17. Napište rovnici tečné roviny k ploše $az = x^2+y^2$, $(a \neq 0)$ v bodech, v nichž přímka $x = y = z$ plochu protíná.

18. Dokažte, že funkce $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ vyhovuje rovnici $u = 2\ln 2 - \ln |\mathrm{grad}\, u|^2$

Výsledky :

11. a) $3x + z - 4 = 0$
    b) $x = 2 + 3t,\ y = 1,\ z = -2 + t$
    c) $-3\vec{i}$
    d) $-3dx$

12. a) $8x + 4y - z + 4 = 0$
    b) $x = -1 + 8t,\ y = 2 + 4t,\ z = 4 - t$
    c) $8dx + 4dy$
    d) $24dx^2 + 16dxdy + 2dy^2$

13. $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0$

14. Body ležící na kružnici $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$

15. a) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$
    b) $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

16. $2x + 2y + z - 6 = 0$

17. $x + y - z - \frac{a}{2} = 0,\ z = 0$

3.3 Taylorův polynom

Příklady : Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $z = f(x,\ y)$ v bodě A

1. $z = \sin x \sin y,\ A = (\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}),\ n = 3$
2. $z = e^x \sin y,\ A = (0,\ 0),\ n = 3$
3. $z = \sin(xy),\ A = (0,\ \frac{\pi}{2}),\ n = 2$
4. $z = \frac{\cos x}{\cos y},\ A = (0,\ 0),\ n = 2$
5. $z = \ln(1 + x + y),\ A = (0,\ 0),\ n = 3$
6. $z = \ln(1 - x)\ln(1 - y),\ A = (0,\ 0),\ n = 3$
7. $z = 3x^2y + \sin^2 x + 5y - 2,\ A = (0,\ 0),\ n = 3$
8. $z = y \ln x,\ A = (1,\ 1),\ n = 2$
9. $z = \frac{y^2}{x^2},\ A = (-1,\ 2),\ n = 2$
10. $z = x \sin^2 y,\ A = (1,\ \frac{\pi}{2}),\ n = 2$

Výsledky :

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(y - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{4})(y - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{12}(y - \frac{\pi}{4})^3$
2. $y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3$
3. $\frac{\pi}{2}x + x(y - \frac{\pi}{2})$
4. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$
5. $x + y - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$
6. $xy + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2$
7. $-2 + 5y + x^2 + 3x^2y$
8. $(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1)$
9. $4 + 8(x + 1) + 4(y - 2) + 12(x + 1)^2 + 8(x + 1)(y - 2) + (y - 2)^2$
10. $1 + (x - 1) - (y - \frac{\pi}{2})^2$

3.4 Lokální, vázané a absolutní extrémy

Příklady : Nalezněte lokální extrémy daných funkcí

1. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$	2. $z = x^2 - y^2 + 2x - 2y$
3. $z = x^3 - 3xy + y^3$	4. $z = (x - y + 1)^2$
5. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$	6. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
7. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$	8. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$
9. $z = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y},\ x > 0,\ y > 0$	10. $z = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$
11. $z = \ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$	12. $z = x^3 + 3y^2x - 15x - 12y$
13. $z = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$	14. $z = xy\ln(x^2 + y^2)$
15. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$	16. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$
17. $z = y^3 + 3xy^2 + 2x^3 + 9x^2$	18. $z = (1 - x^2)^{\frac{2}{3}}(1 - y^2)^{\frac{2}{3}}$
19. $z = x^2y^2(1 - x - y)$	20. $z = x^3 + xy^2 - 2xy - 8x$
21. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$	22. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$
23. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$	24. $z = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$
25. $z = x^3y^2 + 3x^2y + \frac{1}{2}y^2 + 3y$	26. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
27. $z = x\ln(x^2 + y)$	28. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$
29. $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\arctan\frac{y}{x}$	30. $z = (2 + x)^{\frac{2}{5}}(2 - y)^{\frac{2}{5}}$
31. $z = 1 - \sqrt[5]{(x - 2)^4} - \sqrt[5]{y^4}$	32. $z = \sqrt[3]{(x + 1)^2}\sqrt[3]{(1 - y)^2}$
33. $u = x^2 + y^2 + z^2 + yz - 2x + y - z$	34. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$
35. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$	36. $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$
37. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},\ x,\ y,\ z > 0$	38. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

37. $z = e^{-\frac{x}{3}}(xy - y^2)$
40. $z = x \cdot \ln(x^2 + y)$

Výsledky :

1. $(\frac{1}{2},\ -1)$ lok.min.
2. $(-1,\ -1)$ není
3. $(0,\ 0)$ není, $(1,\ 1)$ lok.min.
4. V bodech přímky $y = x + 1$ jsou neostrá lok.min.
5. $(4,\ 4)$ lok.max.
6. $(-1,\ 2)$ není, $(0,\ 0)$ lok.min., $(-1,\ -2)$ lok.max., $(-\frac{5}{3},\ 0)$ lok.max.
7. $(0,\ 0)$ lok.min., $(-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2})$ není
8. $(5,\ 2)$ lok.min.
9. $(\frac{5}{2},\ \frac{4}{5})$ lok.min.
10. $(1,\ 1)$ lok.min., $(-1,\ -1)$ lok.max., $(\frac{\sqrt{14}}{3},\ \frac{3}{\sqrt{14}})$, $(-\frac{\sqrt{14}}{3},\ -\frac{3}{\sqrt{14}})$ není
11. $(3,\ 6)$ lok.max.
12. $(1,\ 2)$, $(-1,\ -2)$ není, $(2,\ 1)$ lok.min., $(-2,\ -1)$ lok.max.
13. $(0,\ 0)$ lok.min., $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$ lok.max., $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$ není
14. $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$ není, $(\frac{1}{\sqrt{2e}},\ \frac{1}{\sqrt{2e}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\ -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ lok.min., $(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\ \frac{1}{\sqrt{2e}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2e}},\ -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ lok.max.
15. $(-4,\ 1)$ lok.min.
16. $(0,\ 0)$ lok.min.$(-\frac{5}{3},\ 0)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ -4)$ není
17. $(0,\ 0)$ nelze rozhodnout, $(-3,\ 0)$ lok.max., $(-1,\ 2)$ není
18. $(0,\ 0)$ lok.max., v bodech přímek $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$ jsou neostrá lok.min.
19. $(\frac{2}{5},\ \frac{2}{5})$ lok.max., v bodech $(0,\ y)$, $y > 1$ a $(x,\ 0)$, $x > 1$ jsou neostrá lok.min., v bodech $(0,\ y)$, $y < 1$ a $(x,\ 0)$, $x < 1$ jsou neostrá lok.max.
20. $(0,\ 4)$, $(0,\ -2)$ není, $(\sqrt{3},\ 1)$ lok.min., $(-\sqrt{3},\ 1)$ lok.max.
21. $(1,\ 4)$ lok.min.
22. $(0,\ 0)$ není, $(1,\ \frac{1}{2})$ lok.min.
23. $(-1,\ 1)$ lok.min.
24. $(0,\ 0)$ není, $(-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3})$ lok.min.
25. $(0,\ -3)$, $(-2,\ 1)$ není, $(1,\ -2)$ nelze rozh.
26. $(0,\ 0)$ lok.min., $(-4,\ -2)$ není

27. $(0,\ 1)$ není
28. $(0,\ 0)$ není, $(1,\ \frac{1}{2})$ lok.min.
29. $(1,\ 1)$ není
30. V bodech přímek $x = -2$, $y = 2$ jsou neostrá lok.min.
31. $(2,\ 0)$ lok.min.
32. V bodech přímek $x = -1$, $y = 1$ jsou neostrá lok.min.
33. $(1,\ -1,\ 1)$ lok.min.
34. $(0,\ 0,\ -1)$ není, $(24,\ -144,\ -1)$ lok.min.
35. $(-1,\ -2,\ 3)$ lok.min.
36. $(2,\ 1,\ 7)$ není
37. $(\frac{1}{2},\ 1,\ 1)$ lok.min.
38. $(4,\ 4)$ lok.max.

Příklady :

39. Rozložte číslo $a > 0$ na tři kladné sčítance tak, aby jejich součin byl co největší.
40. V rovině (x, y) najděte takový bod, že součet čtverců jeho vzdáleností od přímek $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ je minimální.
41. Do trojosého elipsoidu s poloosami a, b, c vepište kvádr maximálního objemu tak, aby jeho hrany byly rovnoběžné s osami elipsoidu.
42. Určete rozměry pravoúhlého rovnoběžnostěnu tak, aby jeho objem byl maximální. Součet hran je roven 12 d.
43. Určete rozměry betonové nádrže tvaru čtyřbokého hranolu tak, aby spotřeba betonu byla minimální pro daný objem V nádrže. Tloušťku stěn neuvažujte.
44. Z plechového plátu 12 cm širokého se má zhotovit žlábek o průřezu rovnoramenného lichoběžníka. Jak velkou část z šířky x je nutno ohnout a jaký úhel φ mají svírat tyto stěny s podstavou, aby byl průřez maximální ?
45. Do polokoule vepište pravoúhlý rovnoběžnostěn maximálního objemu.Poloměr $r = 1$.
46. Bodem $A(a,\ b,\ c)$ veďte rovinu tak, aby se souřadnými rovinami tvořila čtyřstěn s minimálním objemem. Určete její rovnici.
47. Rozložte kladné číslo a na součin čtyř kladných čísel tak, aby jejich součet byl maximální.

48. V rovině $\rho : x + 2y - z + 3 = 0$ určete bod, jehož součet čtverců vzdáleností od bodů (1, 1, 1), (2, 2, 2) je nejmenší.

Výsledky :

39.	$\frac{a}{3},\ \frac{a}{3},\ \frac{a}{3}$	40.	$(\frac{8}{5},\ \frac{16}{5})$
41.	$\frac{2a}{\sqrt{3}},\ \frac{2b}{\sqrt{3}},\ \frac{2c}{\sqrt{3}}$	42.	krychle
43.	$\sqrt[3]{2V},\ \sqrt[3]{2V},\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$	44.	$\varphi = 60°,\ x = 4$
45.	$1,\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}$	46.	$\frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 1$
47.	$\sqrt[4]{a},\ \sqrt[4]{a},\ \sqrt[4]{a},\ \sqrt[4]{a}$	48.	$(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{5}{2})$

Příklady : Nalezněte vázané extrémy dané funkce při daných podmínkách

49. $z = x^3 + y^3$; podm. $x + y - 3 = 0$

50. $z = x + 2y$; podm. $x^2 + y^2 = 5$

51. $z = x^2 + 2y^2$; podm. $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$

52. $z = 6 - 4x - 3y$; podm. $x^2 + y^2 = 1$

53. $z = xy$; podm. $x + y = 1$

54. $z = 2(x^2 + y^2)$; podm. $x + y = 2$

55. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; podm. $x + y = 2$

56. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$; podm. $x - y = \frac{\pi}{4}$

57. $z = x + y + 2$; podm. $2(x^2 + y^2) = x^2y^2$

58. $z = x + y$; podm. $xy = 1$

59. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; podm. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

60. Nalezněte extrémní hodnoty vzdálenosti počátku souřadného systému od křivky $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

Výsledky :

49. $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ lok.min.

50. (1, 2) lok.max., (−1, −2) lok.min.

51. (0, 0) lok.min., (2, −2) lok.max.

52. $(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5})$ lok.min., $(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5})$lok.max.

53. $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ lok.max.

54. (1, 1) lok.min.

55. (1, 1) lok.min.

56. $(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})$ lok.max. pro k sudé, lok.min. pro k liché

57. (2, 2) lok.min., (−2, −2) lok.max.

58. (1, 1) lok.max., (−1, −1) lok.min.

59. $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ lok.min., $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ lok.max.

60. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ lok.min., $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ lok.max.

Příklady Nalezněte absolutní extrémy daných funkcí

61. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ na čtverci $x \in < 0,\ 4 >,\ y \in < 0,\ 4 >$

62. $z = 3xy$ v kruhu $x^2 + y^2 \leq 2$

63. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ na obdélníku $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$

64. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ na oblasti dané nerovnicí $x^2 + y^2 \leq 25$

65. $z = x^2 - y^2$ v uzavřené oblasti $x^2 + y^2 \leq 4$

66. $z = x^2 + y^2 - 2y + 1$ na $M = \{(x,\ y); x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0\}$

67. $z = x^2 - xy + y^2$; M je určena nerovnicí $|x| + |y| \leq 1$

68. $z = xy^2(4 - x - y)$ na oblasti omezené přímkami $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6$

69. $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$ na množině $< 0,\ \pi > \times < 0,\ \pi >$

70. $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ na $M = \{(x,\ y); 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$

Výsledky :

61. (3, 3)abs.min., (4, 0), (0, 4)abs.max.

62. (1, 1), (−1, −1)abs.max., (−1, 1), (1, −1)abs.min.

63. (1, 2) abs.max., (1, 0)abs.min.

64. (3, −4) abs.min., (−3, 4) abs.max.

65. (2, 0), (−2, 0) abs.max., (0, 2)(0, −2)abs.min.

66. (0, 1) abs.min., (0, −2) abs.max.

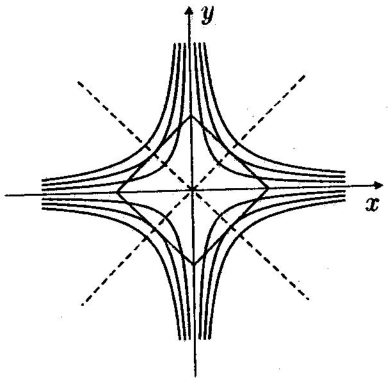
67. (0, 1), (0, −1), (1, 0), (−1, 0) abs.max., (0, 0)abs.min.

68. (1, 2) abs.max., (2, 4) abs.min.

69. $(\frac{2\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3})$ abs.min., $(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3})$ abs.max.

70. $(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{6})$ abs.max.

Řešení. Množina M a vrstevnice funkce f jsou načrtnuty na vedlejším obrázku (vrstevnicemi jsou grafy funkcí $xy = c$, tj. rovnoosé hyperboly $y = \frac{c}{x}$). Stejnou úvahou jako v předchozím příkladu zjistíme, že funkce nabývá absolutního maxima $f_{\max} = \frac{1}{4}$ v bodech $[\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}]$ a absolutního minima $f_{\min} = -\frac{1}{4}$ v bodech $[\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}]$.



Cvičení.

6.1. Najděte lokální extrémy funkcí:

a) $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$

b) $z = xy(4 - x - y)$

c) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

d) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

e) $z = x^2 + xy + y^2 - \ln x - 10 \ln y$

f) $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

g) $z = y\sqrt{1 + x} + x\sqrt{1 + y}$

h) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

i) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x, y, z > 0$

j) $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$

k) $u = xyz(12 - x - 2y - 3z)$

l) $u = x_1 x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n)$, $x_1, x_1, \ldots, x_n > 0$

m) $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$, $x_1, \ldots, x_v > 0$.

6.2. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ splňující uvedené podmínky:

a) $f_x(1, 1) = 0 = f_y(1, 1)$, ale v bodě $[1, 1]$ nenastává lokální extrém,

b) f má v bodě $[0, 1]$ ostré lokální minimum a v bodě $[1, 0]$ ostré lokální maximum.

c) f má v bodě $[-1, 0]$ ostré lokální minimum, v bodě $[0, 0]$ sedlo a v bodě $[1, 0]$ ostré lokální maximum.

6.3. Pomocí vrstevnic funkce f určete její nejmenší a největší hodnotu na množině M:

a) $f(x, y) = x + y$, $M : |x| \le 1, |y| \le 1$,

b) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3$, $M : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1$,

c) $f(x, y) = |x| + |y|$, $M : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \le 1$,

d) $f(x, y, z) = x + y + z$, $M : x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 1$,

e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $M : x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

6.4. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce f na množině M:

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$, M je trojúhelník určený body $A = [0, 2]$, $B = [3, 0]$, $C = [0, -1]$.

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 2$, M je omezená grafy funkcí $y = |x|$ a $y = 2$.

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$, M je trojúhelník určený body $A = [-1, 0]$, $B = [1, 2]$, $C = [3, 0]$.

d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2$, $M = \{[x, y] : x^2 + y^2 \le 1, y \ge |x| - 1\}$.

6.5. Určete absolutní extrémy funkce f na množině M:

a) $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$, $M : 0 \le x, y \le \pi$,

b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $M : |x| + |y| \le 1$,

c) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $M : x^2 + y^2 \le z \le 1$,

d) $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_n + b)}$, $M : a \le x_1, \ldots, x_n \le b$, $0 < a < b$ (tzv. Huyghensova[2] úloha), nejprve řešte úlohu pro $n = 2$.

[2] CHristian Huyghens (1629–1695), nizozemský matematik a fyzik

$= yx^{xy}(1+\ln y)$, $z_y = x^{xy+1}\ln x$ b) $z_x = -\frac{y}{\sqrt{xy-x^2y^2}(1+\sqrt{xy})}$, $z_y =$
$\frac{}{^2(1+\sqrt{xy})}$, c) $z_x = -\frac{1}{y}(\frac{1}{3})^{\frac{x}{y}}\ln 3$, $z_y = \frac{x}{y^2}(\frac{1}{3})^{\frac{x}{y}}\ln 3$ d) $z_x = y[\ln(x+$
$z_y = x[\ln(x+y)+\frac{y}{x+y}]$ e) $z_x = 2(2x+y)^{(2x+y)}[\ln(2x+y)+1]$,
$+y)^{(2x+y)}[\ln(2x+y)+1]$ f) $z_x = -\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$, $z_y = -\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$
$e^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$, $z_y = xe^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$ h) $u_x =$
$u_y = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $u_z = -\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$ i) $z_x = \frac{2(x-y)}{1+(x-y)^4}$, $z_y = -\frac{2(x-y)}{1+(x-y)^4}$
$= \frac{u_z}{z} = 2\cos(x^2+y^2+z^2)$ k) $u_x = y^z x^{y^z-1}$, $u_y = x^{y^z} z y^{z-1}\ln x$,
$y^z\ln x\ln y$. **3.3** a) $z_x = 2\sqrt{5}$, $z_y = 10+\sqrt{5}$ b) $z_x = 0$, $z_y = \frac{1}{4}$
, $z_y = -1$. **3.4** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{3}{2}$. **3.6** a) $z_{xx} = 12x^2-8y^2$, $z_{xy} =$
$_{yy} = 12y^2-8x^2$ b) $z_{xx} = 0$, $z_{xy} = 1-\frac{1}{y^2}$, $z_{yy} = \frac{2x}{y^3}$ c) $z_{xx} = 0$,
$_3$, $z_{yy} = \frac{6x}{y^4}$ d) $z_{xx} = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$, $z_{xy} = \frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$, $z_{yy} = -\frac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$
$2\cos(x+y) - x\sin(x+y)$, $z_{xy} = \cos(x+y) - x\sin(x+y)$,
$\sin(x+y)$ f) $z_{xx} = -\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y}$, $z_{xy} = \frac{2x\sin x^2}{y^2}$, $z_{yy} = \frac{2\cos x^2}{y^3}$
$x^{(x+y)}[(\ln x+\frac{x+y}{x})^2+\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}]$, $z_{xy} = x^{(x+y)}[\ln^2 x+\frac{x+y}{x}\ln x+\frac{1}{x}]$, $z_{yy} =$
x h) $z_{xx} = \frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $z_{xy} = \frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $z_{yy} = -\frac{2x(x^2+2y^2)}{y^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ i) $z_{xx} =$
, $z_{xy} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$, $z_{yy} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$ j) $z_{xx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{xy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$,
$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ k) $z_{xx} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{xy} = \frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{yy} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$
$2y(1+x^2)^{y-2}(-x^2+2x^2y+1)$, $z_{xy} = 2x(1+x^2)^{y-1}[1+y\ln(1+x^2)]$,
$+x^2)^y\ln^2(1+x^2)$.

'OLA 4

dx b) $\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$ c) $\frac{1}{4}dx - \frac{1}{2}dy$ d) $dx + 2\ln 2dy - 2\ln 2dz$
$+ \frac{4}{5}dy$ f) $df = \frac{\sqrt{3}}{4}dx - \frac{1}{4}dy$ g) $df = -2dx + dz$ h) $du =$
$- \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z^2}\ln\frac{x}{y}]$ **4.2** a) $\frac{\pi}{4}+0{,}035$ b) $\frac{\pi}{6}-\frac{0{,}09}{\sqrt{3}}$ c) $2{,}95$ d) $-0{,}06$
$1{,}13$ g) $dV \doteq \frac{50\pi}{3}$ cm^3 h) $dh \doteq 1$ cm. **4.3** a) není diferenco-
např. pro $u = (1,1)$ neexistuje směrová derivace $f_u(0,0)$ b) není
ovatelná, neboť $f_{(1,1)}(0,0)$ neexistuje c) ano $df(0,0) = 0$ **4.4**
$+z = \sqrt{3}$ b) $2x+2y-z = 2$ c) $z_0 = -\frac{\pi}{4}$, $x+y-2z = \frac{\pi}{2}$ d) $z_0 =$
. **4.5** a) $[2,1],[-2,-1]$ b) $\left[\frac{-a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\right]$ c) $[-1/2, 1/2]$

d) $[1,1]$ e) $[\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, $[-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ f) tečna existuje $\iff a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$; pak $[x_1,\ldots,x_n] = [-a_1,\ldots,-a_n]$. **4.6** a) $f_{(1,2)}(1,1) = 3$ b) $f_{(1,0,1)}(0,1,0) = 0$. **4.7** a) $d^2z = \frac{(dx)^2}{x} + \frac{2dx\,dy}{y} - \frac{(dy)^2}{y^2}$ b) $d^2z = 6(x-y)(dx)^2 + 12(y-x)dxdy + 6(x-y)(dy)^2$ c) $d^nz = e^{x+y}\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}[n^2+2j^2-2nj-n+x^2+y^2+2xj+2(n-j)y](dx)^j(dy)^{n-j}$ d) $d^nz = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y)^n}(dx+dy)^n$ e) $d^nz = \frac{2}{(x+y)^{n+1}}\sum_{j=0}^n(-1)^j\binom{n}{j}[(n-j)x+jy](dx)^j(dy)^{n-j}$ f) $d^nu = n!e^{x+y+z}\sum_{i+j+k=n}\frac{(x+i)(y+j)(z+k)}{i!j!k!}(dx)^i(dy)^j(dz)^k$. **4.8** a) $\frac{x^2}{2}+x\ln y-\cos y+C$, b) $\frac{x^2}{2}\sin 2y+C$ c) $\sqrt{x^2+y^2}+C$ d) $xy^2-x+\frac{3}{2}y^2+C$. **4.9** a) $x^3+y^3+z^3-3xyz+2x+y\ln y+z$ b) $\operatorname{arctg} xyz$.

KAPITOLA 5

5.1 a) $z(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$ b) $z(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ c) $u(x,y,z) = f(x+y-2z, x-2y+z)$. **5.2** a) $z_{uv} = 0$, $z(x,y) = f(x-2\sqrt{y}) + g(x+2\sqrt{y})$ b) $z_{vv}0$, $z(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) + xyg(\sqrt{x^2+y^2})$ c) $u(4-uv)z_{uv} - 2z_v = 0$ d) $z_{vv}+2v^3z_v = 0$ e) $(u^2-v^2)z_{uv} - vz_u = 0$ f) $(u^2-v^2)z_{uv}+vz_u-uz_v = 0$ g) $uz_{uu}-xz_{uv}+z_u = 0$. **5.4** a) $T_2(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}[(x-\frac{1}{2})+(y-\frac{1}{2})]-\frac{\sqrt{2}}{4}[(x-\frac{1}{2})^2+2(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})+(y-\frac{1}{2})^2]$ b) $T_2(x,y) = \frac{\pi}{4}+x-\frac{xy}{2}$ c) $T_2(x,y) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ d) $T_2(x,y) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)+\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{1}{4}(y-1)^2$ e) $T_2(x,y) = x-x(y-1)$ f) $T_2(x,y) = \frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}[(x-1)+(y-1)]-\frac{1}{2}(x-1)(y-1)$ g) $T_2(x,y,z) = 1+(x-1)+(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)$. **5.5** a) $\frac{\pi}{4}+0{,}0297$ b) $\frac{1}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}+\frac{2\sqrt{6}-4\sqrt{3}-1}{2}\frac{\pi^2}{2\cdot 180^2}$.

KAPITOLA 6

6.1 a) $z_{\min} = -1$ v bodě $[1,0]$ b) $z_{\max} = \frac{64}{27}$ v $[\frac{4}{3},\frac{4}{3}]$, ve stacionárních bodech $[0,0],[0,4],[4,0]$ extrém nenastává c) $z_{\max} = 16$ v $[2,-2]$ d) $z_{\min} = 30$ v $[5,2]$ e) $z_{\min} = 7-10\ln 2$ v $[1,2]$, f) V jediném stacionárním bodě $[1,1]$ extrém nenastává g) $z_{\min} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ v $[-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}]$ h) $u_{\min} = -6913$ v $[24,-144,-1]$ i) $u_{\min} = 4$ v $[\frac{1}{2},1,1]$ j) $z_{\min} = 3\sqrt[3]{3}a^2$ v $[\frac{a}{\sqrt[3]{3}},\frac{a}{\sqrt[3]{3}}]$ k) $u_{\max} = \frac{27}{2}$, v $[3,\frac{3}{2},1]$ l) $u_{\max} = \left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$ v $x_1 = \cdots = x_n = \frac{2}{n^2+n+2}$ m) $u_{\min} = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$ v $x_1 = 2^{\frac{1}{n+1}}, x_2 = 2^{\frac{2}{n+1}},\ldots x_n = 2^{\frac{n}{n+1}}$. **6.3** a) $f_{\min} = -2$ v $[-1,-1]$, $f_{\max} = 2$ v $[1,1]$ b) $f_{\min} = \frac{3}{2}$ v $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $f_{\max} = 3$ v $[0,0]$, c) $f_{\min} = 2-\sqrt{2}$ v $[1-\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{1}{\sqrt{2}}]$, $f_{\max} = 2+\sqrt{2}$ v $[1+\frac{1}{\sqrt{2}},1+\frac{1}{\sqrt{2}}]$ d) $f_{\min} = -\sqrt{2}$ v $[-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0]$, $f_{\max} = \sqrt{2}+1$ v $[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1]$ e) $f_{\min} = 0$ v $[0,0,0]$, $f_{\max} = 1$ v bodech $[x,y,0]$, kde $x^2+y^2 = 1$. **6.4** a) $f_{\max} = 7$ v $[0,-1]$, $f_{\min} = -4$ v $[1,1]$ b) $f_{\max} = 22$ v $[2,2]$, $f_{\min} = -2$ v $[-2,2]$ c) $f_{\max} = 6$ v $[3,0]$, $f_{\min} = -1$ v $[1,1]$ d) $f_{\max} = -\frac{1}{2}$ v $[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$,