

Vektor, matice

Lineární algebra - základní definice

Vektor, matice

Uspořádanou n -tici reálných čísel a_1, \dots, a_n nazveme **vektorem**,

Lineární algebra - základní definice

Vektor, matice

Uspořádanou n -tici reálných čísel a_1, \dots, a_n nazveme **vektorem**, píšeme $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, potom \mathbf{a} nazveme **řádkovým vektorem**

Vektor, matice

Uspořádanou n -tici reálných čísel a_1, \dots, a_n nazveme **vektorem**, píšeme

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, potom \mathbf{a} nazveme **řádkovým vektorem** nebo

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, potom \mathbf{a} nazveme **sloupcovým vektorem**.

Lineární algebra - základní definice

Vektor, matice

Uspořádanou n -tici reálných čísel a_1, \dots, a_n nazveme **vektorem**, píšeme

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, potom \mathbf{a} nazveme **řádkovým vektorem** nebo

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, potom \mathbf{a} nazveme **sloupcovým vektorem**.

Uspořádanou $m \cdot n$ -tici reálných čísel zapsaných do obdélníkového schématu

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ nazveme **maticí** typu (m, n) . Chceme-li

zdůraznit typ matice, píšeme $\mathbf{A}_{(m,n)}$.

Operace s maticemi

Příklad : Vyrábí-li firma ve dvou závodech Z_1, Z_2 tři různé výrobky V_1, V_2, V_3 , můžeme množství těchto výrobků v jednotlivých závodech zapsat do matice \mathbf{A} typu $(2, 3)$. Píšeme $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde a_{ij} je množství j -tého výrobku vyráběné v i -tém závodě, například

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Příklad : Vyrábí-li firma ve dvou závodech Z_1, Z_2 tři různé výrobky V_1, V_2, V_3 , můžeme množství těchto výrobků v jednotlivých závodech zapsat do matice \mathbf{A} typu $(2, 3)$. Píšeme $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde a_{ij} je množství j -tého výrobku vyráběné v i -tém závodě, například

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matice můžeme násobit reálným číslem.

Příklad : Vyjadřuje - li matice \mathbf{A} z předchozího příkladu denní produkci, pak matice

$$\mathbf{B} = 5 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix} \text{ vyjadřuje pětidenní produkci.}$$

Operace s maticemi

Příklad : Vyrábí-li firma ve dvou závodech Z_1, Z_2 tři různé výrobky V_1, V_2, V_3 , můžeme množství těchto výrobků v jednotlivých závodech zapsat do matice \mathbf{A} typu $(2, 3)$. Píšeme $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde a_{ij} je množství j -tého výrobku vyráběné v i -tém závodě, například

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matice můžeme násobit reálným číslem.

Příklad : Vyjadřuje - li matice \mathbf{A} z předchozího příkladu denní produkci, pak matice

$$\mathbf{B} = 5 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix} \text{ vyjadřuje pětidenní produkci.}$$

Matice stejných typů můžeme sčítat.

Příklad : Matice

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 18 & 0 & 30 \end{pmatrix} \text{ vyjadřuje šestidenní produkci.}$$

Operace s maticemi

Transponovaná matice

Zaměníme-li v matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ úlohu řádků a sloupců, dostaneme matici k ní transponovanou, píšeme $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$

Příklad : Pro matici \mathbf{B} z předchozího příkladu platí $\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 0 \\ 6 & 30 \end{pmatrix}$

Operace s maticemi

Transponovaná matice

Zaměníme-li v matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ úlohu řádků a sloupců, dostaneme matici k ní transponovanou, píšeme $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$

Příklad : Pro matici \mathbf{B} z předchozího příkladu platí $\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 0 \\ 6 & 30 \end{pmatrix}$

Matice "navazujících typů" můžeme násobit

Příklad : Předpokládejme, že naše firma má tři odběratele O_1, O_2, O_3 . Uvažujme matici $\mathbf{C} = (c_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$, která vyjadřuje cenu zaplacenou j -tým odběratelem za i -tý výrobek, například

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Určeme matici $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Jde o matici typu $(2, 3)$, kde prvek d_{ij} vyjadřuje částku, kterou by zaplatil j -tý odběratel O_j za denní produkci i -tého závodu Z_i .

Operace s maticemi

Určeme matici $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Jde o matici typu $(2, 3)$, kde prvek d_{ij} vyjadřuje částku, kterou by zaplatil j -tý odběratel O_j za denní produkci i -tého závodu Z_i .

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & & \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Určeme matici $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Jde o matici typu $(2, 3)$, kde prvek d_{ij} vyjadřuje částku, kterou by zaplatil j -tý odběratel O_j za denní produkci i -tého závodu Z_i .

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 & \\ & & \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Určeme matici $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Jde o matici typu $(2, 3)$, kde prvek d_{ij} vyjadřuje částku, kterou by zaplatil j -tý odběratel O_j za denní produkci i -tého závodu Z_i .

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 14 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Určeme matici $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Jde o matici typu $(2, 3)$, kde prvek d_{ij} vyjadřuje částku, kterou by zaplatil j -tý odběratel O_j za denní produkci i -tého závodu Z_i .

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 14 \\ 31 & & \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Určeme matici $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Jde o matici typu $(2, 3)$, kde prvek d_{ij} vyjadřuje částku, kterou by zaplatil j -tý odběratel O_j za denní produkci i -tého závodu Z_i .

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 14 \\ 31 & 33 & 14 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Určeme matici $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Jde o matici typu $(2, 3)$, kde prvek d_{ij} vyjadřuje částku, kterou by zaplatil j -tý odběratel O_j za denní produkci i -tého závodu Z_i .

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 14 \\ 31 & 33 & 26 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Určeme matici $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Jde o matici typu $(2, 3)$, kde prvek d_{ij} vyjadřuje částku, kterou by zaplatil j -tý odběratel O_j za denní produkci i -tého závodu Z_i .

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 14 \\ 31 & 33 & 26 \end{pmatrix}$$

Pozor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \neq \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$ Matice $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$ neexistuje.

Relace mezi maticemi

Maticе **stejných typů** můžeme porovnávat. Mezi maticemi **A**, **B** existuje některá z relací $=$, $>$, $<$, \geq , \leq právě tehdy, platí-li stejný vztah pro všechny dvojice prvků matic na odpovídajících pozicích a_{ij} , b_{ij} .

Relace mezi maticemi

Maticе **stejných typů** můžeme porovnávat. Mezi maticemi **A**, **B** existuje některá z relací $=$, $>$, $<$, \geq , \leq právě tehdy, platí-li stejný vztah pro všechny dvojice prvků matic na odpovídajících pozicích a_{ij} , b_{ij} .

Příklad : Rozhodněte, zda jsou v nějaké z relací matice **A**, **B** z předchozích příkladů.

Relace mezi maticemi

Maticе **stejných typů** můžeme porovnávat. Mezi maticemi **A**, **B** existuje některá z relací $=$, $>$, $<$, \geq , \leq právě tehdy, platí-li stejný vztah pro všechny dvojice prvků matic na odpovídajících pozicích a_{ij} , b_{ij} .

Příklad : Rozhodněte, zda jsou v nějaké z relací matice **A**, **B** z předchozích příkladů.

Řešení: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix}$

Relace mezi maticemi

Matice **stejných typů** můžeme porovnávat. Mezi maticemi **A**, **B** existuje některá z relací $=$, $>$, $<$, \geq , \leq právě tehdy, platí-li stejný vztah pro všechny dvojice prvků matic na odpovídajících pozicích a_{ij} , b_{ij} .

Příklad : Rozhodněte, zda jsou v nějaké z relací matice **A**, **B** z předchozích příkladů.

Řešení:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Systemy lineárních rovnic

Systemem m lineárních algebraických rovnic o n neznámých z reálného oboru x_1, x_2, \dots, x_n rozumíme zápis

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Systémy lineárních rovnic

Systémem m lineárních algebraických rovnic o n neznámých z reálného oboru x_1, x_2, \dots, x_n rozumíme zápis

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Maticovým zápisem soustavy rovnic rozumíme vztah

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

Systémy lineárních rovnic

Systémem m lineárních algebraických rovnic o n neznámých z reálného oboru x_1, x_2, \dots, x_n rozumíme zápis

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Maticovým zápisem soustavy rovnic rozumíme vztah

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ nazýváme maticí soustavy,}$$

Systemy lineárních rovnic

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ je vektor neznámých}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ je vektor pravých stran.}$$

Systémy lineárních rovnic

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ je vektor neznámých}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ je vektor pravých stran.}$$

$$\text{Matici } (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ nazýváme rozšířenou maticí}$$

soustavy.

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Je dána soustava dvou rovnic o 3 neznámých

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$$

Určete matici, rozšířenou matici soustavy a vektor pravých stran.

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Je dána soustava dvou rovnic o 3 neznámých

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$$

Určete matici, rozšířenou matici soustavy a vektor pravých stran.

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Je dána soustava dvou rovnic o 3 neznámých

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$$

Určete matici, rozšířenou matici soustavy a vektor pravých stran.

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$,

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Je dána soustava dvou rovnic o 3 neznámých

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$$

Určete matici, rozšířenou matici soustavy a vektor pravých stran.

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right)$.

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Je dána soustava dvou rovnic o 3 neznámých

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + & 2x_2 & - 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + & 4x_2 + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Určete matici, rozšířenou matici soustavy a vektor pravých stran.

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right)$.

Definice : Vektor $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ nazveme **řešením soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$** , jestliže

platí **$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$** .

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ řešením soustavy z předchozího příkladu.

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ řešením

soustavy z předchozího příkladu.

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ řešením soustavy z předchozího příkladu.

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ řešením soustavy z předchozího příkladu.

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ řešením soustavy z předchozího příkladu.

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Oba vektory jsou řešením soustavy.

Speciální tvary matic

Libovolnou matici typu (n, n) nazveme **čtvercovou maticí** řádu n .

Speciální tvary matic

Libovolnou matici typu (n, n) nazveme **čtvercovou maticí** řádu n .

Pokud má čtvercová matice nenulové prvky jen na hlavní diagonále, nazveme ji **diagonální maticí**.

Příklad : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Speciální tvary matic

Libovolnou matici typu (n, n) nazveme **čtvercovou maticí** řádu n .

Pokud má čtvercová matice nenulové prvky jen na hlavní diagonále, nazveme ji **diagonální maticí**.

Příklad : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Pokud má nenulové prvky jen na a nad hlavní diagonálou, nazveme ji maticí **v horním trojúhelníkovém tvaru**.

Příklad : $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Speciální tvary matic

Libovolnou matici typu (m, n) nazveme maticí **v horním schodovitém tvaru**, jestliže

- Všechny případné nulové řádky jsou dole
- Každý nenulový řádek "začíná více nulami než předchozí".

Speciální tvary matic

Libovolnou matici typu (m, n) nazveme maticí **v horním schodovitém tvaru**, jestliže

- Všechny případné nulové řádky jsou dole
- Každý nenulový řádek "začíná více nulami než předchozí".

Příklad : Rozhodněte, které z matic jsou v horním schodovitém tvaru.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Speciální tvary matic

Libovolnou matici typu (m, n) nazveme maticí **v horním schodovitém tvaru**, jestliže

- Všechny případné nulové řádky jsou dole
- Každý nenulový řádek "začíná více nulami než předchozí".

Příklad : Rozhodněte, které z matic jsou v horním schodovitém tvaru.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Speciální matice

Matici $\mathbf{O} = (o_{ij})$, kde $o_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazveme **nulovou maticí** typu (m, n) . Chceme-li zdůraznit typ matice, píšeme $\mathbf{O}_{(m,n)}$.

Pro libovolnou matici $\mathbf{A}_{(m,n)}$ platí $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$.

Speciální matice

Matici $\mathbf{O} = (o_{ij})$, kde $o_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazveme **nulovou maticí** typu (m, n) . Chceme-li zdůraznit typ matice, píšeme $\mathbf{O}_{(m,n)}$.

Pro libovolnou matici $\mathbf{A}_{(m,n)}$ platí $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$.

Diagonální matici $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ nazveme **jednotkovou maticí**.

Chceme-li zdůraznit řád matice, píšeme \mathbf{E}_n .

Pro libovolné matice $\mathbf{B}_{(m,n)}$, $\mathbf{C}_{(n,k)}$ platí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B}$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}$.

Vektorový prostor

Označme $M^{m,n}$ množinu všech matic typu (m, n) . Množinu $M^{m,n}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem označme $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$. V případě, že m nebo n je rovno 1 a není-li nutné specifikovat, zda pracujeme se sloupcovými či řádkovými vektory, používáme pro množinu $M^{m,n}$ označení \mathbb{R}^n . (je to množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel). Prostor $\mathbb{V}_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nazýváme **aritmetický vektorový prostor**.

Vektorový prostor

Označme $M^{m,n}$ množinu všech matic typu (m, n) . Množinu $M^{m,n}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem označme $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$. V případě, že m nebo n je rovno 1 a není-li nutné specifikovat, zda pracujeme se sloupcovými či řádkovými vektory, používáme pro množinu $M^{m,n}$ označení \mathbb{R}^n . (je to množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel). Prostor $\mathbb{V}_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nazýváme **aritmetický vektorový prostor**.

Věta : Pro libovolná čísla α, β a libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_n$ platí:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

Vektorový prostor

Označme $M^{m,n}$ množinu všech matic typu (m, n) . Množinu $M^{m,n}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem označme $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$. V případě, že m nebo n je rovno 1 a není-li nutné specifikovat, zda pracujeme se sloupcovými či řádkovými vektory, používáme pro množinu $M^{m,n}$ označení \mathbb{R}^n . (je to množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel). Prostor $\mathbb{V}_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nazýváme **aritmetický vektorový prostor**.

Věta : Pro libovolná čísla α, β a libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_n$ platí:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

Vektorový prostor

Označme $M^{m,n}$ množinu všech matic typu (m, n) . Množinu $M^{m,n}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem označme $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$. V případě, že m nebo n je rovno 1 a není-li nutné specifikovat, zda pracujeme se sloupcovými či řádkovými vektory, používáme pro množinu $M^{m,n}$ označení \mathbb{R}^n . (je to množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel). Prostor $\mathbb{V}_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nazýváme **aritmetický vektorový prostor**.

Věta : Pro libovolná čísla α, β a libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_n$ platí:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

Vektorový prostor

Označme $M^{m,n}$ množinu všech matic typu (m, n) . Množinu $M^{m,n}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem označme $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$. V případě, že m nebo n je rovno 1 a není-li nutné specifikovat, zda pracujeme se sloupcovými či řádkovými vektory, používáme pro množinu $M^{m,n}$ označení \mathbb{R}^n . (je to množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel). Prostor $\mathbb{V}_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nazýváme **aritmetický vektorový prostor**.

Věta : Pro libovolná čísla α, β a libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_n$ platí:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- existuje $-\mathbf{a} : -\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$

Vektorový prostor

Označme $M^{m,n}$ množinu všech matic typu (m, n) . Množinu $M^{m,n}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem označme $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$. V případě, že m nebo n je rovno 1 a není-li nutné specifikovat, zda pracujeme se sloupcovými či řádkovými vektory, používáme pro množinu $M^{m,n}$ označení \mathbb{R}^n . (je to množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel). Prostor $\mathbb{V}_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nazýváme **aritmetický vektorový prostor**.

Věta : Pro libovolná čísla α, β a libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_n$ platí:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- existuje $-\mathbf{a} : -\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Vektorový prostor

Označme $M^{m,n}$ množinu všech matic typu (m, n) . Množinu $M^{m,n}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem označme $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$. V případě, že m nebo n je rovno 1 a není-li nutné specifikovat, zda pracujeme se sloupcovými či řádkovými vektory, používáme pro množinu $M^{m,n}$ označení \mathbb{R}^n . (je to množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel). Prostor $\mathbb{V}_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nazýváme **aritmetický vektorový prostor**.

Věta : Pro libovolná čísla α, β a libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_n$ platí:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- existuje $-\mathbf{a} : -\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$
- $\alpha \cdot \beta \cdot \mathbf{a} = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a}$

Vektorový prostor

Označme $M^{m,n}$ množinu všech matic typu (m, n) . Množinu $M^{m,n}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem označme $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$. V případě, že m nebo n je rovno 1 a není-li nutné specifikovat, zda pracujeme se sloupcovými či řádkovými vektory, používáme pro množinu $M^{m,n}$ označení \mathbb{R}^n . (je to množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel). Prostor $\mathbb{V}_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nazýváme **aritmetický vektorový prostor**.

Věta : Pro libovolná čísla α, β a libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_n$ platí:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- existuje $-\mathbf{a} : -\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$
- $\alpha \cdot \beta \cdot \mathbf{a} = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{a}$

Vektorový prostor

Označme $M^{m,n}$ množinu všech matic typu (m, n) . Množinu $M^{m,n}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem označme $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$. V případě, že m nebo n je rovno 1 a není-li nutné specifikovat, zda pracujeme se sloupcovými či řádkovými vektory, používáme pro množinu $M^{m,n}$ označení \mathbb{R}^n . (je to množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel). Prostor $\mathbb{V}_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nazýváme **aritmetický vektorový prostor**.

Věta : Pro libovolná čísla α, β a libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_n$ platí:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- existuje $-\mathbf{a} : -\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$
- $\alpha \cdot \beta \cdot \mathbf{a} = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{a}$
- $\alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \cdot \mathbf{b}$

Vektorový prostor

Vektorovým (nebo též lineárním) prostorem nazveme strukturu $(P, "+", "\cdot")$ pro libovolnou množinu P , pokud na této množině zavedeme operace sčítání a násobení číslem tak, aby pro ně bylo splněno všech osm vlastností z předchozí věty.

Vektorový prostor

Vektorovým (nebo též lineárním) prostorem nazveme strukturu $(P, "+", "\cdot")$ pro libovolnou množinu P , pokud na této množině zavedeme operace sčítání a násobení číslem tak, aby pro ně bylo splněno všech osm vlastností z předchozí věty.

Příklad : Prostor všech matic daného typu $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$ je také lineárním prostorem.

Lineární kombinace

Jsou-li ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ vektory z \mathbb{V}_n a $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, pak vektor

$\mathbf{x} = c_1 \cdot {}^1\mathbf{x} + c_2 \cdot {}^2\mathbf{x} + \dots + c_m \cdot {}^m\mathbf{x}$ nazveme **lineární kombinací** vektorů ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$.

Lineární kombinace

Jsou-li ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ vektory z \mathbb{V}_n a $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, pak vektor

$\mathbf{x} = c_1 \cdot {}^1\mathbf{x} + c_2 \cdot {}^2\mathbf{x} + \dots + c_m \cdot {}^m\mathbf{x}$ nazveme **lineární kombinací** vektorů ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$.

Příklad : Je vektor $\mathbf{x} = (4, -1, 10, 12)$ lineární kombinací vektorů ${}^1\mathbf{x} = (1, 0, 5, 7)$ a ${}^2\mathbf{x} = (2, -1, 0, -2)$?

Lineární kombinace

Jsou-li ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ vektory z \mathbb{V}_n a $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, pak vektor $\mathbf{x} = c_1 \cdot {}^1\mathbf{x} + c_2 \cdot {}^2\mathbf{x} + \dots + c_m \cdot {}^m\mathbf{x}$ nazveme **lineární kombinací** vektorů ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$.

Příklad : Je vektor $\mathbf{x} = (4, -1, 10, 12)$ lineární kombinací vektorů ${}^1\mathbf{x} = (1, 0, 5, 7)$ a ${}^2\mathbf{x} = (2, -1, 0, -2)$?

Řešení: Koeficienty c_1, c_2 lineární kombinace musí vyhovovat soustavě rovnic

$$1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 = 4$$

$$0 \cdot c_1 - 1 \cdot c_2 = -1$$

$$5 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = 10$$

$$7 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 = 12$$

Lineární kombinace

Jsou-li ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ vektory z \mathbb{V}_n a $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, pak vektor $\mathbf{x} = c_1 \cdot {}^1\mathbf{x} + c_2 \cdot {}^2\mathbf{x} + \dots + c_m \cdot {}^m\mathbf{x}$ nazveme **lineární kombinací** vektorů ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$.

Příklad : Je vektor $\mathbf{x} = (4, -1, 10, 12)$ lineární kombinací vektorů ${}^1\mathbf{x} = (1, 0, 5, 7)$ a ${}^2\mathbf{x} = (2, -1, 0, -2)$?

Řešení: Koeficienty c_1, c_2 lineární kombinace musí vyhovovat soustavě rovnic

$$1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 = 4$$

$$0 \cdot c_1 - 1 \cdot c_2 = -1$$

$$5 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = 10$$

$$7 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 = 12$$

Zřejmě jsou $c_1 = 2, c_2 = 1$ řešením této soustavy. Tedy $\mathbf{x} = 2 \cdot {}^1\mathbf{x} + {}^2\mathbf{x}$

Lineární závislost

Řekneme, že vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ jsou **lineárně závislé**, jestliže je mezi nimi aspoň jeden vektor, který je kombinací ostatních. Pokud žádný takový vektor neexistuje, řekneme, že vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ jsou **lineárně nezávislé**.

Lineární závislost

Řekneme, že vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ jsou **lineárně závislé**, jestliže je mezi nimi aspoň jeden vektor, který je kombinací ostatních. Pokud žádný takový vektor neexistuje, řekneme, že vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ jsou **lineárně nezávislé**.

Příklad :

Vektory $\mathbf{x}, {}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}$ z předchozího příkladu jsou

Vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}$ jsou

Lineární závislost

Řekneme, že vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ jsou **lineárně závislé**, jestliže je mezi nimi aspoň jeden vektor, který je kombinací ostatních. Pokud žádný takový vektor neexistuje, řekneme, že vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ jsou **lineárně nezávislé**.

Příklad :

Vektory $\mathbf{x}, {}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}$ z předchozího příkladu jsou ... **lineárně závislé**.

Vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}$ jsou ... **lineárně nezávislé**.

Lineární závislost

Řekneme, že vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ jsou **lineárně závislé**, jestliže je mezi nimi aspoň jeden vektor, který je kombinací ostatních. Pokud žádný takový vektor neexistuje, řekneme, že vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ jsou **lineárně nezávislé**.

Příklad :

Vektory $\mathbf{x}, {}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}$ z předchozího příkladu jsou ... **lineárně závislé**.

Vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}$ jsou ... **lineárně nezávislé**.

Poznámka : Vektory ${}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když vektorová rovnice $c_1 \cdot {}^1\mathbf{x} + c_2 \cdot {}^2\mathbf{x} + \dots + c_m \cdot {}^m\mathbf{x} = \mathbf{0}$ má **jediné** řešení $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_m = 0$.

Vektory jsou lineárně závislé, existuje-li i jiné než nulové řešení.

Báze lineárního prostoru

Je-li \mathbb{P} vektorový prostor a jsou-li ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \dots, {}^n\mathbf{e}$ takové vektory z tohoto prostoru, že

- jsou lineárně nezávislé
- každý vektor z \mathbb{P} lze vyjádřit jako jejich kombinaci,

pak ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \dots, {}^n\mathbf{e}$ nazveme **bází** prostoru \mathbb{P} .

Báze lineárního prostoru

Je-li \mathbb{P} vektorový prostor a jsou-li ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \dots, {}^n\mathbf{e}$ takové vektory z tohoto prostoru, že

- jsou lineárně nezávislé
- každý vektor z \mathbb{P} lze vyjádřit jako jejich kombinaci,

pak ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \dots, {}^n\mathbf{e}$ nazveme **bází** prostoru \mathbb{P} .

Příklad : Uvažujme prostor \mathbb{V}_3 a v něm vektory $\mathbf{a} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$ a $\mathbf{d} = (0, 0, 0)$.

- tvoří $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ bázi prostoru \mathbb{V} ? ...
- tvoří \mathbf{b}, \mathbf{c} bázi prostoru \mathbb{V} ? ...
- tvoří $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ bázi prostoru \mathbb{V} ? ...

Báze lineárního prostoru

Je-li \mathbb{P} vektorový prostor a jsou-li ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \dots, {}^n\mathbf{e}$ takové vektory z tohoto prostoru, že

- jsou lineárně nezávislé
- každý vektor z \mathbb{P} lze vyjádřit jako jejich kombinaci,

pak ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \dots, {}^n\mathbf{e}$ nazveme **bází** prostoru \mathbb{P} .

Příklad : Uvažujme prostor \mathbb{V}_3 a v něm vektory $\mathbf{a} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$ a $\mathbf{d} = (0, 0, 0)$.

- tvoří $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ bázi prostoru \mathbb{V} ? ... **NE!**
- tvoří \mathbf{b}, \mathbf{c} bázi prostoru \mathbb{V} ? ...
- tvoří $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ bázi prostoru \mathbb{V} ? ...

Báze lineárního prostoru

Je-li \mathbb{P} vektorový prostor a jsou-li ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \dots, {}^n\mathbf{e}$ takové vektory z tohoto prostoru, že

- jsou lineárně nezávislé
- každý vektor z \mathbb{P} lze vyjádřit jako jejich kombinaci,

pak ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \dots, {}^n\mathbf{e}$ nazveme **bází** prostoru \mathbb{P} .

Příklad : Uvažujme prostor \mathbb{V}_3 a v něm vektory $\mathbf{a} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$ a $\mathbf{d} = (0, 0, 0)$.

- tvoří $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ bázi prostoru \mathbb{V} ? ... **NE!**
- tvoří \mathbf{b}, \mathbf{c} bázi prostoru \mathbb{V} ? ... **NE!**
- tvoří $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ bázi prostoru \mathbb{V} ? ...

Báze lineárního prostoru

Je-li \mathbb{P} vektorový prostor a jsou-li ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \dots, {}^n\mathbf{e}$ takové vektory z tohoto prostoru, že

- jsou lineárně nezávislé
- každý vektor z \mathbb{P} lze vyjádřit jako jejich kombinaci,

pak ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \dots, {}^n\mathbf{e}$ nazveme **bází** prostoru \mathbb{P} .

Příklad : Uvažujme prostor \mathbb{V}_3 a v něm vektory $\mathbf{a} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$ a $\mathbf{d} = (0, 0, 0)$.

- tvoří $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ bázi prostoru \mathbb{V} ? ... **NE!**
- tvoří \mathbf{b}, \mathbf{c} bázi prostoru \mathbb{V} ? ... **NE!**
- tvoří $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ bázi prostoru \mathbb{V} ? ... **ANO!**

Dimenze lineárního prostoru

V prostoru \mathbb{V}_n existuje vždy báze, například takzvaná **kanonická báze**:

$${}^1\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0)$$

$${}^2\mathbf{e} = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$${}^n\mathbf{e} = (0, 0, \dots, 1)$$

Dimenze lineárního prostoru

V prostoru \mathbb{V}_n existuje vždy báze, například takzvaná **kanonická báze**:

$${}^1\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0)$$

$${}^2\mathbf{e} = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$${}^n\mathbf{e} = (0, 0, \dots, 1)$$

Skutečně, nezávislost je zřejmá. Navíc pro libovolný vektor

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{V}_n \text{ platí } \mathbf{a} = a_1 \cdot {}^1\mathbf{e} + a_2 \cdot {}^2\mathbf{e} + \dots + a_n \cdot {}^n\mathbf{e}$$

Dimenze lineárního prostoru

V prostoru \mathbb{V}_n existuje vždy báze, například takzvaná **kanonická báze**:

$${}^1\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0)$$

$${}^2\mathbf{e} = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$${}^n\mathbf{e} = (0, 0, \dots, 1)$$

Skutečně, nezávislost je zřejmá. Navíc pro libovolný vektor

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{V}_n \text{ platí } \mathbf{a} = a_1 \cdot {}^1\mathbf{e} + a_2 \cdot {}^2\mathbf{e} + \dots + a_n \cdot {}^n\mathbf{e}$$

Poznámka : Každá skupina n lineárně nezávislých vektorů z \mathbb{V}_n tvoří bázi. V jakékoliv skupině vektorů z \mathbb{V}_n je nejvýše n lineárně nezávislých. Číslo n nazýváme **dimenze** prostoru \mathbb{V}_n .

Hodnost

Je-li $\mathbf{X} = {}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ skupina vektorů z prostoru \mathbb{P} , pak maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve skupině \mathbf{X} nazveme **hodností \mathbf{X}** a značíme $h(\mathbf{X})$.

Hodnost

Je-li $\mathbf{X} = {}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ skupina vektorů z prostoru \mathbb{P} , pak maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve skupině \mathbf{X} nazveme **hodností \mathbf{X}** a značíme $h(\mathbf{X})$.

Poznámka : Uvažujme matici \mathbf{A} typu (m, n) . Položíme-li za \mathbf{X} řádky matice \mathbf{A} , pak $h(\mathbf{X})$ nazveme **řádkovou hodností \mathbf{A}** , pro sloupce matice mluvíme o **sloupcové hodnosti**.

Hodnost

Je-li $\mathbf{X} = {}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ skupina vektorů z prostoru \mathbb{P} , pak maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve skupině \mathbf{X} nazveme **hodností \mathbf{X}** a značíme $h(\mathbf{X})$.

Poznámka : Uvažujme matici \mathbf{A} typu (m, n) . Položíme-li za \mathbf{X} řádky matice \mathbf{A} , pak $h(\mathbf{X})$ nazveme **řádkovou hodností \mathbf{A}** , pro sloupce matice mluvíme o **sloupcové hodnosti**.

Příklad : Určete řádkovou a sloupcovou hodnost matice

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost

Je-li $\mathbf{X} = {}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, \dots, {}^m\mathbf{x}$ skupina vektorů z prostoru \mathbb{P} , pak maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve skupině \mathbf{X} nazveme **hodností \mathbf{X}** a značíme $h(\mathbf{X})$.

Poznámka : Uvažujme matici \mathbf{A} typu (m, n) . Položíme-li za \mathbf{X} řádky matice \mathbf{A} , pak $h(\mathbf{X})$ nazveme **řádkovou hodností \mathbf{A}** , pro sloupce matice mluvíme o **sloupcové hodnosti**.

Příklad : Určete řádkovou a sloupcovou hodnost matice

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Řádky jsou zřejmě lineárně nezávislé (ani jeden není násobkem druhého), takže řádková hodnost je 2. Sloupcová hodnost je také 2, protože poslední dva sloupce jsou evidentně lineárně nezávislé a ostatní jsou jejich lineární kombinací.

Hodnost

Je-li \mathbf{A} matice typu (m, n) , pak její **sloupcová hodnost je rovna řádkové hodnosti**, značíme ji $h(\mathbf{A})$.

Hodnost

Je-li \mathbf{A} matice typu (m, n) , pak její **sloupcová hodnost je rovna řádkové hodnosti**, značíme ji $h(\mathbf{A})$.

Důsledek : $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$

Hodnost

Je-li \mathbf{A} matice typu (m, n) , pak její **sloupcová hodnost je rovna řádkové hodnosti**, značíme ji $h(\mathbf{A})$.

Důsledek : $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$

Důsledek : $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$

Hodnost

Je-li \mathbf{A} matice typu (m, n) , pak její **sloupcová hodnost je rovna řádkové hodnosti**, značíme ji $h(\mathbf{A})$.

Důsledek : $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$

Důsledek : $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$

Příklad : Určete hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hodnost

Je-li \mathbf{A} matice typu (m, n) , pak její **sloupcová hodnost je rovna řádkové hodnosti**, značíme ji $h(\mathbf{A})$.

Důsledek : $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$

Důsledek : $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$

Příklad : Určete hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: První tři řádky jsou evidentně lineárně nezávislé, takže hodnost je 3.

Věta : Horní schodovitá matice má hodnost rovnu počtu jejích nenulových řádků.

Elementární úpravy

Uvažujme matici **A** typu (m, n) . Vytvoříme-li z matice **A** matici **B** tak, že

Elementární úpravy

Uvažujme matici **A** typu (m, n) . Vytvoříme-li z matice **A** matici **B** tak, že

- Vyměníme navzájem dva libovolné řádky matice a zbytek necháme beze změny nebo

Elementární úpravy

Uvažujme matici **A** typu (m, n) . Vytvoříme-li z matice **A** matici **B** tak, že

- Vyměníme navzájem dva libovolné řádky matice a zbytek necháme beze změny nebo
- jeden řádek vynásobíme libovolným nenulovým číslem a ostatní řádky necháme beze změny nebo

Elementární úpravy

Uvažujme matici **A** typu (m, n) . Vytvoříme-li z matice **A** matici **B** tak, že

- Vyměníme navzájem dva libovolné řádky matice a zbytek necháme beze změny nebo
- jeden řádek vynásobíme libovolným nenulovým číslem a ostatní řádky necháme beze změny nebo
- k jednomu z řádků matice přičteme libovolný násobek jiného řádku a ostatní necháme beze změny,

Elementární úpravy

Uvažujme matici \mathbf{A} typu (m, n) . Vytvoříme-li z matice \mathbf{A} matici \mathbf{B} tak, že

- Vyměníme navzájem dva libovolné řádky matice a zbytek necháme beze změny nebo
- jeden řádek vynásobíme libovolným nenulovým číslem a ostatní řádky necháme beze změny nebo
- k jednomu z řádků matice přičteme libovolný násobek jiného řádku a ostatní necháme beze změny,

pak řekneme, že \mathbf{B} vznikla z \mathbf{A} pomocí **základních elementárních transformací**. Aplikujeme-li několik těchto základních úprav po sobě, řekneme, že \mathbf{B} vznikla z \mathbf{A} pomocí **elementárních transformací** a píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Elementární úpravy

Uvažujme matici \mathbf{A} typu (m, n) . Vytvoříme-li z matice \mathbf{A} matici \mathbf{B} tak, že

- Vyměníme navzájem dva libovolné řádky matice a zbytek necháme beze změny nebo
- jeden řádek vynásobíme libovolným nenulovým číslem a ostatní řádky necháme beze změny nebo
- k jednomu z řádků matice přičteme libovolný násobek jiného řádku a ostatní necháme beze změny,

pak řekneme, že \mathbf{B} vznikla z \mathbf{A} pomocí **základních elementárních transformací**. Aplikujeme-li několik těchto základních úprav po sobě, řekneme, že \mathbf{B} vznikla z \mathbf{A} pomocí **elementárních transformací** a píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Poznámka : Elementární transformace mají široké využití, například při určování hodnosti matice, řešení systémů rovnic, hledání inverzní matice či výpočtu determinantu.

Elementární úpravy

Příklad : Pomocí elementárních transformací převed'te matici na schodovitý

tvar. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$

Elementární úpravy

Příklad : Pomocí elementárních transformací převed'te matici na schodovitý

$$\text{tvar. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejprve vyměníme první a třetí řádek

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementární úpravy

Příklad : Pomocí elementárních transformací převed'te matici na schodovitý

$$\text{tvar. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejprve vyměníme první a třetí řádek

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pomocí prvního řádku vynulujeme první číslo na ostatních řádcích:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \\ 0 & -3 & -14 & -35 \end{pmatrix}$$

Elementární úpravy

Příklad : Pomocí elementárních transformací převed'te matici na schodovitý

tvar. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení: Nejprve vyměníme první a třetí řádek

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pomocí prvního řádku vynulujeme první číslo na ostatních řádcích:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \\ 0 & -3 & -14 & -35 \end{pmatrix}$$

Nyní stačí přičíst 1,5-násobek druhého řádku ke třetímu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \\ 0 & -3 & -14 & -35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \\ 0 & 0 & 4 & 8,5 \end{pmatrix}.$$

Elementární úpravy a hodnost matice

Věta : Elementární transformace nemění hodnost matice.

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ z předchozího příkladu platí $h(\mathbf{A}) = 3$.

Při řešení úlohy určení hodnosti vždy nejprve převedeme matici pomocí elementárních úprav do schodovitého tvaru a potom určíme hodnost jako počet nenulových řádků.

Determinant matice

Bud' \mathbf{A} čtvercová matice řádu n . **Determinant** matice \mathbf{A} je **číslo** značené $|\mathbf{A}|$ definované jako

Determinant matice

Bud' \mathbf{A} čtvercová matice řádu n . **Determinant** matice \mathbf{A} je **číslo** značené $|\mathbf{A}|$ definované jako

- a_{11} pro $n = 1$

Determinant matice

Bud' \mathbf{A} čtvercová matice řádu n . Determinant matice \mathbf{A} je číslo značené $|\mathbf{A}|$ definované jako

- a_{11} pro $n = 1$
- $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ pro $n = 2$

Determinant matice

Bud' \mathbf{A} čtvercová matice řádu n . **Determinant** matice \mathbf{A} je **číslo** značené $|\mathbf{A}|$ definované jako

- a_{11} pro $n = 1$
- $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ pro $n = 2$
- $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$
 $-(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$

pro $n = 3$... součiny ve směru diagonál: tzv. **Sarrusovo pravidlo**

Determinant matice

Bud' \mathbf{A} čtvercová matice řádu n . **Determinant** matice \mathbf{A} je **číslo** značené $|\mathbf{A}|$ definované jako

- a_{11} pro $n = 1$
- $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ pro $n = 2$
- $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$
pro $n = 3$... součiny ve směru diagonál: tzv. **Sarrusovo pravidlo**
- pro $n \geq 4$ neexistuje obdoba Sarrusova pravidla, determinant definujeme pomocí rozvoje podle prvního řádku jako

$$a_{11} \cdot |\mathbf{A}_{11}| - a_{12} \cdot |\mathbf{A}_{12}| + a_{13} \cdot |\mathbf{A}_{13}| - a_{14} \cdot |\mathbf{A}_{14}| (+ \dots),$$

kde \mathbf{A}_{ij} je submatice, která vznikne z \mathbf{A} vypuštěním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2.5$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 10 - 21 = -11$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 = 1.5.1$$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 0 = 5.1 + 0.4 \cdot 0$$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 2$$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 5 \cdot 2$$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 4$$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 \cdot 1$$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 \cdot 1 = 9$$

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici \mathbf{A} platí: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 \cdot 1 = 9$$

Výpočet determinantu rozvojem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

Výpočet determinantu rozvojem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu rozvojem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu rozvojem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu rozvojem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu rozvojem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -70$$

Výpočet determinantu rozvojem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -70$$

Věta : Determinant matice v horním trojúhelníkovém tvaru je roven součinu jejích diagonálních členů.

Příklad :

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu rozvojem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -70$$

Věta : Determinant matice v horním trojúhelníkovém tvaru je roven součinu jejích diagonálních členů.

Příklad : $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 \cdot 5 = 35$

Výpočet determinantu rozvojem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -70$$

Věta : Determinant matice v horním trojúhelníkovém tvaru je roven součinu jejích diagonálních členů.

Příklad : $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 \cdot 5 = 35$

Poznámka : Při výpočtu determinantu lze pomocí elementárních úprav převést matici na schodovitý tvar.

Pozor, některé transformace mění hodnotu determinantu!

Výpočet determinantu pomocí elementárních úprav

Jestliže matice **B** vznikne z matice **A** pomocí základní elementární transformace

Výpočet determinantu pomocí elementárních úprav

Jestliže matice **B** vznikne z matice **A** pomocí základní elementární transformace

- výměna řádků, pak $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$

Výpočet determinantu pomocí elementárních úprav

Jestliže matice **B** vznikne z matice **A** pomocí základní elementární transformace

- výměna řádků, pak $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$
- vynásobení jednoho řádku číslem α , pak $|\mathbf{B}| = \alpha \cdot |\mathbf{A}|$

Výpočet determinantu pomocí elementárních úprav

Jestliže matice **B** vznikne z matice **A** pomocí základní elementární transformace

- výměna řádků, pak $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$
- vynásobení jednoho řádku číslem α , pak $|\mathbf{B}| = \alpha \cdot |\mathbf{A}|$
- přičtením jednoho řádku k jinému, pak $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$

Výpočet determinantu pomocí elementárních úprav

Jestliže matice **B** vznikne z matice **A** pomocí základní elementární transformace

- výměna řádků, pak $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$
- vynásobení jednoho řádku číslem α , pak $|\mathbf{B}| = \alpha \cdot |\mathbf{A}|$
- přičtením jednoho řádku k jinému, pak $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$

Příklad : Určete hodnotu determinantu matice z předchozího příkladu pomocí elementárních úprav.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu pomocí elementárních úprav

Jestliže matice **B** vznikne z matice **A** pomocí základní elementární transformace

- výměna řádků, pak $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$
- vynásobení jednoho řádku číslem α , pak $|\mathbf{B}| = \alpha \cdot |\mathbf{A}|$
- přičtením jednoho řádku k jinému, pak $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$

Příklad : Určete hodnotu determinantu matice z předchozího příkladu pomocí elementárních úprav.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 0 & 35 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2,5 \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu pomocí elementárních úprav

Jestliže matice **B** vznikne z matice **A** pomocí základní elementární transformace

- výměna řádků, pak $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$
- vynásobení jednoho řádku číslem α , pak $|\mathbf{B}| = \alpha \cdot |\mathbf{A}|$
- přičtením jednoho řádku k jinému, pak $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$

Příklad : Určete hodnotu determinantu matice z předchozího příkladu pomocí elementárních úprav.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 0 & 35 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2,5 \end{vmatrix} = -70$$

Inverzní matice

Čtvercovou matici \mathbf{A} , pro kterou platí $|\mathbf{A}| \neq 0$, nazveme **regulární**.

V opačném případě, tedy má-li nulový determinant, ji nazveme **singulární**.

Inverzní matice

Čtvercovou matici \mathbf{A} , pro kterou platí $|\mathbf{A}| \neq 0$, nazveme **regulární**.

V opačném případě, tedy má-li nulový determinant, ji nazveme **singulární**.

Věta : Jestliže je \mathbf{A} regulární matice, pak existuje matice \mathbf{B} , pro niž platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. O matici \mathbf{B} říkáme, že je **inverzní** k matici \mathbf{A} . Matice \mathbf{B} je

určena jednoznačně, značíme ji \mathbf{A}^{-1} .

Inverzní matice

Čtvercovou matici \mathbf{A} , pro kterou platí $|\mathbf{A}| \neq 0$, nazveme **regulární**.

V opačném případě, tedy má-li nulový determinant, ji nazveme **singulární**.

Věta : Jestliže je \mathbf{A} regulární matice, pak existuje matice \mathbf{B} , pro niž platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. O matici \mathbf{B} říkáme, že je **inverzní** k matici \mathbf{A} . Matice \mathbf{B} je

určena jednoznačně, značíme ji \mathbf{A}^{-1} .

Příklad : Ověřte, zda je matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice

Čtvercovou matici \mathbf{A} , pro kterou platí $|\mathbf{A}| \neq 0$, nazveme **regulární**.

V opačném případě, tedy má-li nulový determinant, ji nazveme **singulární**.

Věta : Jestliže je \mathbf{A} regulární matice, pak existuje matice \mathbf{B} , pro niž platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. O matici \mathbf{B} říkáme, že je **inverzní** k matici \mathbf{A} . Matice \mathbf{B} je

určena jednoznačně, značíme ji \mathbf{A}^{-1} .

Příklad : Ověřte, zda je matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice

Čtvercovou matici \mathbf{A} , pro kterou platí $|\mathbf{A}| \neq 0$, nazveme **regulární**.

V opačném případě, tedy má-li nulový determinant, ji nazveme **singulární**.

Věta : Jestliže je \mathbf{A} regulární matice, pak existuje matice \mathbf{B} , pro niž platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. O matici \mathbf{B} říkáme, že je **inverzní** k matici \mathbf{A} . Matice \mathbf{B} je

určena jednoznačně, značíme ji \mathbf{A}^{-1} .

Příklad : Ověřte, zda je matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přímé řešení systému rovnic pomocí inverzní matice

Je-li $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ systém rovnic s regulární maticí soustavy \mathbf{A} , pak má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Přímé řešení systému rovnic pomocí inverzní matice

Je-li $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ systém rovnic s regulární maticí soustavy \mathbf{A} , pak má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Příklad : Najděte řešení systému pomocí inverzní matice.

$$2x_1 - x_2 = 2$$

$$-5x_1 + 3x_2 = -3$$

Přímé řešení systému rovnic pomocí inverzní matice

Je-li $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ systém rovnic s **regulární** maticí soustavy \mathbf{A} , pak má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Příklad : Najděte řešení systému pomocí inverzní matice.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -x_2 & = 2 \\ -5x_1 & +3x_2 & = -3 \end{array}$$

Řešení: Matice soustavy je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Z předchozího příkladu víme, že $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,

Přímé řešení systému rovnic pomocí inverzní matice

Je-li $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ systém rovnic s **regulární** maticí soustavy \mathbf{A} , pak má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Příklad : Najděte řešení systému pomocí inverzní matice.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -x_2 & = 2 \\ -5x_1 & +3x_2 & = -3 \end{array}$$

Řešení: Matice soustavy je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Z předchozího příkladu víme, že $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\text{takže } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ZK: } L_1 = 2 \cdot 3 - 4 = 2 = P_1, L_2 = -5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = -3 = P_2$$

Přímé řešení systému rovnic pomocí determinantů

Cramerovo pravidlo:

Je-li A **regulární** matice řádu n a \mathbf{b} vektor pravých stran, pak řešení systému $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je určeno jednoznačně a platí $x_i = \frac{|\mathbf{B}_i|}{|\mathbf{A}|}$, $i = 1, \dots, n$, kde matice \mathbf{B}_i vzniknou z \mathbf{A} nahrazením i -tého sloupce vektorem \mathbf{b} .

Přímé řešení systému rovnic pomocí determinantů

Cramerovo pravidlo:

Je-li A regulární matice řádu n a \mathbf{b} vektor pravých stran, pak řešení systému

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je určeno jednoznačně a platí $x_i = \frac{|\mathbf{B}_i|}{|\mathbf{A}|}$, $i = 1, \dots, n$, kde matice \mathbf{B}_i

vzniknou z \mathbf{A} nahrazením i -tého sloupce vektorem \mathbf{b} .

Příklad : Cramerovým pravidlem vyřešte soustavu rovnic

$$2x_1 \quad -x_2 \quad \quad \quad = 4$$

$$x_1 \quad +3x_2 \quad -5x_3 \quad = 4$$

$$\quad \quad 2x_2 \quad +x_3 \quad = 5$$

Přímé řešení systému rovnic pomocí determinantů

Cramerovo pravidlo:

Je-li A regulární matice řádu n a \mathbf{b} vektor pravých stran, pak řešení systému

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je určeno jednoznačně a platí $x_i = \frac{|B_i|}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$, kde matice B_i

vzniknou z A nahrazením i -tého sloupce vektorem \mathbf{b} .

Příklad : Cramerovým pravidlem vyřešte soustavu rovnic

$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_3 = 5$$

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$,

Přímé řešení systému rovnic pomocí determinantů

Cramerovo pravidlo:

Je-li A **regulární** matice řádu n a \mathbf{b} vektor pravých stran, pak řešení systému

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je určeno jednoznačně a platí $x_i = \frac{|B_i|}{|A|}, i = 1, \dots, n$, kde matice B_i

vzniknou z \mathbf{A} nahrazením i -tého sloupce vektorem \mathbf{b} .

Příklad : Cramerovým pravidlem vyřešte soustavu rovnic

$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_3 = 5$$

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, |\mathbf{A}| = 27,$

Přímé řešení systému rovnic pomocí determinantů

Cramerovo pravidlo:

Je-li A **regulární** matice řádu n a \mathbf{b} vektor pravých stran, pak řešení systému

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je určeno jednoznačně a platí $x_i = \frac{|\mathbf{B}_i|}{|\mathbf{A}|}$, $i = 1, \dots, n$, kde matice \mathbf{B}_i

vzniknou z \mathbf{A} nahrazením i -tého sloupce vektorem \mathbf{b} .

Příklad : Cramerovým pravidlem vyřešte soustavu rovnic

$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_3 = 5$$

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}| = 27$, $\mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

$$\mathbf{B}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Přímé řešení systému rovnic pomocí determinantů

Cramerovo pravidlo:

Je-li A **regulární** matice řádu n a \mathbf{b} vektor pravých stran, pak řešení systému

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je určeno jednoznačně a platí $x_i = \frac{|\mathbf{B}_i|}{|\mathbf{A}|}$, $i = 1, \dots, n$, kde matice \mathbf{B}_i

vzniknou z \mathbf{A} nahrazením i -tého sloupce vektorem \mathbf{b} .

Příklad : Cramerovým pravidlem vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -x_2 & = 4 \\ x_1 & +3x_2 & -5x_3 = 4 \\ & 2x_2 & +x_3 = 5 \end{array}$$

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}| = 27$, $\mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

$$\mathbf{B}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Tedy $x_1 = 81/27 = 3$, $x_2 = 54/27 = 2$, $x_3 = 27/27 = 1$,

Použití determinantů k určení inverzní matice

Aplikací Cramerova pravidla na řešení maticové rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}$ dostaneme předpis pro prvky matice \mathbf{B} inverzní k regulární matici A řádu n :

$b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{|A_{ji}|}{|A|}$, $i, j = 1, \dots, n$, kde A_{ji} je matice vytvořená z \mathbf{A} vypuštěním j -tého řádku a i -tého sloupce.

Použití determinantů k určení inverzní matice

Aplikací Cramerova pravidla na řešení maticové rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}$ dostaneme předpis pro prvky matice \mathbf{B} inverzní k regulární matici A řádu n :

$b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{|A_{ji}|}{|A|}$, $i, j = 1, \dots, n$, kde A_{ji} je matice vytvořená z \mathbf{A} vypuštěním j -tého řádku a i -tého sloupce.

Poznámka : Pro $n = 2$ dostáváme

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{|A_{11}|}{|A|} & -\frac{|A_{21}|}{|A|} \\ -\frac{|A_{12}|}{|A|} & \frac{|A_{22}|}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Použití determinantů k určení inverzní matice

Aplikací Cramerova pravidla na řešení maticové rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}$ dostaneme předpis pro prvky matice \mathbf{B} inverzní k regulární matici \mathbf{A} řádu n :

$b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{|A_{ji}|}{|A|}$, $i, j = 1, \dots, n$, kde A_{ji} je matice vytvořená z \mathbf{A} vypuštěním j -tého řádku a i -tého sloupce.

Poznámka : Pro $n = 2$ dostáváme

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{|A_{11}|}{|A|} & -\frac{|A_{21}|}{|A|} \\ -\frac{|A_{12}|}{|A|} & \frac{|A_{22}|}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Příklad : Určete inverzní matici k $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Proved'te zkoušku.

Použití determinantů k určení inverzní matice

Aplikací Cramerova pravidla na řešení maticové rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}$ dostaneme předpis pro prvky matice \mathbf{B} inverzní k regulární matici \mathbf{A} řádu n :

$b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{|A_{ji}|}{|A|}$, $i, j = 1, \dots, n$, kde A_{ji} je matice vytvořená z \mathbf{A} vypuštěním j -tého řádku a i -tého sloupce.

Poznámka : Pro $n = 2$ dostáváme

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{|A_{11}|}{|A|} & -\frac{|A_{21}|}{|A|} \\ -\frac{|A_{12}|}{|A|} & \frac{|A_{22}|}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Příklad : Určete inverzní matici k $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Proved'te zkoušku.

Řešení : $|A| = 1$, $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, ZK: $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Ekvivalentní systémy rovnic

Dva systémy lineárních rovnic $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d}$ nazveme **ekvivalentní**,
jestliže každé řešení systému $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je i řešením systému $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d}$ a
naopak.

Ekvivalentní systémy rovnic

Dva systémy lineárních rovnic $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d}$ nazveme **ekvivalentní**, jestliže každé řešení systému $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je i řešením systému $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d}$ a naopak.

Věta : Je-li $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ rozšířená matice systému $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a vznikne-li $(\mathbf{C}|\mathbf{d})$ z $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ pomocí elementárních transformací, pak je systém $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ekvivalentní s $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$, píšeme $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d} \sim \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Ekvivalentní systémy rovnic

Dva systémy lineárních rovnic $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d}$ nazveme **ekvivalentní**, jestliže každé řešení systému $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je i řešením systému $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d}$ a naopak.

Věta : Je-li $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ rozšířená matice systému $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a vznikne-li $(\mathbf{C}|\mathbf{d})$ z $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ pomocí elementárních transformací, pak je systém $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ekvivalentní s $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$, píšeme **$\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d} \sim \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$**

Pomocí vhodných elementárních transformací můžeme převést problém řešení soustavy $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ na řešení ekvivalentní soustavy $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d}$ s maticí \mathbf{C} ve speciálním tvaru.

Řešení systému s horní trojúhelníkovou maticí

Systém $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$, kde $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ řešíme metodou **zpětné**

substituce: z poslední rovnice vyjádříme $x_n = d_n / c_{nn}$. Dosadíme do předposlední rovnice a spočítáme x_{n-1} , atd...

Příklad : Vyřešte systém

$$\begin{array}{rcll} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 7 \\ & -x_2 & +4x_3 & = 5 \\ & & 2x_3 & = 6 \end{array}$$

Řešení systému s horní trojúhelníkovou maticí

Systém $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$, kde $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ řešíme metodou **zpětné**

substituce: z poslední rovnice vyjádříme $x_n = d_n/c_{nn}$. Dosadíme do předposlední rovnice a spočítáme x_{n-1} , atd...

Příklad : Vyřešte systém

$$\begin{array}{rcll} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 7 \\ & -x_2 & +4x_3 & = 5 \\ & & 2x_3 & = 6 \end{array}$$

Řešení: $x_3 = 6/2 = 3$,

Řešení systému s horní trojúhelníkovou maticí

Systém $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$, kde $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ řešíme metodou **zpětné**

substituce: z poslední rovnice vyjádříme $x_n = d_n/c_{nn}$. Dosadíme do předposlední rovnice a spočítáme x_{n-1} , atd...

Příklad : Vyřešte systém

$$\begin{array}{rcll} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 7 \\ & -x_2 & +4x_3 & = 5 \\ & & 2x_3 & = 6 \end{array}$$

Řešení: $x_3 = 6/2 = 3$,
 $x_2 = 4x_3 - 5 = 12 - 5 = 7$,

Řešení systému s horní trojúhelníkovou maticí

Systém $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d}$, kde $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ řešíme metodou **zpětné**

substituce: z poslední rovnice vyjádříme $x_n = d_n/c_{nn}$. Dosadíme do předposlední rovnice a spočítáme x_{n-1} , atd...

Příklad : Vyřešte systém

$$\begin{array}{rcll} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 7 \\ & -x_2 & +4x_3 & = 5 \\ & & 2x_3 & = 6 \end{array}$$

Řešení: $x_3 = 6/2 = 3$,

$x_2 = 4x_3 - 5 = 12 - 5 = 7$,

$x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 = 7 + 14 - 9 = 12$.

Eliminační metody řešení systémů s regulární maticí **A**

Gaussova eliminační metoda

Matici $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ převedeme elementárními úpravami na matici $(\mathbf{C}|\mathbf{d})$, kde \mathbf{C} je v horním trojúhelníkovém tvaru a dále postupujeme metodou zpětné substituce.

Eliminační metody řešení systémů s regulární maticí **A**

Gaussova eliminační metoda

Matici (**A|b**) převedeme elementárními úpravami na matici (**C|d**), kde **C** je v horním trojúhelníkovém tvaru a dále postupujeme metodou zpětné substituce.

Jordanova eliminační metoda

Matici (**A|b**) převedeme elementárními úpravami na matici (**C|d**), kde **C** je v diagonálním tvaru, tedy dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rcl} c_{11}x_1 & & =d_1 \\ & c_{22}x_2 & =d_2 \\ & \ddots & \\ & & c_{nn}x_n =d_n \end{array}$$

Přímo určíme $x_1 = d_1/c_{11}$, $x_2 = d_2/c_{22}$, \dots $x_n = d_n/c_{nn}$.

Eliminační metody řešení systémů s regulární maticí **A**

Gaussova eliminační metoda

Matici $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ převedeme elementárními úpravami na matici $(\mathbf{C}|\mathbf{d})$, kde \mathbf{C} je v horním trojúhelníkovém tvaru a dále postupujeme metodou zpětné substituce.

Jordanova eliminační metoda

Matici $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ převedeme elementárními úpravami na matici $(\mathbf{C}|\mathbf{d})$, kde \mathbf{C} je v diagonálním tvaru, tedy dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rcl} c_{11}x_1 & & =d_1 \\ & c_{22}x_2 & =d_2 \\ & \ddots & \\ & & c_{nn}x_n =d_n \end{array}$$

Přímo určíme $x_1 = d_1/c_{11}$, $x_2 = d_2/c_{22}$, \dots $x_n = d_n/c_{nn}$.

Jordanova metoda pro řešení maticových rovnic

Maticovou rovnicí rozumíme m systémů se stejnou maticí soustavy \mathbf{A} řádu n a pravými stranami ${}^1\mathbf{b}, \dots, {}^m\mathbf{b}$ zapsaných jako $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde \mathbf{B} je matice tvořená sloupci ${}^1\mathbf{b}, \dots, {}^m\mathbf{b}$ a \mathbf{X} je neznámá matice typu (n, m) . Pro matici, která je řešením maticové rovnice pak platí, že její sloupce jsou řešením jednotlivých m systémů. Při řešení maticové rovnice Jordanovou metodou upravujeme rozšířenou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ elementárními úpravami na $(\mathbf{E}|\mathbf{D})$. Potom pro neznámou matici \mathbf{X} platí $\mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{D}$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{D}$.

Jordanova metoda pro řešení maticových rovnic

Maticovými rovnicí rozumíme m systémů se stejnou maticí soustavy \mathbf{A} řádu n a pravými stranami ${}^1\mathbf{b}, \dots, {}^m\mathbf{b}$ zapsaných jako $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde \mathbf{B} je matice tvořená sloupci ${}^1\mathbf{b}, \dots, {}^m\mathbf{b}$ a \mathbf{X} je neznámá matice typu (n, m) . Pro matici, která je řešením maticové rovnice pak platí, že její sloupce jsou řešením jednotlivých m systémů. Při řešení maticové rovnice Jordanovou metodou upravujeme rozšířenou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ elementárními úpravami na $(\mathbf{E}|\mathbf{D})$. Potom pro neznámou matici \mathbf{X} platí $\mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{D}$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{D}$.

Jordanova metoda pro určení inverzní matice

Úloha hledání inverzní matice k \mathbf{A} je úlohou řešení maticové rovnice $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E}$. Neznámou matici $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ určíme Jordanovou metodou tak, že upravujeme rozšířenou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ elementárními úpravami na $(\mathbf{E}|\mathbf{D})$. Potom platí $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{D}$.

Jordanova metoda pro určení inverzní matice

Příklad : Určete inverzní matici k $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Jordanova metoda pro určení inverzní matice

Příklad : Určete inverzní matici k $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Jordanova metoda pro určení inverzní matice

Příklad : Určete inverzní matici k $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 & -4 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

Jordanova metoda pro určení inverzní matice

Příklad : Určete inverzní matici k $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 & -4 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 & -4 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & | & -60 & 25 & -90 \\ 0 & -15 & 22 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 & -4 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & | & -60 & 25 & -90 \\ 0 & -15 & 0 & | & -225 & 90 & 330 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 & -4 & 15 \end{pmatrix},$$

Jordanova metoda pro určení inverzní matice

Příklad : Určete inverzní matici k $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 & -4 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & | & -60 & 25 & -90 \\ 0 & -15 & 22 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 & -4 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & | & -60 & 25 & -90 \\ 0 & -15 & 0 & | & -225 & 90 & 330 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 & -4 & 15 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 5 & -18 \\ 15 & -6 & -22 \\ 10 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

Řešení systému s maticí soustavy hodnosti $h(\mathbf{A}) < n$

Je-li matice \mathbf{A} typu (m, n) a přitom $h = h(\mathbf{A}) < n$, upravíme rozšířenou matici na schodovitý tvar a dostaneme ekvivalentní systém pouhých h rovnic pro n neznámých. Je možné vhodně vybrat $n - h$ neznámých, které považujeme za **parametry** a převést je na pravou stranu, tak aby koeficienty neznámých zbylých na levé straně tvořily horní trojúhelníkovou matici. Úlohu pak dořešíme metodou zpětné substituce.

Řešení systému s maticí soustavy hodnosti $h(\mathbf{A}) < n$

Je-li matice \mathbf{A} typu (m, n) a přitom $h = h(\mathbf{A}) < n$, upravíme rozšířenou matici na schodovitý tvar a dostaneme ekvivalentní systém pouhých h rovnic pro n neznámých. Je možné vhodně vybrat $n - h$ neznámých, které považujeme za **parametry** a převést je na pravou stranu, tak aby koeficienty neznámých zbylých na levé straně tvořily horní trojúhelníkovou matici. Úlohu pak dořešíme metodou zpětné substituce.

Příklad : Najděte **všechna** řešení systému

$$\begin{array}{rcccccc} 3x_1 & +5x_2 & +x_3 & +x_4 & -2x_5 & = 0 \\ & 3x_2 & +6x_3 & +4x_4 & -x_5 & = 0 \\ & & & -2x_4 & +2x_5 & = 0 \end{array}$$

Řešení systému s maticí soustavy hodnosti $h(\mathbf{A}) < n$

Je-li matice \mathbf{A} typu (m, n) a přitom $h = h(\mathbf{A}) < n$, upravíme rozšířenou matici na schodovitý tvar a dostaneme ekvivalentní systém pouhých h rovnic pro n neznámých. Je možné vhodně vybrat $n - h$ neznámých, které považujeme za **parametry** a převést je na pravou stranu, tak aby koeficienty neznámých zbylých na levé straně tvořily horní trojúhelníkovou matici. Úlohu pak dořešíme metodou zpětné substituce.

Příklad : Najděte **všechna** řešení systému

$$\begin{array}{rcccccc} 3x_1 & +5x_2 & +x_3 & +x_4 & -2x_5 & = 0 \\ & 3x_2 & +6x_3 & +4x_4 & -x_5 & = 0 \\ & & & -2x_4 & +2x_5 & = 0 \end{array}$$

Matice systému již je ve schodovitém tvaru, platí $h(\mathbf{A}) = 3 < 5 = n$, při hledání řešení můžeme tedy $n - h = 2$ neznámé zvolit jako parametry a zbylé tři dopočítat. Chceme, aby na levé straně zůstaly neznámé s koeficienty tvořícími horní trojúhelníkovou matici, ponechme zde tedy neznámé odpovídající "začátkům schodů", tedy x_1, x_2 a x_4 . Ostatní, tedy x_3 a x_5 , převedeme napravo a položíme $x_3 = p, x_5 = q, p, q, \in \mathbb{R}$.

Řešení systému s maticí soustavy hodnosti $h(\mathbf{A}) < n$

Dostaneme systém

$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 & +5x_2 & + x_4 & = & -p & + 2q \\ & 3x_2 & +4x_4 & = & -6p & + q \\ & & -2x_4 & = & & -2q \end{array}$$

Řešení systému s maticí soustavy hodnosti $h(\mathbf{A}) < n$

Dostaneme systém

$$\begin{array}{rcllcl} 3x_1 & +5x_2 & + x_4 & = & -p & + 2q \\ & 3x_2 & +4x_4 & = & -6p & + q \\ & & -2x_4 & = & & -2q \end{array}$$

Z poslední rovnice tedy $x_4 = q$, dosadíme do druhé rovnice a obdržíme $3x_2 + 4q = -6p + q$, tedy $x_2 = -2p - q$. Nakonec dosadíme za x_2 a x_4 do první rovnice, $3x_1 + 5(-2p - q) + q = -p + 2q$, po úpravě $x_1 = 3p + 2q$.

Řešení systému s maticí soustavy hodnosti $h(\mathbf{A}) < n$

Dostaneme systém

$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 & +5x_2 & + x_4 & = & -p & + 2q \\ & 3x_2 & +4x_4 & = & -6p & + q \\ & & -2x_4 & = & & -2q \end{array}$$

Z poslední rovnice tedy $x_4 = q$, dosadíme do druhé rovnice a obdržíme $3x_2 + 4q = -6p + q$, tedy $x_2 = -2p - q$. Nakonec dosadíme za x_2 a x_4 do první rovnice, $3x_1 + 5(-2p - q) + q = -p + 2q$, po úpravě $x_1 = 3p + 2q$.

Závěr: Množina všech řešení, tzv. **obecné řešení**, závisí na dvou parametrech. Dosadíme-li za p, q libovolná čísla, dostaneme nějaké tzv. **partikulární řešení** systému, například pro $p = 1, q = 1$ dostaneme řešení $\mathbf{x} = (5, -3, 1, 1, 1)^T$. Naopak také platí: každé konkrétní řešení lze zapsat ve tvaru $\mathbf{x} = (3p + 2q, -2p - q, p, q, q)^T$ pro nějaké p, q .

Poznámka : Systémy s nulovou pravou stranou nazýváme **homogenní systémy**.

Řešitelnost systému rovnic

Frobeniova věta!!!

Bud' $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ systém m rovnic o n neznámých. Potom jestliže:

Řešitelnost systému rovnic

Frobeniova věta!!!

Bud' $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ systém m rovnic o n neznámých. Potom jestliže:

- $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, pak systém nemá řešení

Řešitelnost systému rovnic

Frobeniova věta!!!

Bud' $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ systém m rovnic o n neznámých. Potom jestliže:

- $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, pak systém nemá řešení
- $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, pak systém má právě jedno řešení

Řešitelnost systému rovnic

Frobeniova věta!!!

Bud' $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ systém m rovnic o n neznámých. Potom jestliže:

- $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, pak systém nemá řešení
- $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, pak systém má právě jedno řešení
- $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = h < n$, pak systém má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

Řešitelnost systému rovnic

Frobeniova věta!!!

Bud' $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ systém m rovnic o n neznámých. Potom jestliže:

- $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, pak systém nemá řešení
- $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, pak systém má právě jedno řešení
- $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = h < n$, pak systém má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

Poznámka : Pokud systém obsahuje rovnici

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = c, c \neq 0$, pak zřejmě nemá řešení (tedy rozšířená matice obsahuje řádek $(0 \ 0 \ \dots \ 0|c)$, proto $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.) V těchto případech existují metody přibližného řešení systému, často se používá např. **metoda nejmenších čtverců**.