

Teorie portfolia

Model oceňování kapitálových
aktiv – CAPM

Téma přednášky

- empirické testování modelu rovnováhy
- metoda nejmenších čtverců
- rozptyl výnosnosti cenného papíru
- systematické a nesystematické riziko
- výnosnost a riziko portfolia
- delta cenného papíru - nerovnováha

Empirické testování modelu rovnováhy

- testováním modelu CAPM (a jeho variant) se zabývala řada známých i méně známých jmen
- např. Sharpe, Lintner, Miller, Scholes, Black, Jensen, Fama

Empirické testování modelu rovnováhy

- modely CAPM jsou formulovány na základě očekávání – všechny proměnné jsou vyjádřeny v budoucích hodnotách
- protože neexistují resp. nejsou k dispozici rozsáhlejší systematická data vzhledem k očekáváním, většina testů modelu CAPM vychází z pozorovaných hodnot

Empirické testování modelu rovnováhy

- podle CAPM se budou aktiva nastavovat tak dlouho, dokud nebude dosaženo rovnováhy, při které bude ležet každý CP na SML
- při rovnováze bude očekávaná (rovnovážná) výnosnost CP i v době držení dána rovnicí

$$\bar{r}_i^e = r_f + (r_M - r_f) \beta_i$$

Empirické testování modelu rovnováhy

- tato rovnice však není modelem toho, jaká bude skutečná nadměrná výnosnost CP za dobu držení
- charakteristická přímka (SML) je typem procesu, který garantuje skutečnou výnosnost CP a je založen na předcházející rovnici

$$r_i - r_f = r_M - r_f \beta_i + \varepsilon_i$$

Empirické testování modelu rovnováhy

- r_i - skutečná výnosnost CP
- r_M - skutečná výnosnost tržního portfolia
- ε_i - náhodná chyba CP
- protože předpokládáme, že vztah mezi rizikem a výnosností je lineární (vyšší riziko přináší vyšší výnos), můžeme testovat model v podobě rovnice

$$r_i = \alpha_i + r_M \cdot \beta_i + \varepsilon_i$$

Empirické testování modelu rovnováhy

- abychom mohli nalézt neznámé parametry alfa a beta, učiníme některé předpoklady o náhodné chybě (viz. klasická lineární regrese)

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$\text{cov}(\varepsilon_i, r_i) = 0$$

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

$$E(\varepsilon_i \cdot (r_M - \bar{r}_M)) = 0$$

- náhodná chyba CP je náhodná veličina s nulovou očekávanou hodnotou (střední hodnotou) a směrodatnou odchylkou σ_{ε_i}

Empirické testování modelu rovnováhy

- předpokládejme, že očekávanou výnosnost *i-tého* aktiva je možné určit rovnicí $r_i = r_f + \beta_i (r_M - r_f)$, kde $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \in \mathbb{R}$
- tato rovnice nemusí naprosto přesně vystihnout situaci na trhu s *i-tým* aktivem, může dojít k drobným nepřesnostem působením různých faktorů, které nejsou zahrnuty do naší rovnice

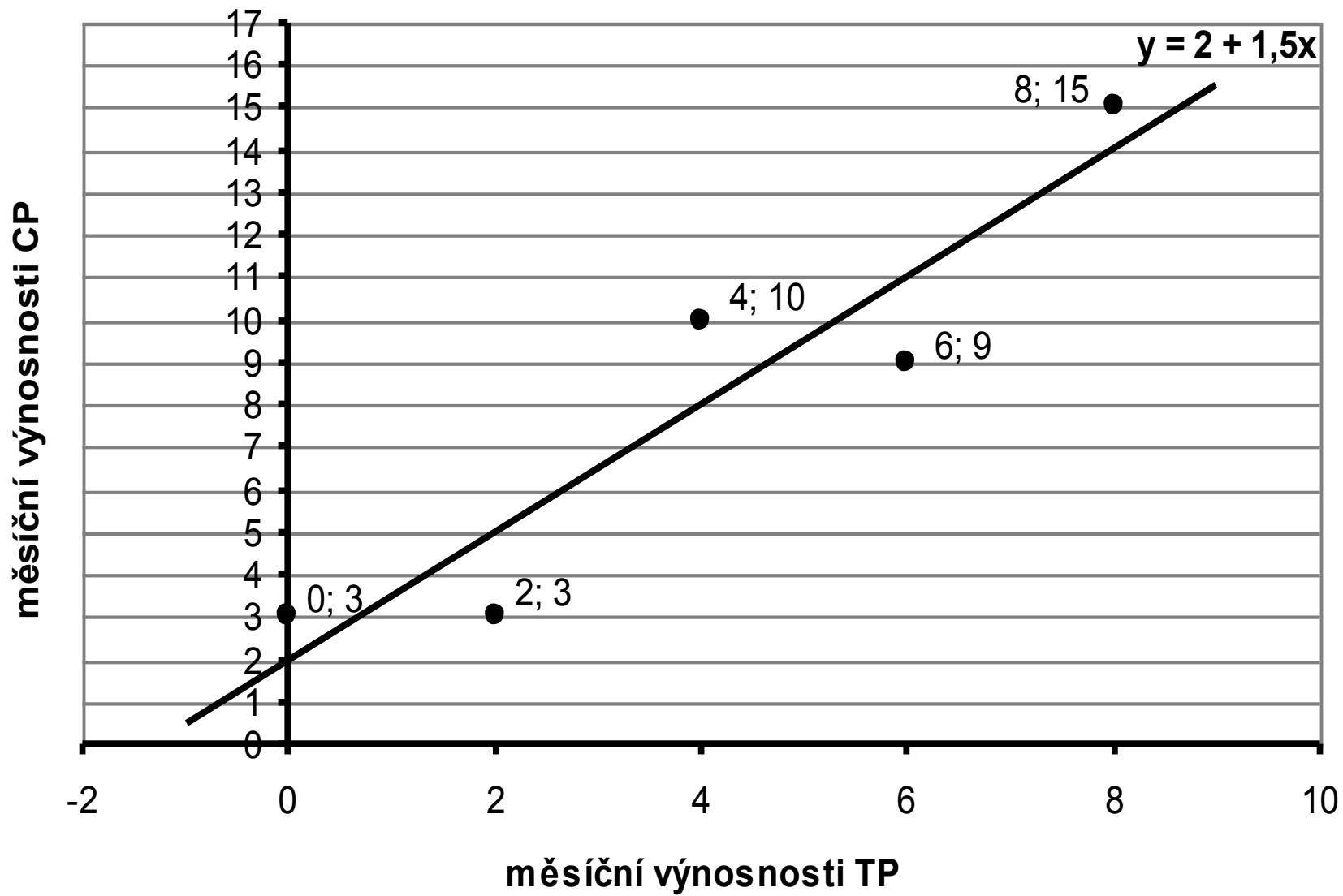
Empirické testování modelu rovnováhy

- proto bývá do rovnice zahrnut i vliv takovýchto blíže nespecifikovaných faktorů ve formě náhodné chyby
- pokud bude použita bezriziková investice můžeme psát $\alpha_i = r_f \cdot (1 - \beta_i)$

Empirické testování modelu rovnováhy

- příklad výnosnosti cenného papíru a tržního portfolia (indexu)

<i>Měsíc</i>	<i>Výnosnost CP v %</i>	<i>Výnosnost TP v %</i>	$r_i = \alpha_i + r_M \cdot \beta_i + \varepsilon_i$
1.	10	4	$10 = 2 + 4 \cdot 1,5 + 2$
2.	3	2	$3 = 2 + 2 \cdot 1,5 - 2$
3.	15	8	$15 = 2 + 8 \cdot 1,5 + 1$
4.	9	6	$9 = 2 + 6 \cdot 1,5 - 2$
5.	3	0	$3 = 2 + 0 \cdot 1,5 + 1$
Součet	40	20	$40 = 10 + 30 + 0$



Empirické testování modelu rovnováhy

- očekávaná výnosnost za těchto pět měsíců bude pro CP 8% a pro index 4%
- předcházející úlohu jsme vyjádřili grafem pomocí regresní funkce, na kterém vidíme, kde leží v jednotlivých měsících výnosnosti cenného papíru i velikost náhodné chyby tohoto aktiva
- pokud chceme získat odhad hodnoty koeficientu beta, potom lze využít historických (minulých) výnosů a vztahu

Empirické testování modelu rovnováhy

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{\sum_{t=1}^T (r_{i_t} - \bar{r}_i)(r_{M_t} - \bar{r}_M)}{\sum_{t=1}^T (r_{M_t} - \bar{r}_M)^2}$$

- tzv. historické (ex-post) beta
- pro výpočet alfa využijeme vztah $\alpha_i = \bar{r}_i - \beta_i \bar{r}_M$
- parametry alfa a beta můžeme také získat („odhadnout“) z historického přístupu k jejich určení $\bar{r}_i = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i \bar{r}_M$

Empirické testování modelu rovnováhy

- měli bychom zkoumat nestrannost odhadů, zda tyto odhady jsou „nejlepší“, zda mezi těmito odhady mají nejmenší rozptyl
- nejlepším odhadem je metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců

- mějme n dvojic pozorovaných hodnot
- množinu těchto bodů nechť popisuje empirická regresní funkce $\hat{y} = f(x, a, b) = a + bx$
- $e_i = y_i - \hat{y}_i$ je tzv. reziduum
- metoda nejmenších čtverců je založena na minimalizaci součtu čtverců reziduálních odchylek
- hledáme tedy minimum této funkce

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b \cdot x_i)^2 \Rightarrow \text{minimum}$$

Metoda nejmenších čtverců

- spočítáme první parciální derivace podle proměnných „a“ a „b“ a položíme je rovny 0
- po úpravách dostaneme dvě tzv. normální rovnice
$$n \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$
$$a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$
- které vyřešíme nejlépe maticovou metodou

Rozptyl výnosnosti cenného papíru

- rozptyl nadměrné výnosnosti

$$\text{var}(r_i - r_f) = \text{var}(r_i) + \text{var}(r_f) = \sigma_i^2 + 0 = \sigma_i^2$$

- rozptyl pravé strany rovnice

$$\begin{aligned} \text{var}(r_M - r_f - \beta_i + \varepsilon_i) &= \text{var}(r_M \cdot \beta_i) + \text{var}(r_f \cdot \beta_i) + \text{var}(\varepsilon_i) \\ &= \beta_i \cdot \sigma_M^2 + \beta_i \cdot \sigma_f^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \beta_i \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \end{aligned}$$

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

- víme, že

- potom

$$\sigma_i^2 = \beta_i \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \Rightarrow \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma_i^2 - \beta_i \cdot \sigma_M^2 \Rightarrow \sigma_{\varepsilon_i} = \sqrt{\sigma_i^2 - \beta_i \cdot \sigma_M^2}$$

Systematické a nesystematické riziko

- jedinečné riziko (netržní, nesystematické riziko) - $\sigma_{\epsilon_i}^2$
- tržní riziko (systematické riziko) – $\beta_i \cdot \sigma_M^2$

Systematické a nesystematické riziko

- tržní riziko odráží systematickou míru rozptylu (variability) výnosností a je způsobeno faktory, které ovlivňují ceny všech cenných papírů obchodovaných na burze; je diverzifikovatelné
- jedinečné riziko je část rizika, která je jedinečná pro daný podnik, obor atd.; je nediverzifikovatelné (zvýšením počtu kusů cenných papírů)

Systematické a nesystematické riziko

- podíl systematického rizika na celkovém riziku CP určuje koeficient determinace
- koeficient determinace vyjadřuje schopnost tržního modelu vysvětlit pohyby ve výnosnostech jednotlivých akcií na trhu (kolísání ve vztahu výnosnosti na jednotlivý cenný papír a změn ve výnosnosti trhu)

Systematické a nesystematické riziko

- víme, že $\rho_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_i \cdot \sigma_M} = \frac{\beta_i \cdot \sigma_M^2}{\sigma_i \cdot \sigma_M} = \beta_i \cdot \frac{\sigma_M}{\sigma_i}$

- neboť $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \Rightarrow \sigma_{iM} = \beta_i \sigma_M^2$

- koeficient determinace se potom rovná $\beta_i \cdot \frac{\sigma_M^2}{\sigma_i^2}$

Výnosnost a riziko portfolia

- portfolio P je složené z n CP s váhami

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

- výnosnost

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^n X_i (r_{M_i} - r_f) \beta_i + \sum_{i=1}^n X_i \varepsilon_i = (r_M - r_f) \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i \beta_i}_{\beta_p} + \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i \varepsilon_i}_{\varepsilon_p}$$

$$\bar{r}_p - r_f = (r_M - r_f) \beta_p + \varepsilon_p$$

- riziko

$$\text{var}(r_p - r_f) = \text{var}(r_p) + \underbrace{\text{var}(r_f)}_0 = \sigma_p^2 - 0 = \sigma_p^2$$

$$\sigma_{\varepsilon_p}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

$$\text{var}(r_M - r_f) \beta_p + \varepsilon_p = \text{var}(\beta_p \cdot r_M) + \text{var}(\beta_p \cdot r_f) + \text{var}(\varepsilon_p)$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2$$

Delta cenného papíru - nerovnováha

- mnoho investorů vyhledává CP, které se zdají být nesprávně ohodnoceny
- CP je podhodnocený (příliš levný), je-li jeho očekávaná výnosnost vyšší než předpokládaná - leží nad SML
- CP je nadhodnocený (příliš drahý), je-li jeho očekávaná výnosnost nižší než předpokládaná - leží pod SML

Delta cenného papíru - nerovnováha

- tržní ceny cenných papírů a jejich očekávané výnosnosti jsou buď ve shodě s danou rovnovážnou teorií nebo nejsou
- problém spočívá v tom, že srovnáváme očekávané výnosnosti cenných papírů s rovnovážnou očekávanou výnosností

Delta cenného papíru - nerovnováha

- rovnovážná očekávaná výnosnost cenného papíru je taková, jaká by měla být, kdyby byl cenný papír správně ohodnocen (ležel by na přímce SML)
- delta cenných papírů je rozdíl mezi očekávanou výnosností a příslušnou rovnovážnou očekávanou výnosností

$$\delta_i = r_i - r_i^e$$

Delta cenného papíru - nerovnováha

1. je-li $\text{delta} > 0$, leží CP nad SML a je podhodnocený,
 2. je-li $\text{delta} < 0$, leží CP pod SML a je nadhodnocený,
 3. je-li $\text{delta} = 0$, leží CP na přímce SML a je správně ohodnocen
- z toho plyne doporučení, že je nutno nakupovat cenné papíry, které leží nad přímkou SML a prodávat cenné papíry ležící pod přímkou SML, cenné papíry ležící na přímce SML je nutno držet