Lineární algebra - základní definice

Vektor, matice

Uspořádanou n-tici reálných čísel $a_1, \ldots, a_n$ nazveme vektorem, píšeme

$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, potom **a** nazveme řádkovým vektorem nebo

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$ potom **a** nazveme sloupcovým vektorem.

Uspořádanou $m \cdot n$-tici reálných čísel zapsaných do obdélníkového schématu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ nazveme maticí typu (m, n).

Chceme-li zdůraznit typ matice, píšeme $\mathbf{A}_{(m,n)}$.

Operace s maticemi

Příklad : Vyrábí-li firma ve dvou závodech Z_1, Z_2 tři různé výrobky V_1, V_2, V_3, můžeme množství těchto výrobků v jednotlivých závodech zapsat do matice **A** typu $(2, 3)$. Píšeme $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde a_{ij} je množství j-tého výrobku vyráběné v i- tém závodě, například

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matice můžeme násobit reálným číslem.

Příklad : Vyjadřuje - li matice **A** z předchozího příkladu denní produkci, pak matice

$$\mathbf{B} = 5 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$ vyjadřuje pětidenní produkci.

Matice stejných typů můžeme sčítat.

Příklad : Matice

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 18 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$ vyjadřuje šestidenní produkci.

Operace s maticemi

Transponovaná matice

Zaměníme-li v matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ úlohu řádků a sloupců, dostaneme matici k ní transponovanou, píšeme $\mathbf{A}^\top = (a_{ji})$

Příklad : Pro matici **B** z předchozího příkladu platí

$$\mathbf{B}^\top = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 0 \\ 6 & 30 \end{pmatrix}$$

Matice "navazujících typů" můžeme násobit

Příklad : Předpokládejme, že naše firma má tři odběratele O_1, O_2, O_3. Uvažujme matici $\mathbf{C} = (c_{ij}),\ i, j = 1, 2, 3$, která vyjadřuje cenu zaplacenou j-tým odběratelem za i-tý výrobek, například

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Určeme matici $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Jde o matici typu $(2, 3)$, kde prvek d_{ij} vyjadřuje částku, kterou by zaplatil j-tý odběratel O_j za denní produkci i-tého závodu Z_i.

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 14 \\ 31 & 33 & 26 \end{pmatrix}$$

Pozor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \neq \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$ Matice $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$ neexistuje.

Relace mezi maticemi

Matice stejných typů můžeme porovnávat. Mezi maticemi **A**, **B** existuje některá z relací $=, >, <, \geq, \leq$ právě tehdy, platí-li stejný vztah pro všechny dvojice prvků matic na odpovídajících pozicích a_{ij}, b_{ij}.

Příklad : Rozhodněte, zda jsou v nějaké z relací matice **A**, **B** z předchozích příkladů.

Řešení: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix}$

Systémy lineárních rovnic

Systémem m lineárních algebraických rovnic o n neznámých z reálného oboru $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme zápis

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ldots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ldots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \ldots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Maticovým zápisem soustavy rovnic rozumíme vztah

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ nazýváme maticí soustavy,

Systémy lineárních rovnic

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$, je vektor neznámých

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$, je vektor pravých stran.

Matici $$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ nazýváme rozšířenou maticí soustavy.

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Je dána soustava dvou rovnic o 3 neznámých

$$\begin{array}{cccc} x_1 + & 2x_2 & -3x_3 & = 5 \\ 2x_1 + & 4x_2 + & x_3 & = 3 \end{array}$$

Určete matici, rozšířenou matici soustavy a vektor pravých stran.

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Definice : Vektor $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ nazveme řešením soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$,

jestliže platí $\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}}$.

Řešení systému lineárních rovnic

Příklad : Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ řešením soustavy z předchozího příkladu.

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Oba vektory jsou řešením soustavy.

Speciální tvary matic

Libovolnou matici typu (n, n) nazveme čtvercovou maticí řádu n.

Pokud má čtvercová matice nenulové prvky jen na hlavní diagonále, nazveme ji diagonální maticí.

$$\textbf{Příklad : } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Pokud má nenulové prvky jen na a nad hlavní diagonálou, nazveme ji maticí v horním trojúhelníkovém tvaru.

$$\textbf{Příklad : } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Speciální tvary matic

Libovolnou matici typu (m, n) nazveme maticí v horním schodovitém tvaru, jestliže

- Všechny případné nulové řádky jsou dole
- Každý nenulový řádek "začíná více nulami než předchozí".

Příklad : Rozhodněte, které z matic jsou v horním schodovitém tvaru. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Speciální matice

Matici $\mathbf{O} = (o_{ij})$, kde $o_{ij} = 0,\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$, nazveme nulovou maticí typu (m, n). Chceme-li zdůraznit typ matice, píšeme $\mathbf{O}_{(m,n)}$.

Pro libovolnou matici $\mathbf{A}_{(m,n)}$ platí $\boxed{\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}}$.

Diagonální matici $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ nazveme jednotkovou maticí. Chceme-li zdůraznit řád matice, píšeme $\mathbf{E}_n$.

Pro libovolné matice $\mathbf{B}_{(m,n)}$, $\mathbf{C}_{(n,k)}$ platí $\boxed{\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B},\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}.}$

Vektorový prostor

Označme $M^{m,n}$ množinu všech matic typu (m, n). Množinu $M^{m,n}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem označme $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$. V případě, že m nebo n je rovno 1 a není-li nutné specifikovat, zda pracujeme se sloupcovými či řádkovými vektory, používáme pro množinu $M^{m,n}$ označení $\mathbb{R}^n$. (je to množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel). Prostor $\mathbb{V}_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nazýváme aritmetický vektorový prostor.

Věta : Pro libovolná čísla α, β a libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_n$ platí:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- existuje $-\mathbf{a}$: $-\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $1.\mathbf{a} = \mathbf{a}$
- $\alpha.\beta.\mathbf{a} = (\alpha.\beta).\mathbf{a}$
- $(\alpha + \beta).\mathbf{a} = \alpha.\mathbf{a} + \beta.\mathbf{a}$
- $\alpha.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha.\mathbf{a} + \alpha.\mathbf{b}$

Vektorový prostor

Vektorovým (nebo též lineárním) prostorem nazveme strukturu $(P, "+", "\cdot")$ pro libovolnou množinu P, pokud na této množině zavedeme operace sčítání a násobení číslem tak, aby pro ně bylo splněno všech osm vlastností z předchozí věty.

Příklad : Prostor všech matic daného typu $\mathbb{M}^{m,n} = (M^{m,n}, +, \cdot)$ je také lineárním prostorem.

Lineární kombinace

Jsou-li ${}^1\mathbf{x},\ {}^2\mathbf{x},\dots,{}^m\mathbf{x}$ vektory z $\mathbb{V}_n$ a $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, pak vektor $\mathbf{x} = c_1.{}^1\mathbf{x} + \ c_2.{}^2\mathbf{x} + \dots + c_m.{}^m\mathbf{x}$ nazveme lineární kombinací vektorů ${}^1\mathbf{x},\ {}^2\mathbf{x},\dots,{}^m\mathbf{x}$.

Příklad : Je vektor $\mathbf{x} = (4, -1, 10, 12)$ lineární kombinací vektorů ${}^1\mathbf{x} = (1, 0, 5, 7)$ a ${}^2\mathbf{x} = (2, -1, 0, -2)$?

Řešení: Koeficienty $c_1,\ c_2$ lineární kombinace musí vyhovovat soustavě rovnic

$$
\begin{array}{llr}
1.c_1 & + 2.c_2 & =4 \\
0.c_1 & - 1.c_2 & =-1 \\
5.c_1 & + 0.c_2 & =10 \\
7.c_1 & - 2.c_2 & =12
\end{array}
$$

Zřejmě jsou $c_1 = 2,\ c_2 = 1$ řešením této soustavy. Tedy $\mathbf{x} = 2.{}^1\mathbf{x} + \ {}^2\mathbf{x}$

Lineární závislost

Řekneme, že vektory ${}^1\mathbf{x},\ {}^2\mathbf{x},\dots,{}^m\mathbf{x}$ jsou lineárně závislé, jestliže je mezi nimi aspoň jeden vektor, který je kombinací ostatních. Pokud žádný takový vektor neexistuje, řekneme, že vektory ${}^1\mathbf{x},\ {}^2\mathbf{x},\dots,{}^m\mathbf{x}$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad :
Vektory $\mathbf{x},\ {}^1\mathbf{x},{}^2\mathbf{x}$ z předchozího příkladu jsou ... lineárně závislé.
Vektory ${}^1\mathbf{x},{}^2\mathbf{x}$ jsou ... lineárně nezávislé.

Poznámka : Vektory ${}^1\mathbf{x},\ {}^2\mathbf{x},\dots,{}^m\mathbf{x}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když vektorová rovnice $c_1.{}^1\mathbf{x}+\ c_2.{}^2\mathbf{x}+\dots+c_m.{}^m\mathbf{x}=\mathbf{0}$ má jediné řešení $c_1=0,c_2=0,\dots,c_m=0$.
Vektory jsou lineárně závislé, existuje-li i jiné než nulové řešení.

Báze lineárního prostoru

Je-li $\mathbb{P}$ vektorový prostor a jsou-li ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \ldots, {}^n\mathbf{e}$ takové vektory z tohoto prostoru, že

- jsou lineárně nezávislé
- každý vektor z $\mathbb{P}$ lze vyjádřit jako jejich kombinaci,

pak ${}^1\mathbf{e}, {}^2\mathbf{e}, \ldots, {}^n\mathbf{e}$ nazveme bází prostoru $\mathbb{P}$.

Příklad : Uvažujme prostor $\mathbb{V}_3$ a v něm vektory $\mathbf{a} = (1, 0, 3), \mathbf{b} = (0, 1, 2), \mathbf{c} = (1, 0, 0)$ a $\mathbf{d} = (0, 0, 0)$.

- tvoří $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ bázi prostoru $\mathbb{V}$? ... NE!
- tvoří $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ bázi prostoru $\mathbb{V}$? ... NE!
- tvoří $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ bázi prostoru $\mathbb{V}$? ... ANO!

Dimenze lineárního prostoru

V prostoru $\mathbb{V}_n$ existuje vždy báze, například takzvaná kanonická báze:

$$
\begin{aligned}
{}^1\mathbf{e} &= (1, 0, \dots, 0) \\
{}^2\mathbf{e} &= (0, 1, \dots, 0) \\
&\vdots \\
{}^n\mathbf{e} &= (0, 0, \dots, 1)
\end{aligned}
$$

Skutečně, nezávislost je zřejmá. Navíc pro libovolný vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{V}_n$ platí $\mathbf{a} = a_1.{}^1\mathbf{e} + a_2.{}^2\mathbf{e} + \dots + a_n.{}^n\mathbf{e}$

Poznámka : Každá skupina n lineárně nezávislých vektorů z $\mathbb{V}_n$ tvoří bázi. V jakékoliv skupině vektorů z $\mathbb{V}_n$ je nejvýše n lineárně nezávislých. Číslo n nazýváme dimenze prostoru $\mathbb{V}_n$.

Hodnost

Je-li $\mathbf{X} = {}^1\mathbf{x},\ {}^2\mathbf{x}, \ldots, {}^m\mathbf{x}$ skupina vektorů z prostoru $\mathbb{P}$, pak maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve skupině $\mathbf{X}$ nazveme hodností $\mathbf{X}$ a značíme $h(\mathbf{X})$.

Poznámka : Uvažujme matici $\mathbf{A}$ typu (m, n). Položíme- li za $\mathbf{X}$ řádky matice $\mathbf{A}$, pak $h(\mathbf{X})$ nazveme řádkovou hodností $\mathbf{A}$, pro sloupce matice mluvíme o sloupcové hodnosti.

Příklad : Určete řádkovou a sloupcovou hodnost matice
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Řešení: Řádky jsou zřejmě lineárně nezávislé (ani jeden není násobkem druhého), takže řádková hodnost je 2. Sloupcová hodnost je také 2, protože poslední dva sloupce jsou evidentně lineárně nezávislé a ostatní jsou jejich lineární kombinací.

Hodnost

Je-li **A** matice typu (m, n), pak její sloupcová hodnost je rovna řádkové hodnosti, značíme ji $h(\mathbf{A})$.

Důsledek : $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^\top)$

Důsledek : $h(\mathbf{A}) \leq min(m, n)$

Příklad : Určete hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Řešení: První tři řádky jsou evidentně lineárně nezávislé, takže hodnost je 3.

Věta : Horní schodovitá matice má hodnost rovnu počtu jejích nenulových řádků.

Elementární úpravy

Uvažujme matici **A** typu (m, n). Vytvoříme-li z matice **A** matici **B** tak, že

- Vyměníme navzájem dva libovolné řádky matice a zbytek necháme beze změny nebo
- jeden řádek vynásobíme libovolným nenulovým číslem a ostatní řádky necháme beze změny nebo
- k jednomu z řádků matice přičteme libovolný násobek jiného řádku a ostatní necháme beze změny,

pak řekneme, že **B** vznikla z **A** pomocí základních elementárních transformací. Aplikujeme-li několik těchto základních úprav po sobě, řekneme, že **B** vznikla z **A** pomocí elementárních transformací a píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Poznámka : Elementární transformace mají široké využití, například při určování hodnosti matice, řešení systémů rovnic, hledání inverzní matice či výpočtu determinantu.

Elementární úpravy

Příklad : Pomocí elementárních transformací převeďte matici na schodovitý tvar. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení: Nejprve vyměníme první a třetí řádek

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pomocí prvního řádku vynulujeme první číslo na ostatních řádcích:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \\ 0 & -3 & -14 & -35 \end{pmatrix}$$

Nyní stačí přičíst $1,5$-násobek druhého řádku ke třetímu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \\ 0 & -3 & -14 & -35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \\ 0 & 0 & 4 & 8{,}5 \end{pmatrix}.$$

Elementární úpravy a hodnost matice

Věta : Elementární transformace nemění hodnost matice.

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ z předchozího příkladu platí $h(\mathbf{A}) = 3$.

Při řešení úlohy určení hodnosti vždy nejprve převedeme matici pomocí elementárních úprav do schodovitého tvaru a potom určíme hodnost jako počet nenulových řádků.

Determinant matice

Buď **A** čtvercová matice řádu n. Determinant matice **A** je číslo značené $|\mathbf{A}|$ definované jako

- a_{11} pro $n = 1$
- $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$ pro $n = 2$
- $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{32}.a_{13} -$
  $-(a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{11}.a_{32}.a_{23} + a_{21}.a_{12}.a_{33})$
  pro $n = 3$ . . . součiny ve směru diagonál: tzv. Sarrusovo pravidlo
- pro $n \geq 4$ neexistuje obdoba Sarrusova pravidla, determinant definujeme pomocí rozvoje podle prvního řádku jako

$$a_{11}.|\mathbf{A}_{11}| - a_{12}.|\mathbf{A}_{12}| + a_{13}.|\mathbf{A}_{13}| - a_{14}.|\mathbf{A}_{14}|(+\ldots),$$

kde $\mathbf{A}_{ij}$ je submatice, která vznikne z **A** vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Determinant matice

Poznámka : Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.

Věta : Pro každou čtvercovou matici **A** platí: $\boxed{|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^\top|}$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců)

Příklad : Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 3.7 = -11$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.5.1 + 0.4.0 + 3.2.2 - 0.5.2 - 1.2.4 - 3.0.1 = 9$$

Výpočet determinantu rozvojem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+(-3). \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} - 0. \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -70$$

Věta : Determinant matice v horním trojúhelníkovém tvaru je roven součinu jejích diagonálních členů.

Příklad : $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7.1.5 = 35$

Poznámka : Při výpočtu deteminantu lze pomocí elementárních úprav převést matici na schodovitý tvar.

Pozor, některé transformace mění hodnotu determinantu!

Výpočet determinantu pomocí elementárních úprav

Jestliže matice **B** vznikne z matice **A** pomocí základní elementární transformace

- výměna řádků, pak $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$
- vynásobení jednoho řádku číslem α, pak $|\mathbf{B}| = \alpha.|\mathbf{A}|$
- přičtením jednoho řádku k jinému, pak $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$

Příklad : Určete hodnotu determinantu matice z předchozího příkladu pomocí elementárních úprav.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 0 & 35 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}5 \end{vmatrix} = -70$$

Inverzní matice

Čtvercovou matici **A**, pro kterou platí $|\mathbf{A}| \neq 0$, nazveme regulární.
V opačném případě, tedy má-li nulový determinant, ji nazveme singulární.

Věta : Jestliže je **A** regulární matice, pak existuje matice **B**, pro niž platí $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{B}.\mathbf{A} = \mathbf{E}$. O matici **B** říkáme, že je inverzní k matici **A**.

Matice **B** je určena jednoznačně, značíme ji $\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad : Ověřte, zda je matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ inverzní k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\mathbf{B}.\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přímé řešení systému rovnic pomocí inverzní matice

Je-li $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ systém rovnic s regulární maticí soustavy $\mathbf{A}$, pak má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{b}$.

Příklad : Najděte řešení systému pomocí inverzní matice.

$$\begin{array}{rrl} 2x_1 & -x_2 & = 2 \\ -5x_1 & +3x_2 & =-3 \end{array}$$

Řešení: Matice soustavy je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Z předchozího příkladu víme, že $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,

takže $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

ZK: $L_1 = 2 \cdot 3 - 4 = 2 = P_1$, $L_2 = -5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = -3 = P_2$

Přímé řešení systému rovnic pomocí determinantů

Cramerovo pravidlo:

Je-li A regulární matice řádu n a $\mathbf{b}$ vektor pravých stran, pak řešení systému $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je určeno jednoznačně a platí

$x_i = \frac{|\mathbf{B}_i|}{|\mathbf{A}|}, i = 1, \ldots, n,$ kde matice $\mathbf{B}_i$ vzniknou z $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce vektorem $\mathbf{b}$.

Příklad : Cramerovým pravidlem vyřešte soustavu rovnic

$$
\begin{array}{cccc}
2x_1 & -x_2 & & = 4 \\
x_1 & +3x_2 & -5\,x_3 & =4 \\
 & 2x_2 & +x_3 & =5
\end{array}
$$

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}| = 27$,

$\mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, $\mathbf{B}_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Tedy $x_1 = 81/27 = 3,\ x_2 = 54/27 = 2,\ x_3 = 27/27 = 1,$

Použití determinantů k určení inverzní matice

Aplikací Cramerova pravidla na řešení maticové rovnice $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{E}$ dostaneme předpis pro prvky matice $\mathbf{B}$ inverzní k regulární matici A řádu n: $b_{ij} = (-1)^{i+j}.\frac{|\mathbf{A_{ji}}|}{|\mathbf{A}|}, i, j = 1, \ldots, n,$ kde A_{ji} je matice vytvořená z $\mathbf{A}$ vypuštěním j-tého řádku a i-tého sloupce.

Poznámka : Pro $n = 2$ dostáváme

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{|A_{11}|}{|A|} & -\frac{|A_{21}|}{|A|} \\ -\frac{|A_{12}|}{|A|} & \frac{|A_{22}|}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} . \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Příklad : Určete inverzní matici k $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Proveďte zkoušku.

Řešení : $|\mathbf{A}| = 1,\ \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, ZK: $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Ekvivalentní systémy rovnic

Dva systémy lineárních rovnic $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{C}.\mathbf{x} = \mathbf{d}$ nazveme ekvivalentní, jestliže každé řešení systému $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je i řešením systému $\mathbf{C}.\mathbf{x} = \mathbf{d}$ a naopak.

Věta : Je-li $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ rozšířená matice systému $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a vznikne-li $(\mathbf{C}|\mathbf{d})$ z $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ pomocí elementárních transformací, pak je systém $\mathbf{C}.\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ekvivalentní s $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$, píšeme $\mathbf{C}.\mathbf{x} = \mathbf{d} \sim \mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Pomocí vhodných elementárních transformací můžeme převést problém řešení soustavy $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ na řešení ekvivalentní soustavy $\mathbf{C}.\mathbf{x} = \mathbf{d}$ s maticí $\mathbf{C}$ ve speciálním tvaru.

Řešení systému s horní trojúhelníkovou maticí

Systém $\mathbf{C}.\mathbf{x} = \mathbf{d}$, kde $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ řešíme metodou zpětné substituce: z poslední rovnice vyjádříme $x_n = d_n / c_{nn}$. Dosadíme do předposlední rovnice a spočítáme x_{n-1}, atd...

Příklad : Vyřešte systém

x_1	$-2x_2$	$+3x_3$	$= 7$
	$-x_2$	$+4x_3$	$= 5$
		$2x_3$	$= 6$

Řešení: $x_3 = 6/2 = 3$,
$x_2 = 4x_3 - 5 = 12 - 5 = 7$,
$x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 = 7 + 14 - 9 = 12$.

Eliminační metody řešení systémů s regulární maticí **A**

Gaussova eliminační metoda

Matici ($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) převedeme elementárními úpravami na matici ($\mathbf{C}|\mathbf{d}$), kde **C** je v horním trojúhelníkovém tvaru a dále postupujeme metodou zpětné substituce.

Jordanova eliminační metoda

Matici ($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) převedeme elementárními úpravami na matici ($\mathbf{C}|\mathbf{d}$), kde **C** je v diagonálním tvaru, tedy dostaneme soustavu

$$
\begin{array}{llll}
c_{11}x_1 & & & = \mathrm{d}_1 \\
& c_{22}x_2 & & = \mathrm{d}_2 \\
& & \ddots & \\
& & c_{nn}x_n & = \mathrm{d}_n
\end{array}
$$

Přímo určíme $x_1 = d_1/c_{11},\ x_2 = d_2/c_{22}, \ldots x_n = d_n/c_{nn}$.

Jordanova metoda pro řešení maticových rovnic

Maticovou rovnicí rozumíme m systémů se stejnou maticí soustavy $\mathbf{A}$ řádu n a pravými stranami ${}^1\mathbf{b}, \ldots, {}^m\mathbf{b}$ zapsaných jako $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{B}$ je matice tvořená sloupci ${}^1\mathbf{b}, \ldots, {}^m\mathbf{b}$ a $\mathbf{X}$ je neznámá matice typu (n, m). Pro matici, která je řešením maticové rovnice pak platí, že její sloupce jsou řešením jednotlivých m systémů. Při řešení maticové rovnice Jordanovou metodou upravujeme rozšířenou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ elementárními úpravami na $(\mathbf{E}|\mathbf{D})$. Potom pro neznámou matici $\mathbf{X}$ platí $\mathbf{E}.\mathbf{X} = \mathbf{D}$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{D}$.

Jordanova metoda pro určení inverzní matice

Úloha hledání inverzní matice k $\mathbf{A}$ je úlohou řešení maticové rovnice $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{E}$. Neznámou matici $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ určíme Jordanovou metodou tak, že upravujeme rozšířenou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ elementárními úpravami na $(\mathbf{E}|\mathbf{D})$. Potom platí $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{D}$.

Jordanova metoda pro určení inverzní matice

Příklad : Určete inverzní matici k $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & 15 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -60 & 25 & -90 \\ 0 & -15 & 22 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -60 & 25 & -90 \\ 0 & -15 & 0 & -225 & 90 & 330 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & 15 \end{array}\right), \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 5 & -18 \\ 15 & -6 & -22 \\ 10 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

Řešení systému s maticí soustavy hodnosti $h(\mathbf{A}) < n$

Je-li matice **A** typu (m, n) a přitom $h = h(\mathbf{A}) < n$, upravíme rozšířenou matici na schodovitý tvar a dostaneme ekvivalentní systém pouhých h rovnic pro n neznámých. Je možné vhodně vybrat $n - h$ neznámých, které považujeme za parametry a převést je na pravou stranu, tak aby koeficienty neznámých zbylých na levé straně tvořily horní trojúhelníkovou matici. Úlohu pak dořešíme metodou zpětné substituce.

Příklad : Najděte všechna řešení systému

$$\begin{array}{rrrrrl}
3x_1 & +5x_2 & +x_3 & +x_4 & -2x_5 & = 0 \\
 & 3x_2 & +6x_3 & +4x_4 & -x_5 & = 0 \\
 & & & -2x_4 & +2x_5 & = 0
\end{array}$$

Matice systému již je ve schodovitém tvaru, platí $h(\mathbf{A}) = 3 < 5 = n$, při hledání řešení můžeme tedy $n - h = 2$ neznámé zvolit jako parametry a zbylé tři dopočítat. Chceme, aby na levé straně zůstaly neznámé s koeficienty tvořícími horní trojúhelníkovou matici, ponechme zde tedy neznámé odpovídající "začátkům schodů", tedy x_1, x_2 a x_4. Ostatní, tedy x_3 a x_5, převedeme napravo a položíme $x_3 = p$, $x_5 = q$, $p, q, \in \mathbb{R}$.

Řešení systému s maticí soustavy hodnosti $h(\mathbf{A}) < n$

Dostaneme systém

$$\begin{array}{cccccc} 3x_1 & +5x_2 & +x_4 & = & -p & +2q \\ & 3x_2 & +4x_4 & = & -6p & +q \\ & & -2x_4 & = & & -2q \end{array}$$

Z poslední rovnice tedy $x_4 = q$, dosadíme do druhé rovnice a obdržíme $3x_2 + 4q = -6p + q$, tedy $x_2 = -2p - q$. Nakonec dosadíme za x_2 a x_4 do první rovnice,
$3x_1 + 5(-2p - q) + q = -p + 2q$, po úpravě $x_1 = 3p + 2q$.
Závěr: Množina všech řešení, tzv. obecné řešení, závisí na dvou parametrech. Dosadíme- li za p, q libovolná čísla, dostaneme nějaké tzv. partikulární řešení systému, například pro $p = 1, q = 1$ dostaneme řešení $\mathbf{x} = (5, -3, 1, 1, 1)^\top$. Naopak také platí: každé konkrétní řešení lze zapsat ve tvaru $\mathbf{x} = (3p + 2q, -2p - q, p, q, q)^\top$ pro nějaké p, q.
Poznámka : Systémy s nulovou pravou stranou nazýváme homogenní systémy.

Řešitelnost systému rovnic

Frobeniova věta!!!

Buď $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ systém m rovnic o n neznámých. Potom jestliže:

- $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, pak systém nemá řešení
- $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, pak systém má právě jedno řešení
- $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = h < n$, pak systém má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

Poznámka : Pokud systém obsahuje rovnici $0.x_1 + 0.x_2 + \ldots + 0.x_n = c, c \neq 0$, pak zřejmě nemá řešení (tedy rozšířená matice obsahuje řádek $(0\ 0\ \ldots 0|c)$, proto $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.) V těchto případech existují metody přibližného řešení systému, často se používá např. metoda nejmenších čtverců.