

Řešené příklady z diferenciálního počtu

Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešené příklady z diferenciálního počtu

Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

Řešené příklady z diferenciálního počtu

Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Řešené příklady z diferenciálního počtu

Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = 0,003$.

Řešené příklady z diferenciálního počtu

Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = 0,003$.
Potom je $f(x_0) = f(1) = 2$ a $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$.

Řešené příklady z diferenciálního počtu

Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = 0,003$.

Potom je $f(x_0) = f(1) = 2$ a $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$.

Tedy $f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot \ln 2$.

Řešené příklady z diferenciálního počtu

Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = 0,003$.

Potom je $f(x_0) = f(1) = 2$ a $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$.

Tedy $f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot \ln 2$.

Protože $\ln 2 \doteq 0,69315$, dostaneme $2^{1,003} \doteq 2 + 2 \cdot \ln 2 \cdot 0,003 \doteq 2,004$.

Řešené příklady z diferenciálního počtu

Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = 0,003$.

Potom je $f(x_0) = f(1) = 2$ a $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$.

Tedy $f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot \ln 2$.

Protože $\ln 2 \doteq 0,69315$, dostaneme $2^{1,003} \doteq 2 + 2 \cdot \ln 2 \cdot 0,003 \doteq 2,004$.

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 81$ a $x - x_0 = -1$.

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 81$ a $x - x_0 = -1$.
Potom je $f(x_0) = f(81) = 9$ a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 81$ a $x - x_0 = -1$.

Potom je $f(x_0) = f(81) = 9$ a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Tedy $f'(x_0) = f'(81) = \frac{1}{18}$.

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 81$ a $x - x_0 = -1$.

Potom je $f(x_0) = f(81) = 9$ a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Tedy $f'(x_0) = f'(81) = \frac{1}{18}$.

Takže $\sqrt{80} \doteq 9 + \frac{1}{18} \cdot (-1) \doteq 8,9445$.

Rovnice tečny a normály

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce

$f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}$ v bodě $T = [1; ?]$.

Rovnice tečny a normály

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} \text{ v bodě } T = [1; ?].$$

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.

Rovnice tečny a normály

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} \text{ v bodě } T = [1; ?].$$

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.

V našem případě je $y_0 = f(1) = 0$ a protože

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

je $f'(1) = -1$.

Rovnice tečny a normály

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} \text{ v bodě } T = [1; ?].$$

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.

V našem případě je $y_0 = f(1) = 0$ a protože

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

je $f'(1) = -1$.

Tedy rovnice hledané tečny je $y = -(x - 1)$,

Rovnice tečny a normály

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} \text{ v bodě } T = [1; ?].$$

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.

V našem případě je $y_0 = f(1) = 0$ a protože

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

je $f'(1) = -1$.

Tedy rovnice hledané tečny je $y = -(x - 1)$,

rovnice normály je pro $f'(x_0) \neq 0$

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0),$$

tedy $y = x - 1$.

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ v bodě $T = [1/2; ?]$.

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ v bodě $T = [1/2; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ v bodě $T = [1/2; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.

V našem případě je $y_0 = f(1/2) = \frac{-\ln 3}{2}$.

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ v bodě $T = [1/2; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.

V našem případě je $y_0 = f(1/2) = \frac{-\ln 3}{2}$.

Protože $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2}$, je $f'(1/2) = \frac{8}{3}$.

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ v bodě $T = [1/2; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.

V našem případě je $y_0 = f(1/2) = \frac{-\ln 3}{2}$.

Protože $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2}$, je $f'(1/2) = \frac{8}{3}$.

Tedy rovnice hledané tečny je

$$y + \frac{\ln 3}{2} = \frac{8}{3}(x - 1/2)$$

a rovnice normály je

$$y + \frac{\ln 3}{2} = -\frac{3}{8}(x - 1/2).$$

L'Hospitalovo pravidlo

Příklad: Najděte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

L'Hospitalovo pravidlo

Příklad: Najděte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\frac{0}{0}$. Všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla jsou splněny. Pomocí něj dostaneme

L'Hospitalovo pravidlo

Příklad: Najděte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}x - x}{x - \sin x}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\frac{0}{0}$. Všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla jsou splněny. Pomocí něj dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} =$$

L'Hospitalovo pravidlo

Příklad: Najděte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}x - x}{x - \sin x}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\frac{0}{0}$. Všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla jsou splněny. Pomocí něj dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}x - x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2. \end{aligned}$$

Příklad: Najděte $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot gx$.

Příklad: Najděte $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot gx$.

Řešení: Limita je typu $0 \cdot \infty$.

Příklad: Najděte $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$.

Řešení: Limita je typu $0 \cdot \infty$. Ale lze psát

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \cdot \sin x}{\cos x} = 1.$$

Lokální extrémy

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

Lokální extrémy

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

Řešení: Funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ má spojité derivace všech řádů na celé množině \mathbb{R} .

Lokální extrémy

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

Řešení: Funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ má spojité derivace všech řádů na celé množině \mathbb{R} . Její derivace je $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

Lokální extrémý

Příklad: Nalezněte lokální extrémý funkce

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

Řešení: Funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ má spojité derivace všech řádů na celé množině \mathbb{R} . Její derivace je

$$y' = 3x^2 - 12x + 9.$$

Tato derivace je rovna nule v bodech $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$.

Lokální extrémy

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

Řešení: Funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ má spojité derivace všech řádů na celé množině \mathbb{R} . Její derivace je

$$y' = 3x^2 - 12x + 9.$$

Tato derivace je rovna nule v bodech $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$.

Protože druhá derivace funkce $y'' = 6x - 12$ je v bodě $x_1 = 1$ záporná, má daná funkce v bodě $x_1 = 1$ lokální maximum $y(1) = 0$.

Lokální extrémy

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

Řešení: Funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ má spojité derivace všech řádů na celé množině \mathbb{R} . Její derivace je $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

Tato derivace je rovna nule v bodech $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$.

Protože druhá derivace funkce $y'' = 6x - 12$ je v bodě $x_1 = 1$ záporná, má daná funkce v bodě $x_1 = 1$ lokální maximum $y(1) = 0$.

Naopak v bodě $x_2 = 3$ je druhá derivace kladná. Tedy v tomto bodě má funkce lokální lokální minimum $y(3) = -4$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \sqrt{x} \ln x$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \sqrt{x} \ln x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je interval $(0; +\infty)$. Na tomto intervalu má daná funkce spojitě derivace všech řádů.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \sqrt{x} \ln x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je interval $(0; +\infty)$. Na tomto intervalu má daná funkce spojitě derivace všech řádů.

Její první derivace $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + \ln x)$ je rovna nule v bodě $x = e^{-2}$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \sqrt{x} \ln x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je interval $(0; +\infty)$. Na tomto intervalu má daná funkce spojitě derivace všech řádů.

Její první derivace $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + \ln x)$ je rovna nule v bodě $x = e^{-2}$.

Protože na intervalu $(0; e^{-2})$ je derivace záporná, je na tomto intervalu funkce klesající.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \sqrt{x} \ln x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je interval $(0; +\infty)$. Na tomto intervalu má daná funkce spojitě derivace všech řádů.

Její první derivace $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + \ln x)$ je rovna nule v bodě $x = e^{-2}$.

Protože na intervalu $(0; e^{-2})$ je derivace záporná, je na tomto intervalu funkce klesající.

Naopak na intervalu $(e^{-2}; +\infty)$ je první derivace kladná, funkce tedy je na tomto intervalu rostoucí. Proto má funkce v bodě $x = e^{-2}$ lokální minimum $y = -2e^{-1}$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce
 $y = \operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce

$$y = \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá množina \mathbb{R} a funkce má na této množině spojitě derivace všech řádů.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce

$$y = \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá množina \mathbb{R} a funkce má na této množině spojitě derivace všech řádů.

Její první derivace $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$ je rovna nule v bodě $x = 1$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce

$$y = \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá množina \mathbb{R} a funkce má na této množině spojitě derivace všech řádů.

Její první derivace $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$ je rovna nule v bodě $x = 1$.

Protože pro $x < 1$ je první derivace kladná a pro $x > 1$ záporná, má funkce v bodě $x = 1$ lokální maximum, $y(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Inflexní body

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = 3x^2 - x^3$.

Inflexní body

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = 3x^2 - x^3$.

Řešení: První dvě derivace funkce y jsou $y' = 6x - 3x^2$ a $y'' = 6 - 6x$.

Inflexní body

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = 3x^2 - x^3$.

Řešení: První dvě derivace funkce y jsou $y' = 6x - 3x^2$ a $y'' = 6 - 6x$.

Druhá derivace je kladná na intervalu $(-\infty; 1)$ a záporná na intervalu $(1; +\infty)$.

Inflexní body

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = 3x^2 - x^3$.

Řešení: První dvě derivace funkce y jsou $y' = 6x - 3x^2$ a $y'' = 6 - 6x$.

Druhá derivace je kladná na intervalu $(-\infty; 1)$ a záporná na intervalu $(1; +\infty)$.

Proto je na intervalu $(-\infty; 1)$ konvexní a na intervalu $(1; +\infty)$ konkávní. Tedy bod $x = 1$ je jejím inflexním bodem.

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce je celá množina \mathbb{R} .

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce je celá množina \mathbb{R} .

První dvě derivace jsou $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ a $y''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce je celá množina \mathbb{R} .

První dvě derivace jsou $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ a $y''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Protože je druhá derivace kladná na celém \mathbb{R} , je tato funkce konvexní na celém \mathbb{R} .

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = 1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = 1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.

Protože $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = -1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = 1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.

Protože $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = -1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.

V obou bodech $x = \pm\infty$ platí

$$A = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x(x^2 - 1)} = 2.$$

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = 1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.

Protože $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = -1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.

V obou bodech $x = \pm\infty$ platí

$$A = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x(x^2 - 1)} = 2.$$

Dále je

$$B = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1.$$

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = 1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.

Protože $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = -1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.

V obou bodech $x = \pm\infty$ platí

$$A = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x(x^2 - 1)} = 2.$$

Dále je

$$B = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1.$$

Tedy přímka $y = Ax + B = 2x + 1$ je asymptota se směrnicí ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = \pm\infty$.

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \operatorname{arctg}x + 3x$.

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \arctg x + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa \mathbb{R} .

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \arctg x + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa \mathbb{R} .

V bodech $x = \pm\infty$ je $A = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$.

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \arctg x + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa \mathbb{R} .

V bodech $x = \pm\infty$ je $A = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$.

Protože

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2},$$

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \operatorname{arctg}x + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa \mathbb{R} .

V bodech $x = \pm\infty$ je $A = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$.

Protože

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2},$$

je přímka $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = +\infty$.

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \operatorname{arctg}x + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa \mathbb{R} .

V bodech $x = \pm\infty$ je $A = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$.

Protože

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2},$$

je přímka $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = +\infty$.

Protože

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}x = \frac{-\pi}{2},$$

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \operatorname{arctg}x + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa \mathbb{R} .

V bodech $x = \pm\infty$ je $A = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$.

Protože

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2},$$

je přímka $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = +\infty$.

Protože

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}x = \frac{-\pi}{2},$$

je přímka $y = 3x - \frac{\pi}{2}$ asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = -\infty$.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina \mathbb{R} .

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina \mathbb{R} .

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Protože

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina \mathbb{R} .

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Protože

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty.

Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina \mathbb{R} .

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Protože

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty.

Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$. Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina \mathbb{R} .

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Protože

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty.

Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$. Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět. Spočítáme první derivaci

$$f'(x) = (x - 2)^2 + 2(x + 1)(x - 2) = 3x(x - 2).$$

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina \mathbb{R} .

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Protože

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty.

Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$. Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět. Spočítáme první derivaci

$$f'(x) = (x - 2)^2 + 2(x + 1)(x - 2) = 3x(x - 2).$$

$f'(x) = 0$ pro $x = 0$ a $x = 2$. $f'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (2; \infty)$; na těchto intervalech je funkce $f(x)$ rostoucí.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina \mathbb{R} .

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Protože

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty.

Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$. Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět. Spočítáme první derivaci

$$f'(x) = (x - 2)^2 + 2(x + 1)(x - 2) = 3x(x - 2).$$

$f'(x) = 0$ pro $x = 0$ a $x = 2$. $f'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (2; \infty)$; na těchto intervalech je funkce $f(x)$ rostoucí.

$f'(x) < 0$ pro $x \in (0; 2)$; na tomto intervalu je funkce $f(x)$ klesající.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina \mathbb{R} .

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Protože

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty.

Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$. Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět. Spočítáme první derivaci

$$f'(x) = (x - 2)^2 + 2(x + 1)(x - 2) = 3x(x - 2).$$

$f'(x) = 0$ pro $x = 0$ a $x = 2$. $f'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (2; \infty)$; na těchto intervalech je funkce $f(x)$ rostoucí.

$f'(x) < 0$ pro $x \in (0; 2)$; na tomto intervalu je funkce $f(x)$ klesající. V bodě $x = 0$ je lokální maximum $f(0) = 4$ a v bodě $x = 2$ je lokální minimum $f(2) = 0$.

Druhá derivace je

$$f''(x) = 6x - 6,$$

$f''(x) = 0$ pro $x = 1$. $f''(x) > 0$ pro $x \in (1; +\infty)$; v tomto intervalu je funkce $f(x)$ konvexní.

Druhá derivace je

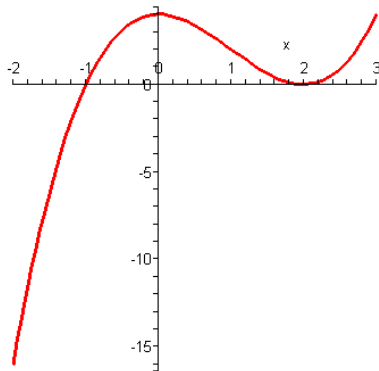
$$f''(x) = 6x - 6,$$

$f''(x) = 0$ pro $x = 1$. $f''(x) > 0$ pro $x \in (1; +\infty)$; v tomto intervalu je funkce $f(x)$ konvexní. $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty; 1)$; v tomto intervalu je funkce konkávní. Bod $x = 1$ je inflexní bod dané funkce.

Druhá derivace je

$$f''(x) = 6x - 6,$$

$f''(x) = 0$ pro $x = 1$. $f''(x) > 0$ pro $x \in (1; +\infty)$; v tomto intervalu je funkce $f(x)$ konvexní. $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty; 1)$; v tomto intervalu je funkce konkávní. Bod $x = 1$ je inflexní bod dané funkce. Znáznorněme si ještě graf funkce.



Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina \mathbb{R} . Funkce je kladná.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina \mathbb{R} . Funkce je kladná.

Platí $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina \mathbb{R} . Funkce je kladná.

Platí $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.

Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina \mathbb{R} . Funkce je kladná.

Platí $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.

Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.

Její derivace je

$$f'(x) = -2x^3 e^{-x^2}.$$

Ta je na intervalu $(0; +\infty)$ záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina \mathbb{R} . Funkce je kladná.

Platí $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.

Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.

Její derivace je

$$f'(x) = -2x^3 e^{-x^2}.$$

Ta je na intervalu $(0; +\infty)$ záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá. Na intervalu $(-\infty; 0)$ je první derivace funkce $f(x)$ kladná. Tedy funkce na tomto intervalu roste.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina \mathbb{R} . Funkce je kladná.

Platí $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.

Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.

Její derivace je

$$f'(x) = -2x^3 e^{-x^2}.$$

Ta je na intervalu $(0; +\infty)$ záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá. Na intervalu $(-\infty; 0)$ je první derivace funkce $f(x)$ kladná. Tedy funkce na tomto intervalu roste. Proto je v bodě $x = 0$ lokální maximum vyšetřované funkce, $f(0) = 1$.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina \mathbb{R} . Funkce je kladná.

Platí $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.

Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.

Její derivace je

$$f'(x) = -2x^3 e^{-x^2}.$$

Ta je na intervalu $(0; +\infty)$ záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá. Na intervalu $(-\infty; 0)$ je první derivace funkce $f(x)$ kladná. Tedy funkce na tomto intervalu roste. Proto je v bodě $x = 0$ lokální maximum vyšetřované funkce, $f(0) = 1$.

Druhá derivace funkce je

$$f''(x) = 2x^2(2x^2 - 3) \cdot e^{-x^2}.$$

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina \mathbb{R} . Funkce je kladná.

Platí $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.

Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.

Její derivace je

$$f'(x) = -2x^3 e^{-x^2}.$$

Ta je na intervalu $(0; +\infty)$ záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá. Na intervalu $(-\infty; 0)$ je první derivace funkce $f(x)$ kladná. Tedy funkce na tomto intervalu roste. Proto je v bodě $x = 0$ lokální maximum vyšetřované funkce, $f(0) = 1$.

Druhá derivace funkce je

$$f''(x) = 2x^2(2x^2 - 3) \cdot e^{-x^2}.$$

Ta je kladná na intervalech $(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}})$ a $(\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty)$. Na těchto intervalech je tedy funkce $f(x)$ konvexní.

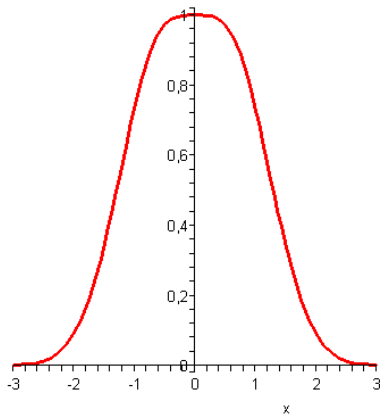
Na intervalech $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0)$ a $(0; \sqrt{\frac{3}{2}})$ je druhá derivace záporná.
Tedy funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}})$.

Na intervalech $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0)$ a $(0; \sqrt{\frac{3}{2}})$ je druhá derivace záporná.

Tedy funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}})$. Body $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ jsou inflexní body dané funkce. Bod $x = 0$ není jejím inflexním bodem.

Na intervalech $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0)$ a $(0; \sqrt{\frac{3}{2}})$ je druhá derivace záporná.

Tedy funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}})$. Body $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ jsou inflexní body dané funkce. Bod $x = 0$ není jejím inflexním bodem. Znáznorněme si ještě graf funkce.



Obrázek: Průběh funkce $y = f(x)$.

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Řešení: Protože $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$,

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Řešení: Protože $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$, je

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c; x \in (0; +\infty).$$

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Řešení: Protože $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$, je

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c; x \in (0; +\infty).$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Řešení: Protože $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$, je

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c; x \in (0; +\infty).$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Řešení:

Protože platí $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$,

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Řešení: Protože $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$, je

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c; x \in (0; +\infty).$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Řešení:

Protože platí $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$, je

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = x - \arctg x + c; x \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Řešení: Jelikož platí $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, je

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Řešení: Jelikož platí $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, je

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + c; \quad x \neq \frac{2k+1}{2}\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Neurčitý integrál - metoda per partes

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \ln x dx$.

Neurčitý integrál - metoda per partes

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \ln x dx$.

Řešení: Integrál najdeme integrací per partes pro volbu $u' = 1$, $v = \ln x$. Dopočítáme $u = x$, $v' = \frac{1}{x}$ a dostaneme

Neurčitý integrál - metoda per partes

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \ln x dx$.

Řešení: Integrál najdeme integrací per partes pro volbu $u' = 1$, $v = \ln x$. Dopočítáme $u = x$, $v' = \frac{1}{x}$ a dostaneme

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx$$

Neurčitý integrál - metoda per partes

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \ln x dx$.

Řešení: Integrál najdeme integrací per partes pro volbu $u' = 1$, $v = \ln x$. Dopočítáme $u = x$, $v' = \frac{1}{x}$ a dostaneme

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C; \quad x > 0.$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Řešení:

Integrál najdeme integrací per partes pro $v = x^2$, $u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 2x$, $u = e^{-2x} / -2$:

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Řešení:

Integrál najdeme integrací per partes pro $v = x^2$, $u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 2x$, $u = e^{-2x} / -2$:

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx,$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Řešení:

Integrál najdeme integrací per partes pro $v = x^2$, $u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 2x$, $u = e^{-2x} / -2$:

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx,$$

znovu použijeme per partes pro $v = x$, $u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 1$, $u = e^{-2x} / -2$:

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Řešení:

Integrál najdeme integrací per partes pro $v = x^2$, $u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 2x$, $u = e^{-2x} / -2$:

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx,$$

znovu použijeme per partes pro $v = x$, $u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 1$, $u = e^{-2x} / -2$:

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx =$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Řešení:

Integrál najdeme integrací per partes pro $v = x^2$, $u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 2x$, $u = e^{-2x} / -2$:

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx,$$

znovu použijeme per partes pro $v = x$, $u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 1$, $u = e^{-2x} / -2$:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c; x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad: Najděte integrál $\int e^{-2x} \sin 3x dx$.

Příklad: Najděte integrál $\int e^{-2x} \sin 3x dx$.

Řešení:

Integrály tohoto typu lze najít dvojí integrací per partes. Pomocí ní získáme vztah

$$\int e^{-2x} \sin 3x dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x + \frac{3}{2} \int e^{-2x} \cos 3x dx =$$

Příklad: Najděte integrál $\int e^{-2x} \sin 3x dx$.

Řešení:

Integrály tohoto typu lze najít dvojí integrací per partes. Pomocí ní získáme vztah

$$\begin{aligned} \int e^{-2x} \sin 3x dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x + \frac{3}{2} \int e^{-2x} \cos 3x dx = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{-2x} \cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{-2x} \sin 3x dx. \end{aligned}$$

Příklad: Najděte integrál $\int e^{-2x} \sin 3x dx$.

Řešení:

Integrály tohoto typu lze najít dvojí integrací per partes. Pomocí ní získáme vztah

$$\begin{aligned} \int e^{-2x} \sin 3x dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x + \frac{3}{2} \int e^{-2x} \cos 3x dx = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{-2x} \cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{-2x} \sin 3x dx. \end{aligned}$$

To je rovnice, ze které lze vypočítat hledaný integrál. Snadno z ní dostaneme

$$\left(1 + \frac{9}{4}\right) \int e^{-2x} \sin 3x dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{-2x} \cos 3x,$$

Příklad: Najděte integrál $\int e^{-2x} \sin 3x dx$.

Řešení:

Integrály tohoto typu lze najít dvojí integrací per partes. Pomocí ní získáme vztah

$$\begin{aligned} \int e^{-2x} \sin 3x dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x + \frac{3}{2} \int e^{-2x} \cos 3x dx = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{-2x} \cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{-2x} \sin 3x dx. \end{aligned}$$

To je rovnice, ze které lze vypočítat hledaný integrál. Snadno z ní dostaneme

$$\left(1 + \frac{9}{4}\right) \int e^{-2x} \sin 3x dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{-2x} \cos 3x,$$

tedy $\int e^{-2x} \sin 3x dx = -\frac{e^{-2x}}{13} (2 \sin 3x + 3 \cos 3x) + C; x \in \mathbb{R}$.

Neurčitý integrál - substituční metoda

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

Neurčitý integrál - substituční metoda

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

Řešení:

Substitucí $x = y\sqrt{\frac{2}{3}}$, pro kterou je $dx = \sqrt{\frac{2}{3}}dy$, dostaneme

Neurčitý integrál - substituční metoda

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

Řešení:

Substitucí $x = y\sqrt{\frac{2}{3}}$, pro kterou je $dx = \sqrt{\frac{2}{3}}dy$, dostaneme

$$\int \frac{dx}{2+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dy}{1+y^2} =$$

Neurčitý integrál - substituční metoda

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

Řešení:

Substitucí $x = y\sqrt{\frac{2}{3}}$, pro kterou je $dx = \sqrt{\frac{2}{3}}dy$, dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2+3x^2} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dy}{1+y^2} = \\ &= \frac{\operatorname{arctg}(y)}{\sqrt{6}} + C = \frac{\operatorname{arctg}\frac{3}{2}x}{\sqrt{6}} + C; \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

Řešení:

Protože platí $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$,

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

Řešení:

Protože platí $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$, je

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int (x - 1) dx + \int \frac{1}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{1+x} dx,$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

Řešení:

Protože platí $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$, je

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int (x - 1) dx + \int \frac{1}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{1+x} dx,$$

jednoduchou substitucí $y = 1 + x$; $dy = dx$ dostaneme

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{y} dy = \frac{x^2}{2} - x + \ln|y| + c =$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

Řešení:

Protože platí $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$, je

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int (x - 1) dx + \int \frac{1}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{1+x} dx,$$

jednoduchou substitucí $y = 1 + x$; $dy = dx$ dostaneme

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{y} dy = \frac{x^2}{2} - x + \ln|y| + c =$$

$$\frac{x^2}{2} - x + \ln|1+x| + c; \quad x \neq -1.$$

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Řešení: Protože $\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$,

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Řešení: Protože $\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$, dostaneme po substituci $e^x = y$,
pro kterou je $e^x dx = dy$,

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Řešení: Protože $\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$, dostaneme po substituci $e^x = y$, pro kterou je $e^x dx = dy$,

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \operatorname{arctg}(y) + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C$$