Dynamická makroekonomie
ESF MU, Jaro 2007
Vyučující: Petr Harasimovič

Domácí úkol č. 1 – Bellmanovy rovnice

Odevzdat 4. června na přednášce

Při řešení tohoto úkolu můžete používat jakékoli materiály a doporučuji spolupracovat se svými spolužáky. Nicméně úkol musíte opravdu vyřešit (tj. nikoli pouze opsat) a odevzdat samostatné řešení. Úloha, která bude zjevně opsána a na níž je vidět, že autor neví, co napsal, nebude bodována.

1. (4 body) Uvažujme následující CRRA (Constant relative risk aversion) užitkovou funkci

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}. \tag{1}$$

   (a) (2 body) Ukažte, že míra relativní averze k riziku definovaná jako $\frac{-u''(c)c}{u'(c)}$ je rovna γ.

   (b) (2 body) Ukažte, že pro $\gamma = 1$ užitková funkce s konstantní mírou relativní averze k riziku má tvar $u(c) = \log(c)$. (Nápověda: Nejdříve transformujte $u(c)$ s využitím ekonomické teorie, konkrétně ordinality užitku.)

2. (11 bodů) Uvažujme ekonomiku s velkým množstvím identických lidí (normalizováno na 1, tj. počet lidí v této ekonomice je 1), kteří získávají užitek ze spotřeby spotřebních statků a volného času. Produkt je vyráběn podle Cobb-Douglasovy produkční funkce s využitím aktuální nabídky práce a stávající zásoby kapitálu, příčemž ne všechen kapitál musí být při výrobě využit. Produkt může být spotřebován nebo investován do výroby nového kapitálu. Kapitál se při výrobě opotřebovává v závislosti na míře jeho využití. Neopotřebovaný kapitál může být také spotřebován. V každém období dostane každý agent přidělenu jednu jednotku času, kterou může využít k práci nebo pro volný čas.

   Uvažujme problém sociálního plánovače, který se snaží maximalizovat užitek representativního agenta za předpokladu, že budou dodrženy rozpočtové možnosti ekonomiky. Jeho maximalizační problém vypadá následovně

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\nu \log(c_t) + (1-\nu)\log(1-h_t)], \tag{2}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} = (u_t k_t)^{\alpha} h^{(1-\alpha)} + (1-\delta(u_t))k_t, \tag{3}$$

kde $\beta \in (0,1), \nu \in (0,1)$ a $\alpha \in (0,1)$ jsou parametry, c_t je spotřeba v čase t, h_t je podíl času v období t stráveného prací a u_t je míra využití kapitálu v čase t. $\delta(u)$ je funkce, která udává míru opotřebení kapitálu v závislosti na stupni jeho využití při výrobě. k_t je zásoba kapitálu, kterou má sociální plánovač k dispozici v čase t.

(a) (2 body) Vypište zřetelně stavové a kontrolní proměnné. U stavových proměnných uveďte, zda jsou endogenní nebo exogenní.

(b) (2 body) Napište Bellmanovu rovnici (BE) se všemi příslušnými omezeními, uveďte proměnné, přes které maximalizujete.

(c) (5 bodů) Odvoďte Eullerovu rovnici (EE) a ostatní podmínky (rovnice), které charakterizují řešení vaší BE. Všechny podmínky ekonomicky interpretujte.

(d) (1 bod) Napište podmínku transversality (TVC) a interpretujte ji.

(e) (1 bod) Napište podmínky, které charakterizují stacionární rovnováhu (Steady State). Nemusíte ji řešit, steady statové hodnoty všech proměnných zřetelně odlište od běžných hodnot (např. c vs. $\bar{c}$).

3. (1 bod) Předpokládejte, že produkt v této ekonomice je vyráběn velkým množstvím identických firem. Vyřešte maximalizační problém firmy, která najímá kapitál a práci na dokonale konkurenčním trhu výrobních faktorů a prodává svoji produkci na dokonale konkurenčním trhu statků. Všechny podmínky interpretujte.

$$\max y - [(r + \delta(u))k + wh], s.t. \tag{4}$$
$$y = f(k, h, u), \tag{5}$$

kde r a w jsou úroková míra, respektive mzda a ostatní proměnné mají stejný význam jako v otázce 2. (Pozn. Firma bere ceny jako dané a řeší jednoduchý statický problém.)

4. (4 body) Uvažujte stejnou ekonomiku jako v otázce 2, ale nyní předpokládejte, že místo sociálního plánovače jsou zdroje alokovány trhem. Vyřešte optimalizační problém agenta, který bere ceny jako dané.

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\nu \log(c_t) + (1-\nu)\log(1-h_t)], \tag{6}$$
$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} = (1+r)k_t + wh_t, \tag{7}$$

kde všechny proměnné mají stejný význam jako v otázkách 2 a 3. (Pozn. Ceny jsou v agentově maximalizačním problému brány jako parametry, nikoliv jako stavové proměnné.)

(a) (2 body) Zopakujte kroky $a - d$ z otázky č. 2.

(b) (2 body) Dále využijte váš výsledek z otázky č. 3 a ukažte, že problém sociálního plánovače a problém agenta čelícího trhu vedou ke stejné alokaci zdrojů.