) = h(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k, t).$$

Odpovídající stochastická specifikace tvar trendové (3) funkce je následně

(3St)
$$y_t = h(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k, f_1(t), f_2(t), \dots, f_r(t)) + \varepsilon_t$$
 a obdobně

Stochastický/regresní tvar trendové (4) závislosti je pak

(4St)
$$Tt=g(y_t) = h(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k, t) + \varepsilon_t.$$

V tomto případě již nelze k výpočtu parametrů (tzn. k jejich konzistentnímu odhadu) použít standardní *OLS-odhadovou funkci*. K minimalizaci výrazu (4) je zapotřebí (s výjimkou ojedinělých příznivých podob nelinearity) uplatnit některou z metod nelineární optimalizace, jako je *NLLS (nelineární metoda nejmenších čtverců)* nebo *NLLAD (nelineární metoda nejmenších absolutních odchylek)* s kritérii

pro specifikaci (4St) a *NLLS*

$$\text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = \text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n [y_t - \hat{y}_t]^2 = \text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n [y_t - \hat{h}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, t)]^2$$
 přes $\beta/\beta \cdot f_k$

resp. pro specifikaci (4St) a *NLLAD*

$$\text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n |\varepsilon_t| = \text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_t| = \text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n |y_t - \hat{h}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, t)|$$
 přes $\beta/\beta \cdot f_k$

Poznámka: Vůbec nejobecnější myslitelný tvar trendové nelineární specifikace je

(4St)
$$G(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k, t, \varepsilon_t) = 0.$$

Ten je však natolik neurčitý a výpočetně problematický, že se neuzívá.

³ Odhady parametrů získané pomocí jednoho a druhého kritéria tedy nebudou obecně shodné.

Je patrné, že **konzistentní odhad trendových parametrů dostaneme** v prvním případě nasazením **prosté metody nejmenších čtverců OLS**, zatímco ve druhém je nutné uplatnit **nelineární prostou metodu nejmenších čtverců NLLS**.

Alternativním postupem **pro výpočet trendových parametrů** může dále být např. **metoda nejmenších absolutních odchylek LAD**, jejíž minimalizační kritérium je

pro případ (3)
$$\text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_t| = \text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n \left| y_t - \sum_{j=1}^k \beta_j f_j(t) \right|$$

pro případ (4)
$$\text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n |g(y_t) - g(\hat{y}_t)| = \text{Min}_{\beta} \sum_{t=1}^n \left| g(y_t) - g\left(\sum_{j=1}^k \beta_j f_j(t) \right) \right|$$

Nejpoužívanější matematické funkce při trendovém vyrovnání/extrapolaci

1. Lineární trend
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

indikace přítomnosti: první diference $y_{t+1} - y_t$ jsou přibližně konstantní

2. Kvadratický trend
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$$

indikace přítomnosti: druhé diference $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$ jsou zhruba konstantní

3. Kubický trend
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

indikace přítomnosti: třetí diference $y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t$ jsou zhruba konstantní

3. Polynomický trend s-tého stupně ~~$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_s t^s$$~~

indikace přítomnosti: diference s-tého stupně jsou přibližně konstantní

4. Mocninný trend
$$y_t = \beta_0 t^{\beta_1}$$

indikace přítomnosti:

5a Logaritmický trend
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \ln(t)$$

indikace přítomnosti:

5. Exponenciální trend
$$y_t = \alpha t^{\beta} \quad [\alpha > 0, \text{zpravidla } \beta > 1]$$

indikace přítomnosti: podíly sousedních hodnot y_{t+1}/y_t resp. první diference logaritmů $\ln y_{t+1} - \ln y_t$ jsou přibližně konstantní.

6. Modifikovaný exponenciální trend
$$y_t = \gamma + \alpha t^{\beta}$$

indikace přítomnosti: podíly sousedních prvních diferencí $(y_{t+2} - y_{t+1}) / (y_{t+1} - y_t)$ jsou přibližně konstantní

7. Logistický trend
$$y_t = \frac{\gamma}{1 + \alpha \beta^t}$$
 s parametry $\beta > 0, \gamma > 0$

indikace přítomnosti: a) histogram prvních diferencí $y_{t+1} - y_t$ je tvarem podobná křivce (hustotě) normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$.

b) podíly sousedních prvních diferencí reciprokových hodnot

$(1/y_{t+2} - 1/y_{t+1}) / (1/y_{t+1} - 1/y_t)$ jsou přibližně konstantní.

Inflexní bod logistické křivky je v bodě $t^* = -\frac{\ln(\alpha)}{\ln(\beta)}$

8. Gompertzův trend $\ln(y_t) = \gamma + \alpha\beta^t$ nebo ekvivalentně $y_t = \exp(\gamma + \alpha\beta^t)$ [$\beta > 1$]

indikace přítomnosti: podíly prvních logaritmovaných diferencí $(\ln y_{t+2} - \ln y_{t+1}) / (\ln y_{t+1} - \ln y_t)$ jsou přibližně konstantní

Inflexní bod má Gompertzova křivka v bodě $t^* = -\frac{\ln(\alpha)}{\ln(\beta)}$

4a. Odmocninný trend

$$y = \beta + \alpha t^p$$

indikace přítomnosti:

4b. Hyperbolický trend

$$y = \beta + \frac{\alpha}{t^p}$$

1A) výpočet parametrů lineárního trendu $y_t = \beta_0 + \beta_1 t$

Pro jejich určení lze nejnázorněji uplatnit výraz pro **OLS-minimalizační kritérium** z výchozí regresní specifikace (3)

$$(21) \quad \text{Min}_{\beta_0, \beta_1} \sum_{t=1}^n [y_t - \hat{y}_t]^2 = \text{Min}_{\beta_0, \beta_1} \left[y_t - \sum_{j=1}^2 \beta_j f_j(t) \right]^2, \text{ kde konkretizované na}$$

$$\text{Min}_{\beta_0, \beta_1} \sum_{t=1}^n [y_t - \hat{y}_t]^2 = \text{Min}_{\beta_0, \beta_1} \sum_{t=1}^n [y_t - \beta_0 - \beta_1 t]^2 .$$

a) Uplatněním standardního postupu – derivováním (21) podle obou neznámých parametrů dostaneme soustavu dvou nutných podmínek extrému

$$(22A,B) \quad 2 \sum_{t=1}^n [y_t - \beta_0 - \beta_1 t](-1) = 0, \text{ resp. } 2 \sum_{t=1}^n [y_t - \beta_0 - \beta_1 t](-t) = 0$$

a po očividných úpravách

$$(23A,B) \quad \sum_{t=1}^n [y_t - \beta_0 - \beta_1 t] = 0, \text{ resp. } \sum_{t=1}^n [y_t - \beta_0 - \beta_1 t]t = 0 \text{ neboli}$$

$$\sum_{t=1}^n y_t - \beta_0 n - \beta_1 \sum_{t=1}^n t = 0, \text{ resp. } \sum_{t=1}^n ty_t - \beta_0 \sum_{t=1}^n t - \beta_1 \sum_{t=1}^n t^2 = 0$$

Přeskupením výrazů na obou stranách dospějeme k soustavě **normálních rovnic** pro odhadnuté parametry β_0, β_1 - zde značené b_0, b_1 - ve tvaru

$$(24A) \quad b_0 n + b_1 \sum_{t=1}^n t = \sum_{t=1}^n y_t$$

$$(24B) \quad b_0 \sum_{t=1}^n t + b_1 \sum_{t=1}^n t^2 = \sum_{t=1}^n ty_t, \text{ jejímž řešením je dvojice}$$

$$(25A,B) \quad b_0 = \frac{\sum_{t=1}^n t^2 \cdot \sum_{t=1}^n y_t - \sum_{t=1}^n t \cdot \sum_{t=1}^n ty_t}{n \sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t \right)^2} \quad b_1 = \frac{n \sum_{t=1}^n ty_t - \sum_{t=1}^n t \cdot \sum_{t=1}^n y_t}{n \sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t \right)^2}$$

Po úpravách součtových výrazů $\sum_{t=1}^n t = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{t=1}^n t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ a vydělením čitatele i jmenovatel n dostaneme pro b_1

$$(26) \quad b_1 = \frac{\sum_{t=1}^n ty_t - \frac{(n+1)}{2} \cdot \sum_{t=1}^n y_t}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{4}} = \frac{\sum_{t=1}^n ty_t - \frac{(n+1)}{2} \cdot \sum_{t=1}^n y_t}{\frac{n(n+1)[4n+2-3(n+1)]}{12}} = \frac{\sum_{t=1}^n ty_t - \frac{(n+1)}{2} \cdot \sum_{t=1}^n y_t}{\frac{n(n^2-1)}{12}}$$

a následně pro b_0 $b_0 = y - b_1 t = y - \frac{n+1}{2} b_1$

b) Ke stejným výrazům dospějeme aplikací standardního vzorce pro **OLS-odhady parametrů**, tedy $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$, pokud v něm konkretizujeme matici X jako

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{pmatrix}. \text{ Potom máme } \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^n t \\ \sum_{t=1}^n t & \sum_{t=1}^n t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n y_t \\ \sum_{t=1}^n ty_t \end{pmatrix}$$

$$\text{Zřejmě máme } (XX)^{-1} = \frac{1}{n \sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n t^2 & -\sum_{t=1}^n t \\ -\sum_{t=1}^n t & n \end{pmatrix}, \quad Xy = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n y_t \\ \sum_{t=1}^n ty_t \end{pmatrix}.$$

Výpočtem (řešením pro neznámé b_0, b_1) dostaneme dvojici odhadů (25A,B). Že jde skutečně o minimum, se snadno přesvědčíme stejně snadno jako v případě minimalizace pro lineární regresní model.

Předpověď budoucí hodnoty y_t má tvar

$$(27) \quad y_t^* = b_0 + b_1 t.$$

Příslušný $1 - \alpha$ procentní předpovědní interval (při neznalosti σ_e) je

$$(28) \quad \left(\hat{y}_t - t_{1-p/2} \sqrt{f_t} S_e; \hat{y}_t + t_{1-p/2} \sqrt{f_t} S_e \right), \text{ kde}$$

\hat{y}_t je vyrovnaná hodnota závisle proměnné

$n-2$ je počet stupňů volnosti (rozdíl mezi počtem pozorování a počtem trendových parametrů)

$t_{1-p/2}$ je $1-p/2$ (.100) % kvantil Studentova t-rozdělení o $n-3$ stupních volnosti

f_t je hodnota: $f_t = \sqrt{1 + (1, t)(XX)^{-1}(1, t)}$, přičemž

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{pmatrix} \text{ je matice nestochastických „regresorů“}.$$

S ohledem na specifický výraz pro momentovou matici v daném případě

$$(XX)^{-1} = \frac{1}{\frac{(n+1)(n+1)}{12} - \frac{n^2(n+1)^2}{4}} \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)(n+1)}{12} & -\frac{n(n+1)}{2} \\ -\frac{n(n+1)}{2} & n \end{pmatrix}$$

dostaneme (29)

$$f_t = \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(T - \frac{n+1}{2}\right)^2}{\frac{n(n^2-1)}{12}}}$$

S_e je směrodatná odchylka reziduí (rozdílu mezi pozorovanými a vyrovnanými

hodnotami časové řady) (30)

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n y_t^2 - \sum_{t=1}^n \hat{y}_t^2}{n-2}}.$$

1B) výpočet parametrů kvadratického trendu $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$

Aplikace standardního vzorce pro OLS ~~vede k výrazům~~ vede k výrazům

$$(31) \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^T t & \sum_{t=1}^T t^2 \\ \sum_{t=1}^T t & \sum_{t=1}^T t^2 & \sum_{t=1}^T t^3 \\ \sum_{t=1}^T t^2 & \sum_{t=1}^T t^3 & \sum_{t=1}^T t^4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T y_t \\ \sum_{t=1}^T t y_t \\ \sum_{t=1}^T t^2 y_t \end{pmatrix}$$

Odtud vyplývá soustava normálních rovnic ve tvaru

$$(32A,B,C) \begin{aligned} b_0 n + b_1 \sum t + b_2 \sum t^2 &= \sum y_t \\ b_0 \sum t + b_1 \sum t^2 + b_2 \sum t^3 &= \sum t y_t \\ b_0 \sum t^2 + b_1 \sum t^3 + b_2 \sum t^4 &= \sum t^2 y_t \end{aligned}$$

Někdy je výhodné pracovat s vyjádřením trendu ve tvaru

$$(33) \begin{aligned} & \text{ ~~} y_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \text{ , kde } t = \frac{t - T/2}{T/2} \text{ , kde } \\ & \text{ ~~} y_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \text{ , kde } t = \frac{t - T/2}{T/2} \text{ , kde } \end{aligned}~~~~$$

Předpověď budoucí hodnoty y_t má tvar

$$(34) y_t^* = b_0 + b_1 T + b_2 T^2$$

Príslušný ~~100%~~ **procentní předpovědní interval** je

$$(35) (\hat{y}_t - t_{1-p/2}(n-3) s_e; \hat{y}_t + t_{1-p/2}(n-3) s_e) \text{ , kde}$$

\hat{y}_t je vyrovnaná hodnota závisle proměnné

$n-3$ je počet stupňů volnosti (rozdíl mezi počtem pozorování a počtem trendových parametrů)

$t_{1-p/2}(n-3)$ je $10(1-p/2)\%$ kvantil **Studentova t-rozdělení** o $n-3$ stupních volnosti

f_t je hodnota: (36) $f_t = \sqrt{1 + (1, T, T^2)(XX)^{-1}(1, T, T^2)}$, přičemž

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n^2 \end{pmatrix} \text{ je matice nestochastických „regresorů“ .}$$

S_e je směrodatná odchylka reziduí (rozdílu mezi pozorovanými a vyrovnanými

$$\text{hodnotami časové řady) (36) } s_e = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n-3}}$$

1C) výpočet parametrů reciprokého/hyperbolického trendu ~~$y = \beta_0 + \beta_1/t$~~

Aplikace standardního vzorce pro OLS ~~$y = \beta_0 + \beta_1 x$~~ vede k výrazům

$$(41) \quad \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sum_{i=1}^T t & \sum_{i=1}^T \frac{1}{t} \\ \sum_{i=1}^T t & \sum_{i=1}^T t^2 & \sum_{i=1}^T t \\ \sum_{i=1}^T \frac{1}{t} & \sum_{i=1}^T t & \sum_{i=1}^T \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^T y_i \\ \sum_{i=1}^T t \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^T \frac{y_i}{t} \end{pmatrix}$$

1D) výpočet parametrů logaritmického trendu $y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln t$

Aplikace standardního vzorce pro OLS ~~$y = \beta_0 + \beta_1 x$~~ vede k výrazům

$$(42) \quad \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sum_{i=1}^T \ln t \\ \sum_{i=1}^T \ln t & \sum_{i=1}^T (\ln t)^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^T y_i \\ \sum_{i=1}^T y_i \ln t \end{pmatrix}$$

1E) výpočet parametrů exponenciálního trendu

$$(51) \quad y_t = \beta_0 \beta_1^t \quad [\beta_0 > 0] \text{ zpravidla } [\beta_1 > 1]$$

Trend je charakteristický tím, že **koeficient růstu** tj. podíl dvou sousedních hodnot y_{t+1}/y_t a současně podíl dvou sousedních diferencí $(y_{t+2} - y_{t+1})/(y_{t+1} - y_t)$ má konstantní hodnotu β_1 . Parametr β_0 se uvažuje kladný.

Růstová tendence nastává v případě $\beta_1 > 1$, tendence poklesu v případě $\beta_1 < 1$,

K výpočtu parametrů exponenciálního trendu je vhodné uplatnit **váženou metodu nejmenších čtverců WLS** s vhodně transformovanými vahami. (Nelze totiž předpokládat multiplikativní tvar a logaritmo-normální rozdělení náhodné složky v původním modelu před transformací).

V konkrétním případě exponenciálního trendu se aplikuje WLS pro minimalizaci výrazu

$$(52) \quad \sum_{t=1}^n v_t (y_t - \beta_0 \beta_1^t)^2, \text{ v němž } v_t \text{ jsou předem zvolené váhy.}$$

Minimalizace se však v této metodě vztahuje k výrazu

$$(53) \quad \sum_{t=1}^n w_t (\ln y_t - \ln \beta_0 - t \ln \beta_1)^2, \text{ kde}$$

váhy w_t závisí na vahách v_t tak, abychom minimalizací obou výrazů dostali aspoň přibližně shodné odhady parametrů β_0, β_1 . Ukazuje se, že pro přijatou logaritmickou transformaci je vhodné položit

$$(54) \quad w_t = y_t^2 \cdot v_t \quad t = 1, 2, 3, \dots, n$$

K nejčastější volbě vah $v_t = 1$ přistupujeme tehdy, jestliže nemáme důvod preferovat v minimalizačním kritériu některá jednotlivá pozorování, takže pak pro transformované váhy bude platit $w_t = y_t^2$. Minimalizací výrazu s těmito vahami obdržíme **soustavu normálních rovnic**

$$(55A) \quad \ln \beta_0 \cdot (\sum y_t^2) + \ln \beta_1 (\sum t \cdot y_t^2) = (\sum y_t^2 \cdot \ln y_t)$$

$$(55B) \quad \ln \beta_0 \cdot (\sum t \cdot y_t^2) + \ln \beta_1 (\sum t^2 \cdot y_t^2) = (\sum t y_t^2 \cdot \ln y_t)$$

Ta má **explicitní řešení** pro oba parametry ve tvaru

$$(56A) \quad \ln \beta_0 = \frac{\sum t^2 y_t^2 \cdot \sum y_t^2 \ln y_t - \sum t y_t^2 \cdot \sum t y_t^2 \ln y_t}{\sum t^2 y_t^2 \cdot \sum y_t^2 - (\sum t y_t^2)^2}$$

$$(56B) \quad \ln \beta_1 = \frac{\sum y_t^2 \cdot \sum t y_t^2 \ln y_t - \sum t y_t^2 \sum y_t^2 \ln y_t}{\sum t^2 y_t^2 \cdot \sum y_t^2 - (\sum t y_t^2)^2}$$

Oba parametry získáme exponenciálním povýšením výrazů na pravých stranách.

1F) výpočet parametrů modifikovaného exponenciálního trendu

$$(61) \quad T_t = \beta_2 + \beta_0 \beta_1^t \quad [b_0 > 0] \text{ zpravidla také } [\beta_1 > 1]$$

Tento trend je *tříparametrickým zobecněním* předchozího případu (parametry $\beta_0, \beta_1, \beta_2$). Hodí se pro modelování *trendu s konstantním podílem sousedních diferencí*, pokud je navíc tento trend asymptoticky omezen (přibližuje-li se k saturační úrovni).

Jedna z orientačních metod odhadu parametrů modifikovaného exponenciálního trendu (pokud nemůžeme použít exaktní *iterační postupy nelineární optimalizace*), spočívá v tomto postupu:

Rozdělíme soubor pozorovaných hodnot na tři stejně velké třetiny o délce m . Pokud není n přesně dělitelné třemi, pak vynecháme jedno nebo dvě počáteční pozorování. Pak sečteme pozorování v jednotlivých třetinách, přičemž dostaneme

$$(62A) \quad \sum_1 y_t - \sum_1 T_t = m\beta_3 + \frac{\beta_0 \beta_1 (\beta_1^m - 1)}{\beta_1 - 1}$$

$$(62B) \quad \sum_2 y_t - \sum_2 T_t = m\beta_3 + \frac{\beta_0 \beta_1^{m+1} (\beta_1^m - 1)}{\beta_1 - 1}$$

$$(62C) \quad \sum_3 y_t - \sum_3 T_t = m\beta_3 + \frac{\beta_0 \beta_1^{2m+1} (\beta_1^m - 1)}{\beta_1 - 1}, \text{ kde}$$

indexování „1“ v $\sum_1 y_t$ resp. v $\sum_1 T_t$ značí součet pozorovaných hodnot, případně trendových hodnot z první třetiny časové řady. Řešením této *soustavy pseudonormálních rovnic* dostaneme postupně jednotlivé odhady parametrů b_0, b_1, b_2 ve tvaru

$$(63A) \quad b_1 = \left(\frac{\sum_3 y_t - \sum_2 y_t}{\sum_2 y_t - \sum_1 y_t} \right)^{1/m}$$

$$(63B) \quad b_0 = \frac{b_1 - 1}{b_1 (b_1^m - 1)} (\sum_2 y_t - \sum_1 y_t)$$

$$(63C) \quad b_2 = \frac{1}{m} \left(\sum_1 y_t - \frac{b_0 b_1 (b_1^m - 1)}{b_1 - 1} \right)$$

Vzhledem k tomu, že při pevně zvoleném parametru b_1 se model stane *lineárním modelem*, lze také použít takový postup, že se odhadnou parametry b_0, b_2 pro různé hodnoty b_1 a následně se zvolí taková varianta, která minimalizuje SSE. \square .

ověření indikace přítomnosti modifikovaného exponenciálního trendu:

podíly sousedních 1. diferencí $(y_{t+2} - y_{t+1}) / (y_{t+1} - y_t)$ jsou zhruba konstantní:

1G) výpočet parametrů logistického trendu

Tento opět tříparametrický trend je popsán schématem

$$(71) \quad T_t = \frac{\beta_2}{1 + \beta_1 \beta_1^t}, \quad t=1,2,3,\dots,n \quad \text{při} \quad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$$

Logistický trend má inflexi (tj. bod, ve kterém přechází konvexní průběh trendu v konkávní a naopak) v bodě $t^* = -\frac{\ln \beta_1}{\ln \beta_1}$ a je asymptoticky omezen (se saturační úrovní β_2). Jeho zderivováním podle časové proměnné t (tu pro derivování považujeme za spojitou), dostaneme

$$(72) \quad \frac{dT_t}{dt} = -\frac{\ln \beta_1}{\beta_2} T_t (\beta_2 - T_t), \quad \text{což je}$$

další důležitý ukazatel růstu trendové křivky (tato první derivace trendové křivky se v tomto kontextu nazývá **růstová funkce**). Je zřejmé, že rychlost růstu logistického trendu závisí přímo úměrně na dosažené úrovni T_t a na vzdálenosti úrovně trendu od saturační úrovně β_2 , tj. $\beta_2 - T_t$. Derivace je přitom symetrická kolem bodu inflexe $t = -\ln \beta_1 / \ln \beta_1$. Z toho, co bylo řečeno, plyne, že logistickou křivku lze přiřadit k tzv. **S-křivkám symetrickým kolem inflexního bodu**.

Pokud jde o odhad parametrů logistického trendu, lze použití několik odlišných metod:

a) protože logistický trend lze považovat za reciprokou hodnotu **modifikovaného exponenciálního trendu**, lze aplikovat výše popsanou odhadovou proceduru pro odhad modifikovaného exp. trendu na časovou řadu s reciprokými hodnotami $1/y_t$.

b) Použijeme **diferenčního parametrického odhadu**, kdy se místo s původní čas.řadou pracuje s řadou prvních diferencí $y_{t+1} - y_t$. Přitom se postupuje takto:

Aproximuje se v derivačním výrazu (72) trendová složka T_t skutečnými pozorováními y_t , takže se dostane:

$$(73) \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\ln \beta_1}{\beta_2} y_t (\beta_2 - y_t)$$

Jestliže dále přijmeme aproximaci

$$(74) \quad \frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{t+1} - y_t}{t+1-t} = y_{t+1} - y_t = d_t, \quad \text{v níž}$$

d_t označuje řadu prvních diferencí, pak z (73) snadnou úpravou dostaneme

$$\frac{d_t}{y_t} = -\ln \beta_1 + \frac{\ln \beta_1}{\beta_2} \cdot y_t$$

Pomocí **metody nejmenších čtverců** pak získáme v **lineárním regresním modelu** (modelu s jediným regresorem)

$$(75) \quad \frac{d_t}{y_t} = -\ln \beta_1 + \frac{\ln \beta_1}{\beta_2} y_t + \varepsilon$$

Odhady pro $-\ln\beta_1$ a pro $\frac{\ln\beta_1}{\beta_2}$ a odtud snadno odhady parametrů β_1, β_2 .

Abychom získali odhad β_0 , aproximujeme ve vztahu (31) trendovou složku T_t skutečnými pozorováními y_t a upravíme tento vztah do tvaru

$$(76) \quad \beta_0 \beta_1^t \approx \frac{\beta_2}{y_t} - 1$$

Po zlogaritmování a sečtení přes $t=1, 2, \dots, n$ dostaneme nakonec vztah

$$(77) \quad \ln\beta_0 = -\frac{(n+1)\ln\beta_1}{2} + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln\left(\frac{\beta_2}{y_t} - 1\right)$$

který se nazývá **Rhodesův vzorec**.

Z něho se už snadno vypočte odhad parametru β_0 „vyexponováním“.

Ověření lokalizace inflexního bodu u logistické křivky

Vzhledem k tomu, že inflexe je místem, kde konvexnost přechází v konkávnost (nebo vice versa)

, odkud odvodíme polohu inflexního bodu $t^* = \frac{-\ln\beta_0}{\ln\beta_1}$ □.

ověření indikace přítomnosti logistického trendu:

podíly sousedních 1. diferencí recipročných hodnot $(1/y_{t+2} - 1/y_{t+1}) / (1/y_{t+1} - 1/y_t)$ jsou zhruba konstantní.

1H) Gompertzův trend a výpočet jeho parametrů

Trend ve tvaru této křivky vzniká (ostatně stejně jako logistický trend) transformací **modifikovaného exponenciálního trendu**.

$$(81) \quad \ln y_t = \beta_3 + \beta_1 \cdot \beta_2^t \quad \text{resp. ekvivalentně } y_t = \exp(\beta_3 + \beta_1 \cdot \beta_2^t) \quad \text{při } [\beta_2 > 0]$$

$t = 1, 2, \dots, n$

Obvykle – pro udržení charakteristického tvaru křivky – **přijímáme**: $\beta_1 < -1, 0 < \beta_2 < 1$

Pro hodnoty parametrů z tohoto intervalu má Gompertzův trend inflexi v bodě

$$(82) \quad t^* = -\frac{\ln(-\beta_1)}{\ln(\beta_2)}$$

První derivace této křivky (tzv. **růstová funkce**) ale tentokrát není symetrická kolem inflexního bodu, ale je sešikmená (protáhlejší) doprava. Z tohoto důvodu se Gompertzův trend řadí mezi tzv. **S-křivky nesymetrické kolem inflexního bodu**.

Odhad parametrů $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ se provede způsobem obdobným jako v případě modifikovaného exponenciálního trendu, místo původní řady se ale použije logaritmaná původní řada (s hodnotami $\ln y_t$ ⁴)

[Ověření lokalizace inflexního bodu u Gompertzovy křivky](#)

ověření indikace přítomnosti Gompertzova trendu:

indikace přítomnosti: podíly prvních logaritmaných diferencí $(\ln y_{t+2} - \ln y_{t+1}) / (\ln y_{t+1} - \ln y_t)$ jsou přibližně konstantní

1J) výpočet parametrů odmocninného trendu $y = a + b \sqrt{t}$

⁴ Je tímto zřejmé, že postup nelze uplatnit na ekonomickou časovou řadu s některými hodnotami zápornými.

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^T \sqrt{t} \\ \sum_{t=1}^T \sqrt{t} & \sum_{t=1}^T t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T y_t \\ \sum_{t=1}^T t \cdot y_t \end{pmatrix}$$

V případech, kdy je levostranná regresní proměnná transformací původní veličiny časové řady y_t , lze aplikovat metodu nejmenších čtverců OLS jen s výhradou.

Minimalizace reziduí prováděná pomocí OLS nebude totiž založena na kritériu $Min \sum e^2$, nýbrž na kritériu $Min \sum [f(e_t)]^2$, kde $f(\cdot)$ je použitá transformující funkce, nejčastěji logaritmická funkce nebo exponenciála. Pro takovéto případy by měla být užitá nelineární (prostá) metoda nejmenších čtverců **NLLS (Non-Linear Least Squares Method)**, jejímž minimalizačním kritériem je právě

$$\sum [f(y_t) - f(\hat{y}_t)]^2.$$

Výpočet je ale nutné provést některou z **numerických iteračních metod**, protože výsledný vzorec pro odhadnuté parametry nelze vyjádřit explicitně.

Hlavní zásady pro výběr výstižného trendu

1) Zpravidla preferujeme trendovou křivku s co nejmenším počtem parametrů (obvykle do 3). Zásadou je úspornost (parsimony), která je zde ještě více opodstatněná než v klasické regresní analýze, neboť vodítka pro tvar nelinearity zde až na ojedinělé výjimky nemůžeme vyvodit z ekonomické teorie. Jednou z možností, jak otestovat potřebu/nepotřebu nutnosti zařazení další trendové transformace může být výpočet korigovaného koeficientu determinace R^2 . Jinou racionální úvahu lze založit na určení statistické významnosti příslušného trendového parametru (k tomu lze užít klasické testování pomocí t-testu). V trendové analýze není zdaleka tak osudové riziko specifikační chyby spočívající ve vynechání některé z relevantních proměnných jako je tomu v analýze regresní.

2) Před první volbou trendové křivky je vhodné se podívat na graf pozorovaných hodnot časové řady, který bývá prvotním vodítkem výchozí trendové specifikace. Z něho lze dost často vyvodit řád nestacionarity např. tím, že vytvoříme řadu prvních nebo druhých diferencí. Pokud ani diference vyšších řádů nevedou ke stacionární řadě a řada vykazuje monotónní akcelerující růst, je to indikací pro volbu exponenciálního trendu (s případným posunem výchozí úrovně). Určitým indikátorem je pak graf průběhu reziduálních hodnot, z něhož lze často vyvodit další transformující funkci času, která byla v základní specifikaci opomenuta (např. mnohočlen 2. nebo 3 stupně).

3) Nesmíme zapomenout na to, že trendová analýza slouží především ke krátkodobým predikcím. Vzhledem k tomu, že polynomy 4. a vyšších řádů se vyznačují značnou

citlivostí při predikcích, je to důvodem pro jejich vynechání z oboru možných trendových funkcí. (Ekonomické ukazatele se chovají principiálně ustáleněji než např. fyzikální/technické, kde může být účelné nasazení např. *splinových funkcí*).

4) Pokud ekonomický ukazatel vykazuje evidentně rozdílný průběh ve sledovaném minulém období, obvykle to velmi komplikuje rozhodnutí o výběru trendu. V takovémto případě – pokud se nevzdáme pokusu o predikci vůbec – přistupujeme zpravidla k prolongování chování z údajů posledního období nebo z údajů toho minulého období, o němž lze důvodně předpokládat, že vývoj zde pozorovaný se vyskytne i v nejbližší budoucnosti.

5) Přítomnost *heteroskedasticity* (standardně testované v regresní analýze) není v případě trendové analýzy časové řady zpravidla vážnějším problémem.⁵ U testování konvenčními testy nevzniká specifický problém, jen u Whiteova testu je větší než obvyklá pravděpodobnost výskytu součinné kombinace dvou elementárních trendových funkcí s některou z dalších zařazených (vznikla by dokonalá multikolinearita). U Goldfeld-Quandtova testu se zřejmě nemůžeme opřít o obsahovou vazbu variability reziduí s proměnlivostí některé z vysvětlujících proměnných, takže jeho nasazení ztrácí původní význam. V testování převažují prvky technické nad věcnými.

6) Naopak, důležitým prvkem trendové analýzy je vyšetřování síly a stupně *autokorelace náhodných složek* sledované časové řady. Náhodné složce časové řady je vůbec věnována značná pozornost. Proto také obvykle první pohled na výsledky směřuje k vyšetření reziduálních hodnot, přičemž základní představu o jejich případné autokorelovanosti poskytne Durbin-Watsonův koeficient autokorelace 1.řádu.

7) Další z průvodních problémů standardní lineární regrese – *multikolinearita* – se v trendové analýze vyskytnout nemůže: K dokonalé multikolinearitě nemůže vést žádná lineární kombinace elementárních trendových komponent (jsou-li tyto rozdílné) a eventualita výskytu *přibližné multikolinearity* nemůže pocházet ze *stochastičnosti* „vysvětlujících proměnných“, (jsou-li elementární trendové komponenty svou povahou nestochastické).

8) Případný přínos apriorní informace: Je poměrně skromný počet případů, kdy lze k výběru nejvhodnější trendové funkce uplatnit poznatky plynoucí z externí ekonomické reality. Přece však některé existují: Ve vývoji průměrné mzdy jako nejcharakterističtějším případem lze pozorovat tendenci pravidelného každoročního procentního nárůstu (který ovšem nemusí být každoročně stejný). Je to přímým důsledkem „zvyklostí“, které jsou zažité při mzdovém vyjednávání odborářů (a od nichž se sekundárně odvíjí i mzdový nárůst pracovníků ve státních podnicích a státní správě).

Kritéria posuzování přesnosti předpovědí

Střední chyba odhadu [mean error] ME

⁵ Pracujeme s časovou řadou, jejíž hodnoty – aspoň v nedlouhém časovém období – jsou zpravidla dosti vzájemně blízké a rozptýl náhodných složek obvykle významněji nekolísá.

$$MSE = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{n}$$

$$MSE = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{T}_t)^2}{n}$$

Jde o obvykle velmi malou hodnotu (řádů 10^8 a níže) indikující „míru nelinearity“ při výpočtu.

Střední čtvercová chyba odhadu [mean squared error] MSE

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2$$

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{T}_t)^2$$

Odmocninová střední čtvercová chyba [root mean squared error] RMSE

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{T}_t)^2}$$

Výhodou oproti MSE je vyjádření ve stejných jednotkách jako mají původní data.

Střední absolutní chyba odhadu [mean absolute error] MAE

$$MAE = \frac{\sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_t|}{n}$$

$$MAE = \frac{\sum_{t=1}^n |y_t - \hat{T}_t|}{n}$$

Její předností je – zejména v datových souborech s výraznými odchylkami některých pozorování od „standardních“ (tzv. *outliers*) - že nepenalizuje tak silně jako MSE či RMSE tyto „extrémní“ odchylky.

Dále uváděné míry již na měřítku hodnot předpovídané proměnné nezávisí:

Střední absolutní procentuální chyba odhadu [mean absolute percentage error] MAPE

$$MAPE = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t}$$

$$MAPE = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - \hat{T}_t|}{y_t}$$

Zpravidla nabývá hodnot mezi 0-100%, přičemž výsledek menší/lepší než 100%, že daný předpovědní model je lepší než model náhodné procházky s předpověďmi trvale na nulové úrovni, tj. trvale s MAPE=100%. Kritérium je však problematicky použitelné, pokud hodnoty časové řady jsou příliš malé (oscilují kolem 0).

Korigovaná Střední absolutní procentuální chyba odhadu [adjusted mean absolute percentage error] AMAPE

$$AMAPE = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{(|y_t - \hat{y}_t| + |y_t - \hat{T}_t|) / 2}$$

Koriguje asymetrii kritéria MAPE: dává totiž stejný výsledek i při prohození skutečných a předpovídaných hodnot: Skutečná hodnota 0,6 a předpověď 0,8 přispějí do součtu v AMAPE stejně jako skutečná hodnota 0,8 a předpověď 0,6.

Střední procentní chyba odhadu [mean percentage error] MPE

$$MP\hat{E} \frac{100}{n} \sum_{t=1}^{n+h} \left(\frac{y_t - \hat{T}_t}{y_t} \right)$$

Je víceméně doplňkovým kritériem k ME, kdy v součtu vystupují relativní odchylky místo absolutních.

Theilův koeficient nesouladu [Theil's U-coefficient] ThU⁶

$$ThU = \frac{\sqrt{\sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - \hat{y}_t)^2}}{\sqrt{\sum_{t=n+1}^{n+h} y_t^2} + \sqrt{\sum_{t=n+1}^{n+h} \hat{y}_t^2}}, \text{ kde}$$

n..... délka původní časové řady (užité pro odhad modelu)

h..... délka předpovídaného období [h>0]

n +h ... délka původní časové řady prodloužená o předpovídané období

Někdy je ovšem toto kritérium formulováno obecněji, přičemž odchylky jsou brány vůči nějakému jednoduchému či naivnímu modelu- tzv. *benchmark*. Hodnota U leží vždy mezi 0 a 1, přičemž hodnota 0 značí perfektní shodu předpovědi se skutečností.

Publikace **Hindls R., Hronová S, Novák, I.: Metody statistické analýzy pro ekonomy** uvádí jinou verzi *Theilova koeficientu* (zde označenou *ThC*)

Theilův koeficient nesouladu [Theil's C-coefficient] ThC

$$ThC = \frac{\sum_{i=1}^q (y_{r+i} - \hat{P}_i)^2}{\sum_{i=1}^q y_{r+i}^2}, \text{ kde}$$

n..... délka původní časové řady (užité pro odhad modelu)

r..... délka časové řady po zkrácení [r < n] o q pozorovaných hodnot

q..... délka zkrácení , tzn. q = n – r

\hat{P}_i extrapolovaná hodnota na i období dopředu, a to modelem odhadnutým na základě prvních r pozorování časové řady .

Pokud se hodnota **ThC** nachází v rozmezí 3-5%, lze mluvit o velmi uspokojivém výsledku. Model lze s velkou pravděpodobností považovat za použitelný k předpovědím.

Pokud se hodnota **ThC** nachází v rozmezí 5-10%, lze mluvit o jakžtakž uspokojivém výsledku. Model lze s mírnou nadějí považovat za použitelný k předpovědím

Pokud se hodnota **ThC** nachází nad hladinou 10%, nelze mluvit o uspokojivém výsledku. Model lze téměř s jistotou zavrhnout z hlediska použitelnosti k předpovědím.

⁶ **Henri Theil** byl významný nizozemský ekonometr a matematický ekonom [1924-2000], následník **Jana Tinbergena** na *Erasmus University v Rotterdamu*, později působil na universitě v *Chicagu* a na *University of Florida*.

K předchozím kritériím lze přidat ještě dvě další míry, u nichž se omezujeme na posouzení toho, jak model předpovídá znaménka budoucích hodnot (tj. zda tyto hodnoty budou kladné nebo záporné) nebo změny ve směru vývoje budoucích hodnot (zda růst přejde v pokles apod.) Někdy – při strategických úvahách – jde o důležitější aspekty než číselné co nejpřesnější vyjádření předpovídaných hodnot

Procento správných předpovědí znaménka PCPS

$$PCPS = \frac{100}{n} \cdot \sum_{t=n+1}^{n+k} z_t, \text{ kde } z_t = 1 \text{ pro } y_t \cdot \hat{y}_t > 0$$

$$z_t = 0 \text{ pro } y_t \cdot \hat{y}_t \leq 0$$

Procento správných (jednokrokových) předpovědí změn směru vývoje PCPD

$$PCPD = \frac{100}{n} \cdot \sum_{t=n+1}^{n+k} z_t, \text{ kde } z_t = 1 \text{ pro } (y_t - y_{t-1})(\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1}) > 0$$

$$z_t = 0 \text{ pro } (y_t - y_{t-1})(\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1}) \leq 0$$