$T_3(x)$ pro $f(x) = e^{\sin x}$, $x_0 = 0$

Řešení. Zřejmě platí:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sin x};\\
f'(x) &= \cos x e^{\sin x};\\
f''(x) &= -\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x} =\\
&= e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x);\\
f'''(x) &= e^{\sin x}\cos x(\cos^2 x - \sin x) + e^{\sin x}(2\cos x(-\sin x) - \cos x) =\\
&= e^{\sin x}(\cos^3 x - 3\sin x\cos x - \cos x).
\end{aligned}
$$

$$f(0) = 1,\quad f'(0) = 1,\quad f''(0) = 1,\quad f'''(0) = 0.$$

Odtud

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Příklad. Napišme Taylorovy polynomy pro funkci $f(x) = 2^x$ v bodě $a = 1$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathcal{R}$ je

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 2^x, && f'(x) = 2\cdot(\ln 2), && \dots, && f^{(n)}(x) = 2^x\cdot(\ln 2)^n.\\
&f(1) = 2, && f'(1) = 2\cdot(\ln 2), && \dots, && f^{(n)}(1) = 2\cdot(\ln 2)^n.
\end{aligned}
$$

Je tedy

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 2,\\
T_1(x) &= 2 + 2(x-1)\ln 2,\\
T_2(x) &= 2 + 2(x-1)\ln 2 + \frac{2\ln^2 2}{2!}(x-a)^2,\\
&\dots\\
T_n(x) &= 2 + \frac{2\cdot\ln 2}{1!}(x-1) + \frac{2\cdot\ln^2 2}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{2\cdot\ln^n 2}{n!}(x-1)^n.
\end{aligned}
$$

Příklad. Předpokládejme, že Y je rovnovážný důchod odpovídající autonomním výdajům A. Je-li Y_0 počáteční rovnovážný důchod odpovídající autonomním výdajům A_0, pak ze vztahu

$$A = Y - C(Y)$$

plyne

$$A - A_0 \sim (Y - Y_0) - C'(Y_0)(Y - Y_0) - \frac{C''(Y_0)}{2!}(Y - Y_0)^2 - \dots - \frac{C^{(n)}(Y_0)}{n!}(Y - Y_0)^n.$$

Pro malé hodnoty $Y - Y_0$ platí

$$A - A_0 \sim (Y - Y_0) - c(Y - Y_0),$$

kde $c = C'(Y_0)$.

$$
\begin{aligned}
A - A_0 &\sim (1 - c)(Y - Y_0),\\
Y - Y_0 &\sim \frac{1}{1-c}(A - A_0),\\
\Delta Y &\sim \frac{1}{1-c}\Delta A.
\end{aligned}
$$

Cvičení

1. Napište Taylorův polynom pro funkci $f(x)$ v bodě nula:

(a) $f(x) = \ln(x+1)$, (e) $f(x) = e^{-x}$,
(b) $f(x) = x\sin x$, (f) $f(x) = 2^x$,
(c) $f(x) = xe^x$, (g) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$,
(d) $f(x) = e^{x^2}$, (h) $f(x) = \sin 5x$.

2. Napište Taylorův polynom pro funkci $f(x)$ v bodě a:

(a) $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{2}$;
(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -1$;
(c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$;
(d) $f(x) = \cos x$, $a = \frac{\pi}{2}$;
(e) $f(x) = 3^x$, $a = -1$;
(f) $f(x) = e^x$, $a = 1$;
(g) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$;
(h) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $a = 2$.

3. Napište $T_k(x)$ pro funkci $f(x)$ v bodě a:

(a) $f(x) = \arcsin x$, $a = 0$, $k = 7$;
(b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, $k = 5$;
(c) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = 0$, $k = 5$.

Výsledky cvičení

1. (a) $T_n(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$.
   (b) $T_{2n}(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{3!} + \dfrac{x^6}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{(2n-1)!}$.

můžete ř

(c) $T_{n+1}(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n!}$.

(d) $T_{2n}(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}$.

(e) $T_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$.

(f) $T_n(x) = 1 + (\ln 2)x + \frac{(\ln 2)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln 2)^3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(\ln 2)^n}{n!}x^n$.

(g) $T_n(x) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n$.

(h) $T_{2n+1}(x) = 5x - \frac{5^3}{3!}x^3 + \frac{5^5}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

2.

(a) $T_{2n}(x) = 1 - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{4!})^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}(x - \frac{\pi}{2})^{2n}$.

(b) $T_n(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \cdots - (x+1)^n$.

(c) $T_n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots + (-1)^n (x-1)^n$.

(d) $T_{2n+1}(x) = -(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3 - \frac{1}{5!}(x - \frac{\pi}{2})^5 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{(x - \frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(e) $T_n(x) = \frac{1}{3}[1 + (\ln 3)(x+1) + \frac{(\ln 3)^2}{2!}(x+1)^2 + \cdots + \frac{(\ln 3)^n}{n!}(x+1)^n]$.

(f) $T_n(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{e}{n!}(x-1)^n$.

(g) $T_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$.

(h) $T_2(x) = 11 + 6(x-2) + (x-2)^2, \quad T_2(x) = T_3(x) = \cdots = T_n(x)$.

3.

(a) $T_7(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7}$.

(b) $T_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5$.

(c) $T_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$.

11. Integrály

V celé kapitole budeme slovem funkce rozumět reálnou funkci jedné reálné proměnné a slovem derivace budeme vždy rozumět vlastní derivaci.

11.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

Úvod

V předchozí kapitole jsme se zabývali úlohou nalézt k funkci f její derivaci f' v nějakém intervalu I. Integrování je úloha obrácená. Budeme k dané funkci f definované v intervalu I hledat funkci F tak, aby pro každé $x \in I$ platilo $F'(x) = f(x)$. Z takto zadané úlohy plyne, že základní vzorce pro integraci dostaneme pouhým přepsáním známých vzorců pro derivování. Z předchozí kapitoly víme, že funkce F má v intervalu I derivaci, má-li derivaci v každém vnitřním bodě intervalu I, derivaci zprava v počátečním bodě intervalu I, pokud je I uzavřený zleva, a derivaci zleva v koncovém bodě intervalu I, pokud je I uzavřený zprava. Je-li $\alpha = \inf I$ a $\beta = \sup I$, pak derivací funkce F v intervalu I rozumíme funkci

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{pro} \quad x \in (\alpha, \beta), \\ F'_+(x) & \text{pro} \quad x = \alpha, \quad \text{je-li} \quad \alpha \in I, \\ F'_-(x) & \text{pro} \quad x = \beta, \quad \text{je-li} \quad \beta \in I. \end{cases} \tag{11.1}$$

Je-li funkce f v (11.1) spojitá v intervalu I, pak říkáme, že F má v intervalu I spojitou derivaci.

Definice primitivní funkce

Definice. *Řekneme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu I, platí-li $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$.*

Je tedy např. funkce $F(x) = x^2$ primitivní funkcí k funkci $f(x) = 2x$ v $\mathcal{R}$, neboť $(x^2)' = 2x$.

Poznámka. Je-li F primitivní funkcí k funkci f v intervalu I, pak každá funkce $G = F + c$, kde c je libovolná reálná konstanta, je také primitivní funkcí k funkci f, neboť na intervalu I platí

$$G' = (F + c)' = F' = f.$$

Tímto způsobem dostaneme všechny primitivní funkce k funkci f v intervalu I. Jsou-li F a G primitivní funkce k funkci f v intervalu I, pak existuje reálné číslo c tak, že platí $G = F + c$. V intervalu I platí $(G - F)' = f - f = 0$. Z věty o významu první derivace

13. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}\,dx$ $\left[\frac{\pi^3}{12}\right]$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos x}\,dx$ $[diverguje]$

16. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ $[diverguje]$

17. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{x^4+1}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

18. $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ $[diverguje]$

19. $\int_{a^2}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{a^4+1}}{1-\sqrt{a^4+1}}\right]$

20. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ $[2]$

21. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ $\left[\frac{\pi+2}{2}\right]$

Příklady : Vypočtěte obsah plochy omezené křivkami

22. $y = \frac{1}{1+x^2}$ a $y = 0$ v intervalu $(-\infty, 1>$ $\left[\frac{3}{4}\pi\right]$

23. $y = \arcsin x,\ x = 1,\ y = 0$ $\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$

24. $y = \arctan\frac{1}{x-8},\ x = 8,\ x = 0,\ y = 0$ $\left[-4\pi - \ln\sqrt{65} + 8\arctan 8\right]$

25. $y = 6^{-x},\ x = 0,\ y = 0,\ x \geq 0$ $\left[\frac{1}{\ln 6}\right]$

Příklady : Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací křivky nebo rovinné oblasti

25. $y = \ln x,\ x \in <0, e>$, kolem osy x $[\pi e]$

26. $xy = 1,\ x \in <1, \infty)$, kolem osy x $[\pi]$

27. $y = x^{-2},\ x = 1,\ y = 0,\ x \geq 1$, kolem osy y $\left[\frac{\pi}{3}\right]$

Kapitola 3

Diferenciální počet funkce n-proměnných

3.1 Parciální derivace

Příklady : Vypočtěte parciální derivace prvního řádu daných funkcí

1. $z = \frac{3xy}{x-y}$
2. $z = (\sin x)^{\cos y}$
3. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$
4. $z = xye^{\sin \pi xy}$
5. $z = xe^{\frac{y}{x}}$
6. $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\frac{x+y}{xy}$
7. $z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
8. $z = \frac{1}{\arctan\frac{y}{x}}$
9. $z = (x+y)^y$
10. $z = (1+xy)^y$
11. $z = x^{x^y}$
12. $z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
13. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$
14. $z = (2x+y)^{2x+y}$
15. $z = \arctan\sqrt{x^y}$
16. $z = \ln\frac{x-y}{x+y}$

Výsledky :

1. $z'_x = -\frac{3y^2}{(x-y)^2},\ z'_y = \frac{3x^2}{(x-y)^2}$
2. $z'_x = \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1},\ z'_y = -\sin y \ln\sin x (\sin x)^{\cos y}$
3. $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$
4. $z'_x = y(1 + \pi xy \cos \pi xy)z,\ z'_y = x(1 + \pi xy \cos \pi xy)z$
5. $z'_x = e^{\frac{y}{x}}(1 - \frac{y}{x}),\ z'_y = e^{\frac{y}{x}}$
6. $z'_x = -\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}},\ z'_y = -\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$
7. $z'_x = \frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2},\ z'_y = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}$