MATEMATIKÁ NEKONEČNA A FYZIKA

J.Jelen, katedra fyziky FEL ČVUT, 166 27 Praha 6, e-mail: jelen@fel.cvut.cz

1 Úvod

Tento příspěvek je hrstí poznámek a otázek, vztahujících se k nekonečnu v matematice. Není v něm řeč o nekonečnech jak je potkává fyzik (nekonečnost vesmíru, singularity obecné teorie relativity, divergence v kvantové teorii polí, atd.), ale o nekonečnech zaváděných v matematice. Množné číslo je na místě, matematika totiž zná nekonečen mnoho; na vkus fyzika asi až příliš mnoho. Příspěvek není matematickým textem, neusiluje o exaktní matematické formulace, je toliko pohledem uživatele matematiky.

Matematika je pro fyzikální teorie jazykem, ba i konstrukcí mohutné (různorodé, avšak zároveň jednotné) budovy fyziky. Matematika se zabývá možným (přípustným a logicky konzistentním). Nebrání se fantazii. Je výzkumným terénem lidské mysli. Své představy, motivace a podněty čerpá ovšem ze smyslové zkušenosti, nejčastěji právě ze spolupráce s fyzikou.

Nekonečno je pojem dosti zvláštní a ošidný. Myslet nekonečno je dobrodružstvím. V matematice má podobu nekonečna potenciálního a je vyjádřením procesu nekonečnosti jako trvale možného pokračování, ale leckdy má také podobu nekonečna aktuálního (vystiženého především v teorii množin), v němž nekonečno je uchopeno vcelku jako hotové a je objektem našich dalších manipulací jako kterýkoliv jiný objekt naší zkušenosti.

Záludností nekonečna a vztahů diskrétního a spojitého si byli lidé vědomi odedávna. Jsou vyjádřeny např. v Zenonových paradoxech (želva, letící šíp, ap.). Staří Řekové se nekonečna báli. Gauss vyjádřil svůj odmítavý postoj slovy: „Protestuji proti použití nekonečných velikostí jako skutečného celku, to není v matematice dovoleno. Nekonečno je jen způsob mluvy… “. Z dalších uveďme ještě Kroneckera: „Celá čísla stvořil Bůh, vše ostatní je dílo člověka“ a Poincarého: „Aktuální nekonečno neexistuje…“

Základy teorie nekonečných množin a tím i teorie aktuálního nekonečna položil před koncem 19. století Cantor. Bohatstvím struktur zde vytvořených byli matematici tak fascinováni, že Hilbert vyjádřil přesvědčení: „Nikdo nás nevykáže z ráje, jenž pro nás Cantor vytvořil. “

2 Přirozená a reálná čísla

Fyzikové a nematematici se setkávají s nekonečny dvojího druhu. Spočetné nekonečno odpovídá diskrétnímu počítání jednotlivých kusů čehokoliv. Množina přirozených čísel *N* je dobře uspořádaná, tj. každá její neprázdná podmnožina má svůj nejmenší prvek. Druhé, nespočetné nekonečno odpovídá představě kontinua vyjádřeného množinou reálných čísel *R*. Kontinuum je spjato spíše s geometrií a ve fyzice pak s měřením těch veličin, jejichž hodnota je vyjádřena délkou nějakého sloupce, polohou ručičky apod. Také tato množina je přirozeným způsobem lineárně uspořádaná (kupř. jako plynoucí čas), nikoli však dobře. Ne každá podmnožina má svůj nejmenší prvek. Např.: Které je nejmenší reálné číslo větší než nula?

Množina *R* je opravdu velice bohatá, zahrnuje čísla přirozená, racionální, iracionální algebraická i transcendentní ap. Konstrukci od čísel přirozených a racionálních lze vést přes třídy Cauchyovských posloupností či přes Dedekindovy řezy racionálních čísel. Reálné číslo bývá reprezentováno dekadickým rozvojem v cifrách 0 až 9, nebo dvojkově, jako nekonečná posloupnost cifer 0 a 1. Odtud lze snadno dokázat (Cantorovu diagonalizační úvahou), že reálná čísla jsou nespočetná, že je nelze vzájemně jednoznačně přiřadit číslům přirozeným. Viz příloha 1.

3 Teorie množin

Intuitivní představy o množinách jako o souborech prvků s určitou vlastností vedly k nepříjemným paradoxům (Burali-Forti, Berry, Russell, Richard…). Intuice a přirozená představivost zde nestačí. Bylo nutno dbát větší opatrnosti a založit novou teorii v matematické logice a to zcela formálně a axiomaticky. Symboly, gramatika a odvozovací pravidla umožňují čistě mechanické manipulace. Z axiomů, tj. z tvrzení přijatých z dobrých důvodů jako základní a pravdivá, je pak možno vyvozovat a prověřovat pravdy další. Možnost zavést nevědomky a nechtěně další představy, v axiomech neobsažené, je potlačena. Axiomy jsou voleny tak, aby byly v souladu s naším očekáváním, s naším porozuměním tomu, co chceme axiomatizovat. Vycházejí z jakési přirozené interpretace. Axiomaticky založená teorie množin se stala základem téměř celé matematiky. Obvykle se využívá (eventuálně různě modifikované či doplněné) axiomatiky Zermelovy-Fraenkelovy [1].

Velmi důležitým pojmem je mohutnost dané množiny. Dvě množiny jsou stejně mohutné (mají "stejný počet prvků"), existuje-li vzájemně jednoznačné (tj. prosté) přiřazení jejich elementů. Tak množina druhých mocnin $\{n^2\}$ je stejně mohutná jako množina přirozených čísel $\{n\}$, na úsečce je stejně bodů jako na celé přímce atd. Tyto skutečnosti překvapovaly již Galilea. To, že část může být v tomto smyslu rovna celku, je právě charakteristikou nekonečných množin; pro konečné množiny se to přihodit nemůže. Některá, zdánlivě různá nekonečna tedy různá vlastně nejsou. Přesto je nekonečen mnoho. Množina všech podmnožin dané množiny X (tzv. její potenční množina $P(X)$) má ve srovnání s původní množinou X svoji mohutnost s jistotou větší (důkaz lze vést opět sporem). Nekonečen je tedy, již z tohoto důvodu, nekonečně mnoho. A žádné není největší.

Zcela přirozeně, ještě před formalizováním teorie, se objevila otázka, zda existuje množina s mohutností ležící mezi mohutností množiny přirozených čísel, obvykle označovanou $\aleph_0$ (alef nula) a mohutností kontinua *C*. (V aritmetice kardinálních čísel lze *C* vyjádřit jako $C = 2^{\aleph_0}$.) Cantor se snažil dokázat, že nikoli, že jsou to mohutnosti následující bezprostředně za sebou. Tato, tzv. hypotéza kontinua se postupně ukázala být na obvyklých axiomech teorie množin nezávislá. Gödel (1938) ukázal, že s ostatními axiomy je slučitelná a Cohen (1963) prokázal, že ani její odmítnutí nevede ke sporu. Mohou tedy existovat nejméně dvě zcela různé teorie množin, s hypotézou kontinua nebo s její negací.

Tato nezávislost však už nebyla úplně překvapením. Omezené možnosti formálních axiomatických přístupů ukázal již r.1931 K. Gödel svou větou o neúplnosti. Každý dostatečně bohatý formální systém je nutně neúplný. Lze v něm formulovat tvrzení, která nelze jeho prostředky rozhodnout. Nelze dokázat jejich pravdivost. Požadavek dostatečné bohatosti není příliš náročný, znamená jen, že v jeho rámci lze vybudovat aritmetiku přirozených čísel. Kupř. žádné axiomy teorie množin nemohou být tedy úplné. Gödelův geniální krok, který důkaz umožnil, spočívá v myšlence zakódování všech finitních prostředků formální teorie v aritmetice samé (tzv. gödelovské očíslování).

Gödelovy výsledky z matematické logiky mají své souvislosti nejen v matematice, ale i v teorii počítání (Turing), v teorii algoritmické složitosti (Chaitin) a jinde. Jaké jsou případné možné důsledky pro fyziku a obecněji pro přírodní vědu, to bylo předmětem několika poznámek na 13. konferenci českých a slovenských fyziků [2].

Z Gödelových prací vyplývá, že ne zcela prostá a průhledná je už elementární aritmetika a sama přirozená čísla. Ani zde nemůžeme dokázat všechny pravdy, které o přirozených číslech platí. Která jsou však ona nedokazatelná tvrzení? Velice srozumitelně formulovanou úlohou, která již od r. 1742 odolává důkazu či vyvrácení protipříkladem, je tzv. Goldbachova hypotéza, říkající, že každé sudé číslo se dá nejméně jedním způsobem napsat jako součet dvou prvočísel (kupř. 20=13+7, 22=17+5 atd.). Je snad také tato tak jednoduchá věta z obvyklých axiomů aritmetiky nerozhodnutelná? Nebo jak je tomu s otázkou, zda prvočíselných sousedních dvojčat (jako např. 11 a 13, 17 a 19 nebo 101 a 103 atd) je nekonečně nebo jen konečně mnoho? Nevíme. Víme jen, že nedokazatelná pravdivá tvrzení existují.

Situace s nekonečny je složitá podstatnou měrou proto, že při počítání nejde vždy jen o „kolik“, ale také o „kolikátý“. Jazyk vedle číslovek základních potřebuje i číslovky řadové. U konečných souborů a přirozených čísel problém nevzniká. Na otázku „kolik“ dává odpověď vždy pořadí posledního počítaného kusu, tedy stejně vlastně odpověď na otázku „kolikátý“. Vedle mohutností množin (kardinálních čísel) zná tak matematika také čísla ordinální. Pro nekonečné soubory je asi názornější než o čísle hovořit o typu uspořádání, protože výsledek na charakteru uspořádání a pořadí v počítání významně závisí. Sčítání v aritmetice nekonečných ordinálních čísel není komutativní.

Je-li objektů nekonečně mnoho, ten „poslední“, limitní je ω-tý. Teorie množin je vybudována tak, že jedinými objekty v diskusi jsou právě jen množiny. Přirozené číslo *n* lze chápat jako tu množinu, která všechny předcházející má za své podmnožiny. Dobré uspořádání je dáno náležením $\in$. Rozhodneme-li se přijmout aktuální existenci nekonečné množiny všech přirozených čísel, pak tato množina, označená v těchto souvislostech zpravidla symbolem ω, představuje první nekonečné ordinální číslo.

Džin je vypuštěn. Další ordinální číslo (následník) je pak zapsán jako $\omega + 1$. Atd. Již se neubráníme ordinálním číslům $\omega + 1$, $\omega + 2, \ldots, \omega \,.\, 2, \ldots, \omega^2$, $\omega^2 + 1, \ldots,$ $\omega^3, \ldots, \omega^4, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \varepsilon_0 \ldots$ a stále větším nekonečnům. Máme pak transfinitní aritmetiku, lze pracovat s transfinitní indukcí, atp.

Jen některá z ordinálních čísel mají povahu čísel kardinálních, totiž ta, která odpovídají dobře uspořádaným množinám. Ta lze srovnat do posloupnosti $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots < \aleph_\omega < \ldots$. Hypotéza kontinua pak očekává, že mohutnost kontinua *C* odpovídá $\aleph_1$, tj. $C = \aleph_1$. Jak už víme, tomu tak být může, ale také nemusí. Záleží na naší volbě axiomů. Axiomy je možno ale připojovat vždy jen tak, aby s předchozími nebyly ve sporu. Dokázat bezespornost celého souboru se nám však nepodaří. Ani pro aritmetiku není možno formálně bezespornost prokázat (Gödel 1931). Lze dokazovat jen relativní bezespornost. Je-li bezesporná teorie *T* bez axiomu *A*, pak je bezesporná i rozšířená teorie *T*+*A* po jeho přidání; atp.

Vedle hypotézy kontinua byl nejčastěji rozebírán tzv. axiom výběru, říkající: Ke každému, i nekonečnému souboru disjunktních neprázdných množin existuje množina reprezentantů (vzorků), vybraná po jednom z každé z nich. Axiom deklaruje existenci, nedává však návod, jak tuto množinu zkonstruovat. I o něm bylo ukázáno, že nezávisí na axiomech obvyklé teorie množin a je navíc nezávislý i na přijetí či odmítnutí hypotézy kontinua. Máme tady již nejméně čtyři různé možnosti, jak vybrat teorii množin. Axiom výběru vzbudil souhlas, ale i značný odpor, než byl převážně přijat. Mnozí jej odmítali. Jak škodolibě ukázali jeho příznivci, i odpůrci jej někdy použili, aniž by si to jasně uvědomili. Leckdy se totiž hodí v důkazech celkem běžných vět. Některé jeho důsledky (nebo k němu ekvivalentní tvrzení) nás však opravdu nemile překvapí. Kupř.: Každou množinu lze dobře uspořádat (Zermelo). Nuž, uspořádejme dobře množinu reálných čísel … Návod, ovšem, nemáme. Tento axiom, jak se vyjádřil Russel, je nejprve skoro samozřejmý, poté problematický a nakonec dojdeme k závěru, že nevíme, o čem je vlastně řeč.

Největší nevoli u fyziků asi vyvolává z něj vyplývající Tarského-Banachův paradox. Ten říká, že s jeho pomocí lze trojrozměrnou kouli rozdělit na pět částí a z těchto částí pak translacemi a rotacemi složit koule dvě, obě původní velikosti. Objem se zdvojnásobil. Tak lze udělat z blechy třeba slona. Fyzikové bývají šokováni, zvláště pokud rozdělení je pojmenováno jako rozřezání. Jde tu však o rozčlenění koule na podmnožiny. Těmto podmnožinám (částem) nelze vůbec přisoudit objem, nejsou totiž lebesgueovsky měřitelné. Členění nelze fyzikálně realizovat, „názorné jistoty“ tímto nefyzikálním procesem tedy dotčeny nejsou.

V jistém smyslu je k axiomu výběru alternativní tzv. axiom determinovanosti, který říká: Každá, i nekonečná hra na přirozených číslech je determinována, tj. pro jednoho ze dvou protihráčů existuje vyhrávající strategie. (Pro konečné hry lze toto tvrzení dokázat matematickou indukcí.) Axiom determinovanosti je s axiomem výběru neslučitelný. Jeho pomocí lze však dokázat hypotézu kontinua. V teorii množin je navrhováno a rozebíráno i mnoho dalších axiomů, především těch, které postulují existenci různě velkých kardinálů. Uveďme některá jména: nedosažitelný, Mahlův, slabě kompaktní, subtilní, nevýslovný, Ramseyův, měřitelný, silně kompaktní, obří, atd.

Z různých axiomů lze dokázat různá tvrzení. Jak se Vám zamlouvá tzv. Goodsteinova věta [3]? (Viz Přílohu 2.) Lze ji dokázat ve standardní aritmetice vybudované v teorii množin. Slabší axiomy Peanovy aritmetiky k jejímu důkazu ale nestačí (nelze ji tu, ovšem ani vyvrátit).

Že ani se vztahem obou fyzikou využívaných nekonečen není vše prosté a průhledné, jak bychom si asi přáli, dokládá také tzv. Löwenheimova-Skolemova věta, říkající: Každý finitní formální systém má spočetný model. Mějme tedy spočetné nekonečno ω ($\aleph_0$) tj. mějme množinu všech přirozených čísel N. Cantorovo diagonální schéma nás přesvědčuje, že musí existovat i nekonečno nespočetné (viz Příloha 1), které lze v teorii množin snadno vybudovat.

Jak se pak máme srozumět s tím, že i k této teorii existuje model, který je toliko spočetný? Není to spor? Formálně logicky nikoli. Spor vzniká tím, že nejsme důslední a neoddělujeme jazyk a metajazyk. (Predikát náležení $\in$ není v obou modelech shodný, nevyjadřuje totéž.) Nerozlišování jazyka a metajazyka je však, bohužel, v lidském vyjadřování obvyklé. Neumíme vystoupit úplně ze svého světa a nahlížet jej zvenčí, ač právě o to fyzika obvykle usiluje. Směšujeme pohledy vnější a vnitřní. Zdá se, že intuice, jakkoli je ošidná a nespolehlivá, je v lidském poznání nezbytná a nepominutelná.

4 Deterministický chaos

Co je fyzikům do všech těch nekonečen? Nás se to netýká… Lze se ale otázat: Opravdu? Matematika je přece jazykem fyziky.

Jako ilustraci uveďme příklad z teorie deterministického chaosu. Cantorova množina je fraktál s metrickou dimenzí (Hausdorffovou, podobnostní, Kolmogorovou) $D = \ln 2/\ln 3 = 0{,}6309\ldots$, který nesmí chybět v žádné knize o deterministickém chaosu [4] (Viz Přílohu 3). Její struktura je příkladem struktury obvyklé u chaotických atraktorů disipativních dynamických systémů. Způsobů jak tuto množinu zkonstruovat je několik, nejznámější je jistě proces vyjímání prostřední (otevřené) třetiny z výchozího intervalu. To, co zůstane z původního intervalu <0,1> poté, „co jsme došli do nekonečna“, je právě Cantorova množina. Tato množina má Lebesqueovu míru nula (co zbylo má „délku“ $l_C = \lim(2/3)^n = 0$). Koncové body ponechaných intervalů v každém kroku (totiž konce první a třetí třetiny každého z intervalů z předchozího kroku) vytvářejí spočetnou množinu (v každém kroku je jich jen konečně mnoho $N_n=2^n$). Poté, co „dorazíme do nekonečna“ nám tyto body s jistotou zbudou nevyňaty. Je to všechno? Nikoli. V trojkové soustavě, s ciframi 0, 1 a 2, je Cantorova množina zapsána posloupnostmi cifer 0 a 2 (jedničky vždycky chybí, ty odpovídají středním třetinám). Ale těchto posloupností je právě tolik jako posloupností tvořených z cifer 0 a 1, které ve dvojkové interpretaci odpovídají všem bodům původního intervalu <0,1>. Je to tedy množina nespočetná. Překvapivě proto vyhlíží skutečnost, že mezi každými dvěma body Cantorovy množiny lze vždy najít celý interval bodů, které této množině nenáleží. Odtud název Cantorův prach či Cantorovo diskontinuum.

Podmínkou deterministického chaosu je nelinearita příslušných diferenciálních rovnic. Jak mohou být nelineární rovnice ošidné, demonstrují kupř. tzv. univerzální diferenciální rovnice. Taková rovnice je z experimentálního pohledu schopna vlastně dát řešení „popisující jakýkoli výsledek fyzikálního měření“. S libovolně zadanou spojitou funkcí se totiž některé její řešení ve spočetně mnoha bodech shoduje zcela přesně a mezi nimi odpovídá toto řešení zvolené funkci s libovolně zadanou přesností $\varepsilon > 0$. Chovají se řešení diferenciálních rovnic vždy podle našich očekávání? Sotva. Zmíněná rovnice není ovšem fyzikálně použitelná, nesplňuje požadavek jednoznačnosti řešení z počáteční podmínky.

V této souvislosti připomeňme tzv. stínové lemma z teorie deterministického chaosu [5]. Na počítači, striktně vzato, chaos nelze bezprostředně demonstrovat (ač se to běžně činí). Počítač pracuje diskrétně a má konečně mnoho stavů, takže opravdový chaos jako výstup nabídnout nemůže, situaci zachraňuje však to, že v libovolném ε-ovém okolí vypočtené trajektorie existuje autentická chaotická trajektorie, začínající ale z jiného blízkého počátečního bodu, než ze kterého se začala odvíjet trajektorie vypočítaná.

5 Fyzika a reálná čísla

Co je to fyzikální kontinuum? Co jsou to vůbec reálná čísla? Z hlediska teorie algoritmické složitosti [6] je reálné číslo dosti podivný pojem. Je-li vyjádřeno nekonečnou posloupností cifer, typické reálné číslo nese vlastně nekonečné množství informace a je ve smyslu této teorie „nahodilé“. To platí pro „skoro všechna“ reálná čísla. Takové reálné číslo nemůže být získáno jako výsledek měření, nemůže vyjít jako výsledek výpočtu, nelze je vlastně informačně zpracovávat. Typické reálné číslo je finitním procesem vůbec nedefinovatelné a je nepojmenovatelné [7]. Fyzikům jde vždy o to, najít hodnotu fyzikální veličiny s libovolnou přesností. Číslo je v tomto ohledu dáno algoritmem, umožňujícím další zpřesňování podle potřeby. Stojí za to číst provokativní článek R.Hamminga [8].

Fyzika žádá vymezení svých pojmů a veličin tak, aby byly měřitelné, aby byly vymezeny operacionalisticky. Alespoň v principu by mělo být možno hledanou veličinu měřit. Ostatně, kvantová mechanika, byť v jiném smyslu, přímo užívá termíny měřitelná a pozorovatelná veličina. Stále se vrací nesnadný problém pochopení procesu měření a interpretace kvantové mechaniky a celé kvantové fyziky vůbec.

Mohou být „divnosti“ kvantové teorie nějak navázány na „divnosti“ pogödelovské matematiky? Kvantová teorie zná spojitá pole a diskrétní kvanta. V tomto směru se spekulací nebojí R. Penrose [9],[10].

Sympatické a fyzikální mysli blízké je i snažení P.Vopěnky, který, ač velmi úspěšný matematik ve hře s problémy matematických nekonečen a velkých kardinálů, není těmito nekonečny příliš nadšen a usiluje o odlišné původní přístupy a o jiná uchopení problému. Nejprve matematicky v tzv. alternativní teorii množin [11], později filozofujícím rozborem představy obzoru (horizontu) [12], jako toho, co odděluje „osvětlenou“, ostrou a námi rozlišenou část pozorovaného předmětu od části „neosvětlené“.V této analýze se pak uplatňují pojmy neostrosti, nerozlišitelnosti apod.

Může fyzika využít ve svých teoriích výsledků matematických úvah o různých nekonečnech, či naopak, může matematikům něco předložit jako nový zdroj a motivaci?

6 Závěr

Fyzikové by asi měli dobrodružstvím s mnoha matematickými nekonečny věnovat pozornost. Kdysi byl v Československém časopise pro fyziku uveřejněn obrázek J.A.Wheelera, stojícího v posluchárně před tabulí, na níž bylo napsáno něco v tomto smyslu: „Gödelova věta je příliš závažná, než aby mohla být ponechána pouze matematikům“. Nelze ji parafrázovat: „Otázky nekonečna jsou příliš závažné, než aby mohly být ponechány pouze matematikům“? Máme už co nabídnout?

Literatura:

[1] B. Balcar , P. Štěpánek: *Teorie množin*, Academia, Praha 1986
[2] J. Jelen , Sborník ze 13. konference českých a slovenských fyziků, Zvolen 1999, s. 441
[3] A. Sochor: *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha 2001
[4] H.G. Schuster : *Deterministic Chaos*, Weinheim 1988
[5] P. Brunovský, PMFA 40 (1995), s.223
[6] G.J.Chaitin: *Algorithmic Information Theory*, Cambridge 1992
[7] R. Rucker: *Infinity and the Mind*, Drinceton 1995
[8] R.W. Hamming , PMFA 46 (2001), s.219
[9] R. Penrose: *The Emperor's New Mind*, Oxford 1989
[10] R. Penrose: *Shadows of the Mind*, Oxford 1994
[11] P. Vopěnka*: Úvod do matematiky v alternativnej teórii množin*, Bratislava 1989
[12] P. Vopěnka: *Meditace o základech vědy*, Praha 2001

NESPOČENOST MNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL ***Příloha 1***

Cantorovo diagonální schéma

Připusťme, že reálná čísla lze vzájemně jednoznačně přiřadit k číslům přirozeným, tj. že reálná čísla lze očíslovat $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$ Cantor ukázal, že to není možné, že mohutnosti obou množin se liší.

Omezme se na reálná čísla z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ (rozšíření nepředstavuje problém). Tato čísla mohou být zapsána nekonečnými posloupnostmi cifer 0 až 9 ve tvaru:

$$\begin{array}{lllllll} r_1 & 0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ r_2 & 0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ r_3 & 0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ r_4 & 0, & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Utvořme posloupnost $0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$, v níž $c_1 \neq a_{11}, c_2 \neq a_{22}, c_3 \neq a_{33}, c_4 \neq a_{44}, \ldots$ Ta reprezentuje jisté reálné číslo r.

Toto číslo v našem seznamu chybí. Jeho posloupnost cifer se od každé posloupnosti v seznamu liší nejméně v jedné cifře. (Možnou nejednoznačnost spojenou s ciframi 0 a 9 lze snadno obejít.)

Předpoklad, že je možné sestavit seznam všech reálných čísel, očíslovaných čísli přirozenými, vede tedy ke sporu. Mohutnost množiny reálných čísel je větší než mohutnost množiny čísel přirozených. Nekonečna jsou tedy nejméně dvě.

Rovněž sporem lze ukázat, že mohutnost potenční množiny (množiny všech podmnožin dané množiny) je vždy větší než mohutnost množiny původní. V teorii množin máme tedy nekonečen nekonečně mnoho. Není to až příliš mnoho?

GOODSTEINOVA VĚTA, viz [1], [3] *Příloha 2*

Každé přirozené číslo lze rozvinout jako součet mocnin o základu 2. V tomto rozvoji budeme rozvíjet i exponenty, exponenty exponentů atd…

Například pro číslo $x = 29$ rozvojem dostáváme:

$$x = 16 + 8 + 4 + 1 = 2^2 + 2^3 + 2^2 + 1 = 2^{(2^2)} 2^{(2+1)} + 1$$

Chápejme toto číslo jako 0tý člen Goodsteinovy posloupnosti x_0. Následující (první) člen získáme tak, že zaměníme 2 za 3 (číslo 1 se nemění) a odečteme jedničku. Druhý člen obdržíme záměnou základu 3 za 4 (číslo 1 se nemění, a kdyby se v rozvoji nacházelo číslo 2, nemění se ani ono) a odečteme jedničku atd…

V našem případě postupně dostáváme:

$$x_0 = 2^{\left(2^2\right)} + 2^{(2+1)} + 2^2 + 1 = 29$$

$$x_1 = 3^{\left(3^3\right)} + 3^{(3+1)} + 3^3 + 1 - 1 = 3^{\left(3^3\right)} + 3^{(3+1)} + 3^3 \cong 10^{12}$$

$$x_2 = 4^{\left(4^4\right)} + 4^{(4+1)} + 4^4 - 1 = 4^{\left(4^4\right)} + 4^{(4+1)} + 4^3 \cdot 3 + 4^2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3 \cong 10^{154}$$

$$x_3 = 5^{\left(5^5\right)} + 5^{(5+1)} + 5^3 \cdot 3 + 5^2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 \cong 10^{2200}$$

$$x_4 = 6^{\left(6^6\right)} + 6^{(6+1)} + 6^3 \cdot 3 + 6^2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 1 \cong 10^{36305}$$

$$x_5 = 7^{\left(7^7\right)} + 7^{(7+1)} + 7^3 \cdot 3 + 7^2 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 1 \cong 10^{696000}$$

atd…

Hodnoty $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ velmi rychle rostou.

Věta: Při jakémkoli počátečním čísle x_0 existuje takové přirozené číslo n, že n tý člen posloupnosti je roven nule, $x_n = 0$.

Tzn.: V konečném efektu tedy převáží nenápadné odečítání jedničky nad okázalým zvyšováním základu!

Tuto větu lze dokázat v Zermelově-Fraenkelově teorii množin, ale nelze ji dokázat (ani vyvrátit) v Peanově aritmetice. V důkazu se používá ordinální číslo ω a některá čísla větší, až po $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \varepsilon_0$.

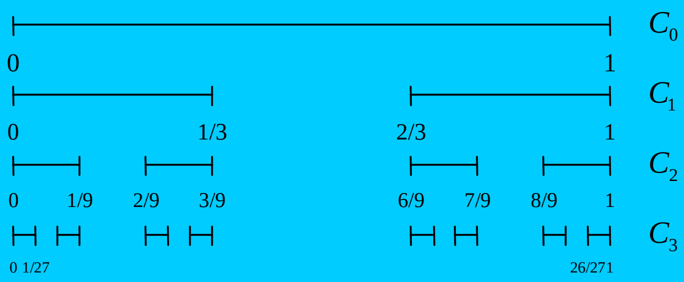
CANTOROVA MNOŽINA C *Příloha 3*

(Cantorův prach, Cantorovo diskontinuum)

Fraktál s Hausdorffovou dimenzí $D = \dfrac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309...$

Konstrukce: Postupně vyjímáme střední (otevřené) třetiny z původního intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

1. krok
2. krok
3. krok
4. krok



„až do nekonečna"

$$C = \lim_{n \to \infty} C_n$$

Koncových bodů je po každém kroku konečně mnoho.

Koncové body v kroku 2: $0,00\overline{0};\ 0,00\overline{2};\ 0,02\overline{0};\ 0,02\overline{2};\ 0,20\overline{0};\ 0,20\overline{2};\ 0,22\overline{0};\ 0,22\overline{2}$

Množina $\overline{C}$ koncových bodů všech intervalů „po dojití do nekonečna" je sice nekonečná, ale spočetná. Typický bod C je v trojkové soustavě zapsán libovolnou posloupností nul a dvojek:
$x = 0,022020002022202020020020202202...$

C je nespočetná množina s mohutností kontinua. Má bodů „stejně" jako původní interval $\langle 0,1 \rangle$. Obsahuje nejen koncové body, ty ji vyčerpat nemohou (ani při nekonečném počtu kroků). Ačkoli má míru nula, je většina jejích bodů spočetným diskrétním procesem nedostupná. Přestože je nespočetná, jde o diskontinuum. Každé dva body jsou odděleny. Mezi libovolnými dvěma body Cantorovy množiny leží někde celý interval bodů, které množině nepatří.