

# Teorie portfolia

Kvantifikace množiny efektivních  
portfolií II

# Téma přednášky

- nalezení portfolia s minimálním rizikem a požadovaným výnosem
- bezriziková investice
- efektivní množina s bezrizikovou investicí
- půjčování a zapůjčování
- nalezení portfolia při existenci bezrizikového aktiva

# Nalezení portfolia s minimálním rizikem a požadovaným výnosem

- postup je stejný jako v případě nalezení portfolia s minimálním rizikem

- přidáme podmínku  $r_p = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \bar{r}_i$

kde za  $r_p$  dosadíme požadovanou výnosnost

- máme tedy následující Lagrangeovu funkci

$$L(\vec{X}) = \sigma_p^2 + \lambda_1 \cdot \left( \sum_{i=1}^n X_i - 1 \right) + \lambda_2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n X_i \cdot \bar{r}_i - r_p \right)$$

# Nalezení portfolia s minimálním rizikem a požadovaným výnosem

- po zderivování podle jednotlivých proměnných obdržíme soustavu  $n+2$  rovnic
- prvních  $n$  položíme rovny 0, u předposlední a poslední rovnice převedeme hodnoty bez proměnných na druhou stranu
- dále řešíme některou standardní metodou (nejlépe maticovým počtem)

# Bezriziková investice

- za bezrizikové aktivum může být považována státní pokladniční poukázka s dobou splatnosti, která přesně odpovídá době držení portfolia investorem, případně termínovaný vklad
- výnosnost bezrizikového aktiva je jistá – označuje se indexem „f“
- směrodatná odchylka bezrizikového aktiva je nulová, z čehož plyne, že kovariance bezrizikového aktiva s rizikovým portfoliem (aktivem) je nulová

# Bezriziková investice

- investor se může rozhodnout, že část svých prostředků vloží do bezrizikové investice a část do rizikového aktiva (portfolia)
- předpokládejme, že investujeme část  $X$  do rizikového aktiva (A) a zbytek  $1-X$  do bezrizikového aktiva (f)
- výnosnost takového portfolia (p) bude

$$\bar{r}_p = (1-X) \cdot r_f + X \cdot \bar{r}_A$$

# Bezriziková investice

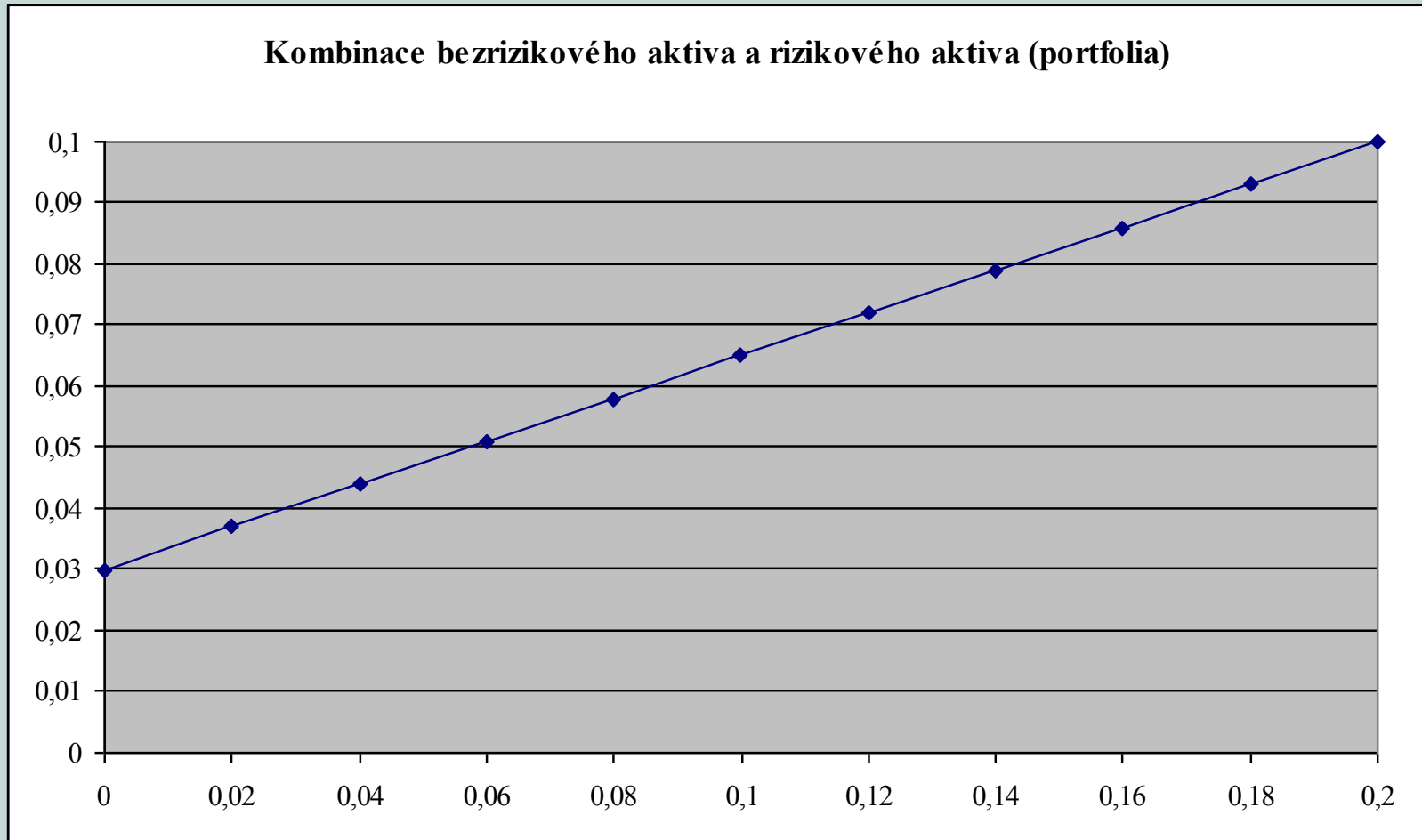
- riziko portfolia (p) bude

$$\sigma_p = \sqrt{(-X)^2 \cdot \sigma_f^2 + X^2 \cdot \sigma_A^2 + 2 \cdot (-X) \cdot X \cdot \sigma_f \cdot \sigma_A \cdot \rho_{fA}}$$

- protože riziko bezrizikové investice je nulové, můžeme psát

$$\sigma_p = \sqrt{X^2 \cdot \sigma_A^2} = X \sigma_A$$

# Bezriziková investice





# Bezriziková investice

- všechny možné kombinace mezi bezrizikovým aktivem a rizikovým aktivem leží na přímce
- pokud si ze vztahu  $\sigma_p = X\sigma_A$  vyjádříme  $X$  a dosadíme do vztahu pro výnos portfolia, můžeme psát

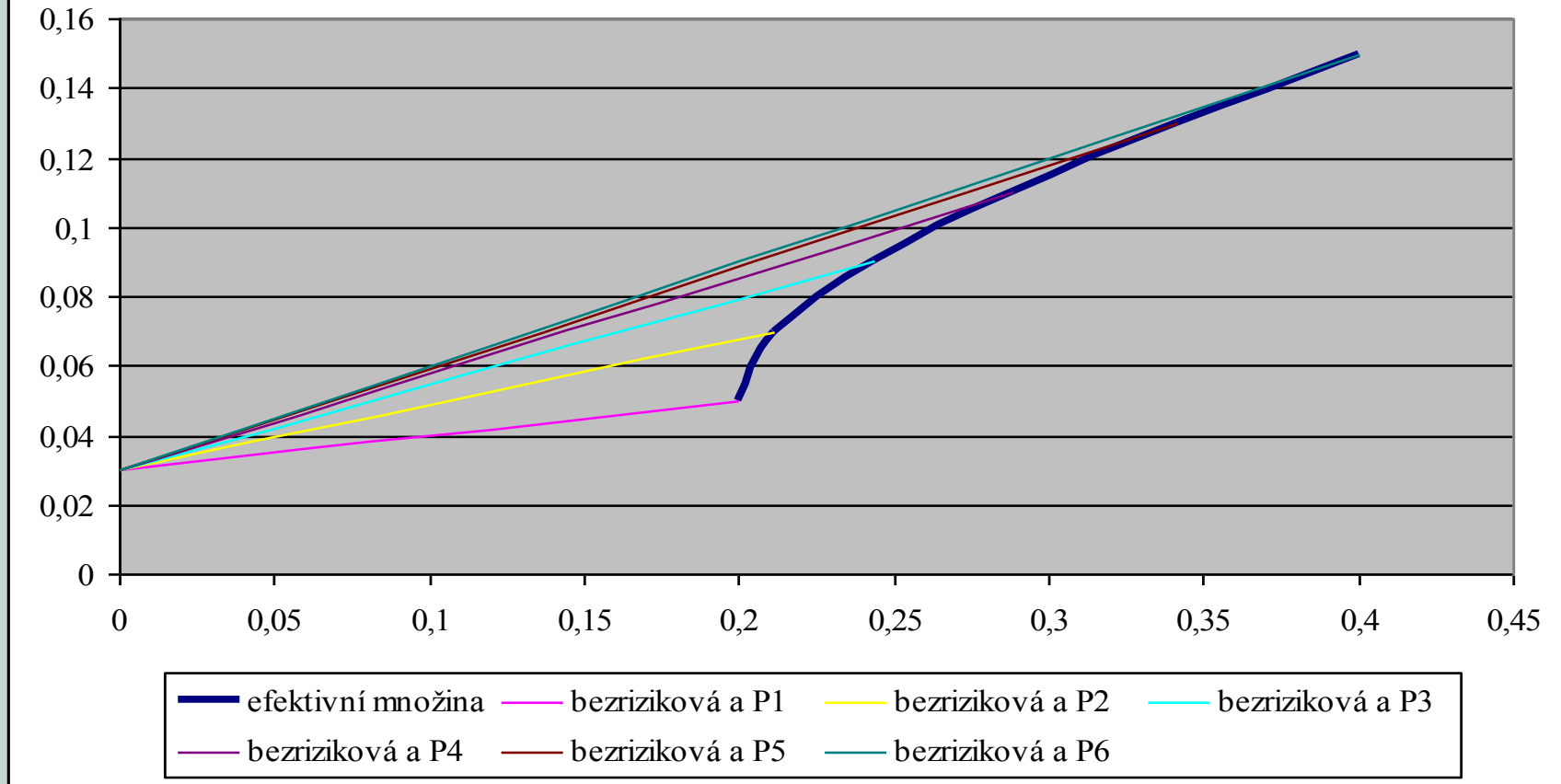
$$\bar{r}_p = (1 - X) \cdot r_f + X \cdot \bar{r}_A = \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_A}\right) \cdot r_f + \frac{\sigma_p}{\sigma_A} \cdot \bar{r}_A$$

- což po úpravě dává rovnici přímky ve tvaru

$$\bar{r}_p = r_f + \left(\frac{\bar{r}_A - r_f}{\sigma_A}\right) \cdot \sigma_p$$

# Bezriziková investice

Kombinace bezrizikové investice a rizikových portfolií



# Bezriziková investice

- kterou přímku zvolíme?
  - tečnu k efektivní množině
- jak se změní efektivní množina?
  - část od dotykového bodu přímky a původní efektivní množiny směrem k počátku os nahradí část původní efektivní množiny (proč?)

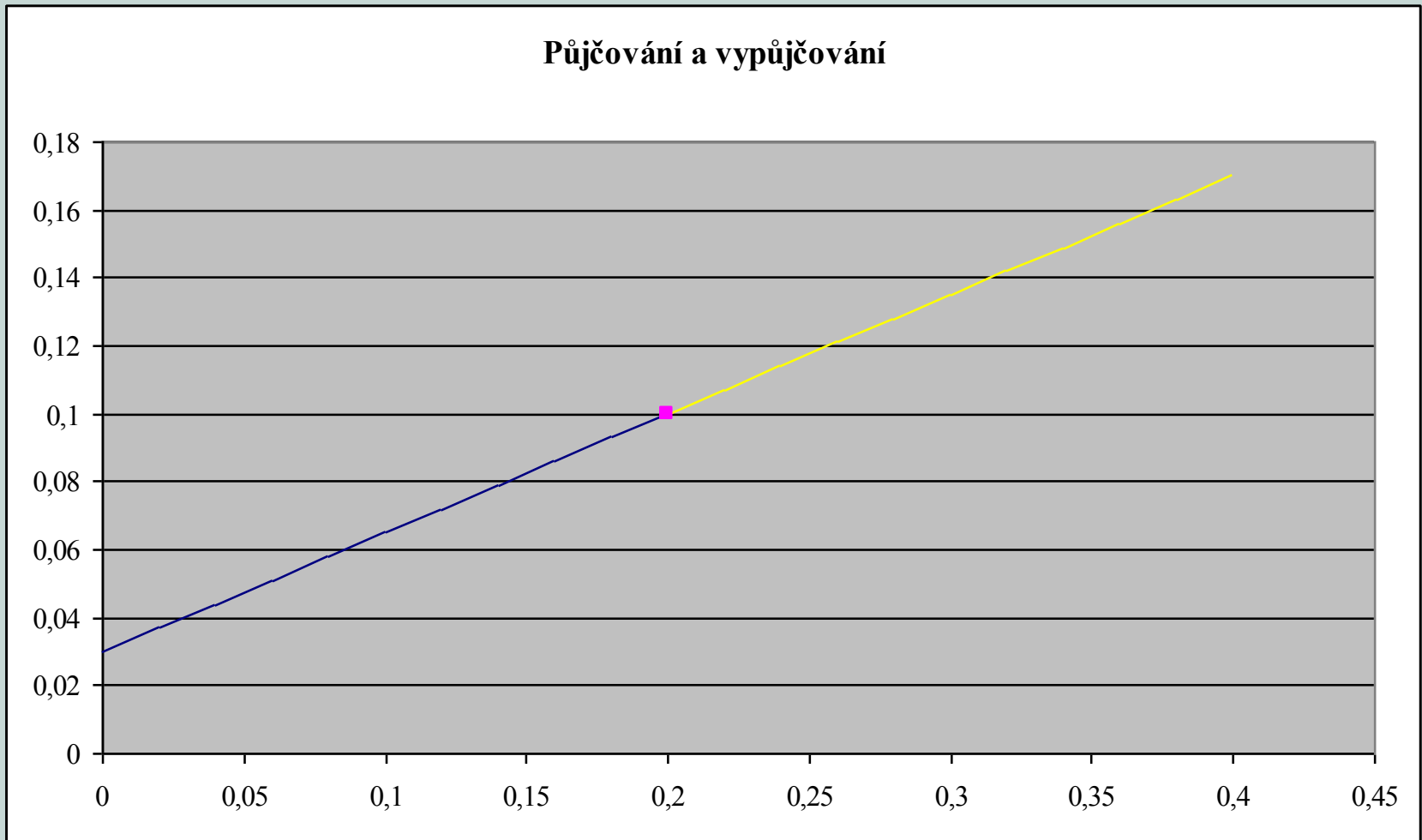
# Půjčování versus vypůjčování

- lending x borrowing
- pokud investujeme pouze do rizikového portfolia, investujeme všechny prostředky
- pokud se rozhodneme investovat i do bezrizikového aktiva, rozhodujeme se část prostředků „půjčit“ (lend) „někomu“

# Půjčování versus vypůjčování

- mohli bychom se rozhodnout, že naše prostředky jsou pro nás nedostačující a že si chceme za bezrizikovou sazbu „vypůjčit“ (borrow) od „někoho“
- pohybujeme-li se po přímce pro bezrizikové aktivum a rizikové portfolio, je dělicím bodem mezi půjčováním a vypůjčováním bod, ve kterém jsou všechny prostředky investovány do rizikového portfolia

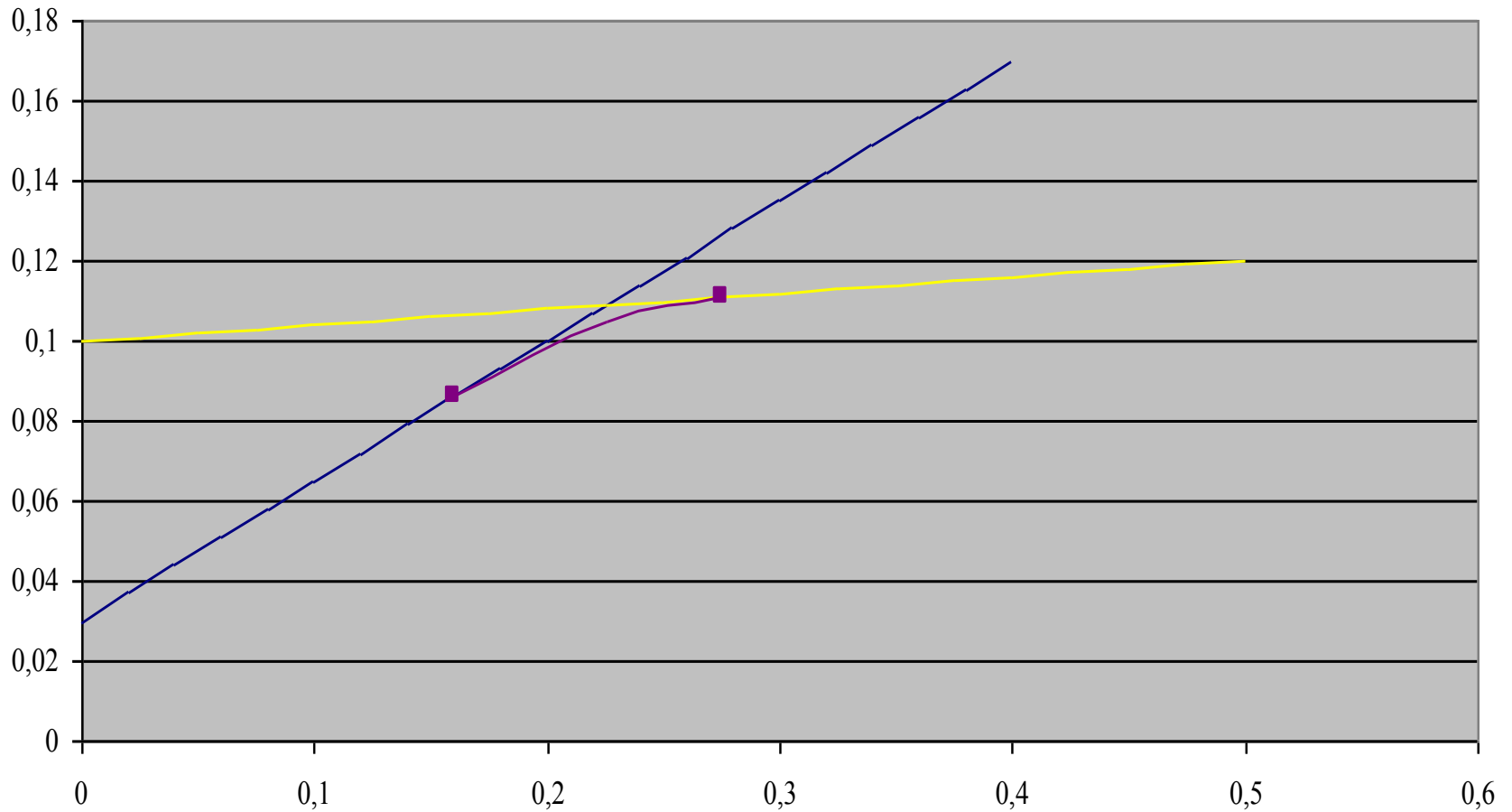
# Půjčování versus vypůjčování



# Půjčování versus vypůjčování

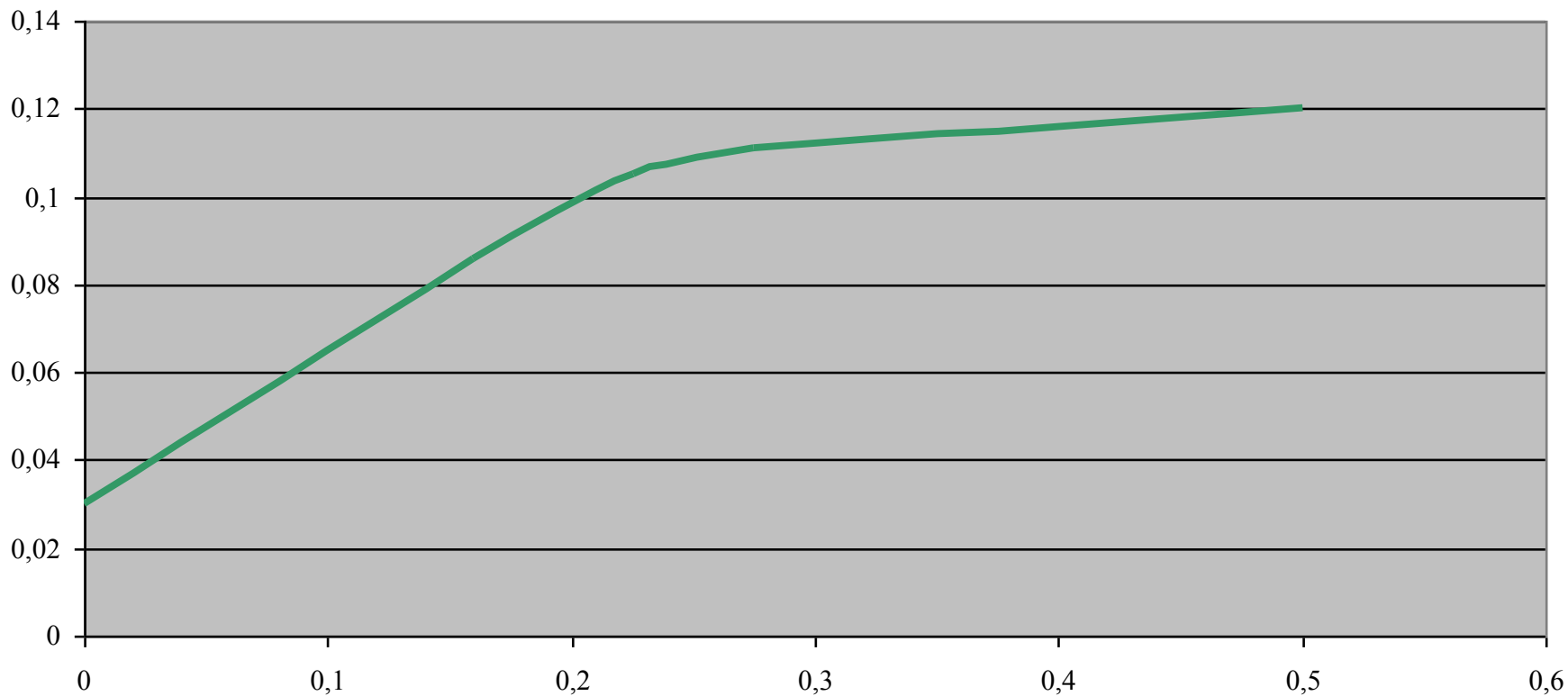
- pokud bychom umožnili půjčování i vypůjčování, byla by předchozí přímka efektivní množinou
- na této efektivní množině by ležel pouze jeden bod z původní efektivní množiny – byl by to tečnový bod
- v realitě je ovšem sazba pro vypůjčování (úvěrová sazba) většinou vyšší než sazba pro půjčování (vkladová sazba)
- jak tento fakt změní efektivní množinu?

## Půjčování a vypůjčování při různých sazbách





## Půjčování a vypůjčování při různých sazbách - efektivní množina



# Nalezení portfolia při existenci bezrizikového aktiva

- mohou nastat 4 situace
  1. prodej nakrátko je povolený a bezrizikové aktivum je možno využít – budeme řešit dále
  2. prodej nakrátko je povolený ale bezrizikové aktivum není možno využít – již jsme řešili
  3. prodej nakrátko není povolený a bezrizikové aktivum je možno využít – řešení metodami kvadratického programování (Kuhn-Tucker)
  4. prodej nakrátko není povolený a bezrizikové aktivum není možno využít – řešení metodami kvadratického programování (Kuhn-Tucker)

# Řešení situace 1

- jedná se o maximalizační úlohu s omezující podmínkou
- maximalizovanou funkcí je tangens úhlu, který svírá přímka bezrizikového aktiva a tečného bodu na efektivní množině rizikových portfolií
- omezující podmínkou je  $\sum_{i=1}^n X_i = 1$
- tuto podmínku můžeme vynechat (protože se zderivovaná maximalizovaná funkce podle jednotlivých proměnných vytváří systém rovnic, které jsou homogenní stupně 0 – obecně ovšem podmínku vynechat nemůžeme)

# Řešení situace 1

- budeme tedy derivovat funkci  $f(\vec{X}) = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p}$

- protože platí  $r_f = 1 \cdot r_f = \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \cdot r_f = \sum_{i=1}^n X_i \cdot r_f$

- můžeme derivovanou funkci přepsat na tvar

$$f(\vec{X}) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \cdot (r_i - r_f)}{\left[ \sum_{i=1}^n X_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

# Řešení situace 1

$$\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow -\kappa \cdot X_1 \cdot \sigma_{1i} + \kappa \cdot X_2 \cdot \sigma_{2i} + \dots + \kappa \cdot X_i \cdot \sigma_i^2 + \dots + \kappa \cdot X_{n-1} \cdot \sigma_{n-1,i} + \kappa \cdot X_n \cdot \sigma_{ni} + \bar{r}_i - r_f = 0$$

kde  $\kappa = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p^2}$

můžeme zavést pomocnou proměnnou  $Z_k = \kappa \cdot X_k$

- získali jsme n rovnic o n neznámých

# Řešení situace 1

- abychom získali hledané podíly  $X_k$ , stačí vyjít z rovnic

$$X_k = \frac{Z_k}{K} \quad a \quad \sum_{k=1}^n Z_k = \sum_{k=1}^n K \cdot X_k = K \cdot \sum_{k=1}^n X_k$$

*a*

$$\sum_{k=1}^n X_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n Z_k = K \cdot 1$$

- což nám ve výsledku dává rovnici

$$X_k = \frac{Z_k}{\sum_{i=1}^n Z_i}$$