Dynamická makroekonomie
ESF MU, Jaro 2007
Vyučující: Petr Harasimovič

Domácí úkol č. 1 – řešení

Při řešení tohoto úkolu můžete používat jakékoli materiály a doporučuji spolupracovat se svými spolužáky. Nicméně úkol musíte opravdu vyřešit (tj. nikoli pouze opsat) a odevzdat samostatné řešení. Úloha, která bude zjevně opsána a na níž je vidět, že autor neví, co napsal, nebude bodována.

1. (4 body) Uvažujme následující CRRA (Constant relative risk aversion) užitkovou funkci

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}. \tag{1}$$

(a) (2 body) Ukažte, že míra relativní averze k riziku definovaná jako $\frac{-u''(c)c}{u'(c)}$ je rovna γ.

Požadovaný výsledek dostaneme dosazením výrazů pro první a druhou derivaci

$$u'(c) = c^{-\gamma}, \tag{2}$$
$$u''(c) = -\gamma c^{-(1+\gamma)} \tag{3}$$

do výše uvedeného vzorce. Také si všimněte, že převrácená hodnota tohoto výrazu je elasticita substituce, která je pro CRRA užitkové funkce konstantní.

(b) (2 body) Ukažte, že pro $\gamma = 1$ užitková funkce s konstantní mírou relativní averze k riziku má tvar $u(c) = \log(c)$. (Nápověda: Nejdříve transformujte $u(c)$ s využitím ekonomické teorie, konkrétně ordinality užitku.)

Pouhé dosazení $\gamma = 1$ do výrazu pro CRRA užitkovou funkci nám moc nepomůže. Po transformaci (1) na

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} \tag{4}$$

však můžeme využít L'Hospitalova pravidla a ukázat, že platí

$$\lim_{\gamma\to 1} \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} = \lim_{\gamma\to 1} \frac{-\log(c)c^{1-\gamma}}{-1} = \log(c). \tag{5}$$

2. (11 bodů) Uvažujme ekonomiku s velkým množstvím identických lidí (normalizováno na 1, tj. počet lidí v této ekonomice je 1), kteří získávají užitek ze spotřeby spotřebních statků a volného času. Produkt je vyráběn podle Cobb-Douglasovy produkční funkce s využitím aktuální nabídky práce a stávající zásoby kapitálu, příčemž ne všechen kapitál musí být při výrobě využit. Produkt může být spotřebován nebo investován do výroby nového kapitálu. Kapitál se při výrobě opotřebovává v závislosti na míře jeho využití. Neopotřebovaný kapitál může být také spotřebován. V každém období dostane každý agent přidělenu jednu jednotku času, kterou může využít k práci nebo pro volný čas.

   Uvažujme problém sociálního plánovače, který se snaží maximalizovat užitek representativního agenta za předpokladu, že budou dodrženy rozpočtové možnosti ekonomiky. Jeho maximalizační problém vypadá následovně

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\nu \log(c_t) + (1-\nu) \log(1-h_t)], \tag{6}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} = (u_t k_t)^\alpha h_t^{(1-\alpha)} + (1-\delta(u_t))k_t, \tag{7}$$

   kde $\beta \in (0,1), \nu \in (0,1)$ a $\alpha \in (0,1)$ jsou parametry, c_t je spotřeba v čase t, h_t je podíl času v období t stráveného prací a u_t je míra využití kapitálu v čase t. $\delta(u)$ je funkce, která udává míru opotřebení kapitálu v závislosti na stupni jeho využití při výrobě. k_t je zásoba kapitálu, kterou má sociální plánovač k dispozici v čase t.

   (a) (2 body) Vypište zřetelně stavové a kontrolní proměnné. U stavových proměnných uveďte, zda jsou endogenní nebo exogenní.

   - **stavové proměnné:** k_t **(endogenní)**
   - **kontrolní proměnné:** c_t**,** h_t**,** u_t

   (b) (2 body) Napište Bellmanovu rovnici (BE) se všemi příslušnými omezeními, uveďte proměnné, přes které maximalizujete.

$$V(k) = \max_{c,h,u} \{\nu \log(c) + (1-\nu) \log(1-h) + \beta V(k')\}, \quad \text{s.t.} \tag{8}$$

$$k' = (uk)^\alpha h^{1-\alpha} + (1-\delta(u))k - c \tag{9}$$

   (c) (5 bodů) Odvoďte Eullerovu rovnici (EE) a ostatní podmínky (rovnice), které charakterizují řešení vaší BE. Všechny podmínky ekonomicky interpretujte.

Podmínky prvního řádu pro optimální řešení získáme derivací Bellmanovy rovnice přes c, h, u

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{c} &= \beta V_k(k'), & (10) \\ \frac{1-\nu}{1-h} &= \beta V_k(k')(1-\alpha)(uk)^{\alpha} h^{-\alpha}, & (11) \\ \alpha u^{\alpha-1} k^{\alpha} h^{1-\alpha} &= \delta_u(u)k. & (12) \end{aligned}$$

Pro eliminaci neznámé derivace hodnotové funkce, $V_k(k')$**, využijeme Envelope Theorem**

$$V_k(k) = \beta V_k(k')[\alpha u^{\alpha} k^{\alpha-1} h^{1-\alpha} + 1 - \delta(u)], \tag{13}$$

Po dosazení z (10) **za** $\beta V_k(k')$ **a posunutí o jedno období dopředu dostaneme**

$$V_k(k') = \frac{\nu}{c'}[\alpha u'^{\alpha} k'^{\alpha-1} h'^{1-\alpha} + 1 - \delta(u')], \tag{14}$$

Po opětovném dosazení (14) **do** (10) **obdržíme Eulerovu rovnici**

$$\frac{\nu}{c} = \beta \frac{\nu}{c'}[\alpha u'^{\alpha} k'^{\alpha-1} h'^{1-\alpha} + 1 - \delta(u')], \tag{15}$$

která říká, že zdroje musí být rozděleny mezi dnešní a zítřejší spotřebu tak, aby dnešní náklady ve formě ušlého užitku ze spotřeby způsobené vyššími úsporami byly rovny diskontovanému zítřejšímu užitku, který tyto vyšší úspory přinesou. Pokud Eulerova rovnice neplatí, agent dosáhne vyššího užitku změnou úspor a tím i časové struktury spotřeby.

Další podmínku charakterizující optimální alokaci zdrojů dostaneme dosazením (10) **do** (11)

$$\frac{1-\nu}{1-h} = \frac{\nu}{c}(1-\alpha)(uk)^{\alpha} h^{-\alpha}. \tag{16}$$

Tato podmínka určuje optimální alokaci času mezi práci a volný čas a říká, že náklady na dodatečně vynaloženou jednotku práce v podobě ztráty užitku z volného času se musí rovnat výnosu ve formě užitku z dodatečné spotřeby, kterou tato dodatečná jednotka práce umožní. Alternativně můžeme tuto podmínku interpretovat jako

požadavek, aby se mezní míra substituce mezi spotřebou a prací rovnala meznímu produktu práce.

Poslední podmínku optimality představuje rovnice (12), která stanovuje optimální míru využití kapitálu tak, aby se při zvýšení intenzity využití kapitálu dodatečná produkce rovnala zvýšené míře opotřebení.

(d) (1 bod) Napište podmínku transversality (TVC) a interpretujte ji.

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u_c(c_t)[f_k(k_t, n_t) + 1 - \delta]k_t = 0 \tag{17}$$

Podmínka transversality říká, že trajektorie spotřeby (spotřební plán) je optimální pouze tehdy, pokud hodnota zdrojů, které tento spotřební plán diktuje naakumulovat, je ve vzdálené budoucnosti (v posledním období v případě konečného horizontu) nulová. To znamená, že naakumulovat "příliš" kapitálu můžeme pouze v případě, že pro nás nemá žádnou užitnou hodnotu. Pokud TVC neplatí, je optimální snížit akumulaci kapitálu v zájmu vyšší spotřeby v dřívějších obdobích, což povede k vyššímu užitku.

(e) (1 bod) Napište podmínky, které charakterizují stacionární rovnováhu (Steady State). Nemusíte ji řešit, steady statové hodnoty všech proměnných zřetelně odlište od běžných hodnot (např. c vs. $\bar{c}$).

$$1 = \beta[\alpha\bar{u}^\alpha\bar{k}^{\alpha-1}\bar{h}^{1-\alpha} + 1 - \delta(\bar{u})], \tag{18}$$

$$\frac{1-\nu}{1-\bar{h}} = \frac{\nu}{\bar{c}}(1-\alpha)(\bar{u}\bar{k})^\alpha\bar{h}^{-\alpha}, \tag{19}$$

$$\alpha\bar{u}^{\alpha-1}\bar{k}^\alpha\bar{h}^{1-\alpha} = \delta_u(\bar{u})\bar{k} \tag{20}$$

3. (1 bod) Předpokládejte, že produkt v této ekonomice je vyráběn velkým množstvím identických firem. Vyřešte maximalizační problém firmy, která najímá kapitál a práci na dokonale konkurenčním trhu výrobních faktorů a prodává svoji produkci na dokonale konkurenčním trhu statků. Všechny podmínky interpretujte.

$$\max y - [(r + \delta(u))k + wh], s.t. \tag{21}$$

$$y = f(k, h, u), \tag{22}$$

kde r a w jsou úroková míra, respektive mzda a ostatní proměnné mají stejný význam jako v otázce 2. (Pozn. Firma bere ceny jako dané a řeší jednoduchý statický problém.)

Dosazením (22) do (21) a zderivováním přes k, h, u dostaneme obvyklé podmínky

$$f_k(k,h,u) = r + \delta(u), \tag{23}$$
$$f_h(k,h,u) = w, \tag{24}$$
$$f_u(k,h,u) = \delta_u(u)k, \tag{25}$$

které říkají, že firma najímá výrobní faktory v takovém množství, aby se jejich mezní produkt rovnal jejich nákladům (mzda v případě práce a úroky plus opotřebení v případě kapitálu). Navíc firma najatý kapitál využívá v takové míře aby se dodatečný produkt při zvýšené míře využití kapitálu rovnal dodatečné míře jeho opotřebení.

4. (4 body) Uvažujte stejnou ekonomiku jako v otázce 2, ale nyní předpokládejte, že místo sociálního plánovače jsou zdroje alokovány trhem. Vyřešte optimalizační problém agenta, který bere ceny jako dané.

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\nu \log(c_t) + (1-\nu)\log(1-h_t)], \tag{26}$$
$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} = (1+r)k_t + wh_t, \tag{27}$$

kde všechny proměnné mají stejný význam jako v otázkách 2 a 3. (Pozn. Ceny jsou v agentově maximalizačním problému brány jako parametry, nikoliv jako stavové proměnné.)

   (a) (2 body) Zopakujte kroky a – d z otázky č. 2.
   Bellmanova rovnice

$$V(k) = \max_{c,h}\{\nu \log(c) + (1-\nu)\log(1-h) + \beta V(k')\}, \quad \text{s.t.} \tag{28}$$
$$k' = (1+r)k + wh - c \tag{29}$$
$$\tag{30}$$

   FOC

$$\frac{\nu}{c} = \beta V_k(k'), \tag{31}$$
$$\frac{1-\nu}{1-h} = \beta V_k(k')w, \tag{32}$$

   EC

$$V_k(k') = \frac{\nu}{c'}(1+r), \tag{33}$$

EE

$$\frac{\nu}{c} = \frac{\nu}{c'}(1 + r), \tag{34}$$

Optimální alokace času

$$\frac{1-\nu}{1-h} = \frac{\nu}{c}w. \tag{35}$$

TVC

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u_c(c_t)(1 + r_t)k_t = 0 \tag{36}$$

(b) (2 body) Dále využijte váš výsledek z otázky č. 3 a ukažte, že problém sociálního plánovače a problém agenta čelícího trhu vedou ke stejné alokaci zdrojů.

Z podmínek (23) – (25) **plyne**

$$r = \alpha k^{\alpha-1} u^{\alpha} h^{1-\alpha}, \tag{37}$$
$$w = (1-\alpha)(uk)^{\alpha} h^{-\alpha}, \tag{38}$$
$$\delta_u(u)k = \alpha u^{\alpha-1} k^{\alpha} h^{1-\alpha}. \tag{39}$$

Dosazením za r **a** w **do rovnic** (34) **a** (35) **vidíme, že podmínky popisující optimální spotřebu, práci a využití kapitálu jsou v obou případech identické.**