

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$.

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$. Postupujme následujícím způsobem:

rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na n částečných intervalů

$\langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \dots, \langle x_n, x_{n+1} \rangle$, kde $a = x_1 < x_2 < \dots, x_n < x_{n+1} = b$. Toto dělení označíme D_n .

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$. Postupujme následujícím způsobem:

rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na n částečných intervalů

$\langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \dots, \langle x_n, x_{n+1} \rangle$, kde $a = x_1 < x_2 < \dots, x_n < x_{n+1} = b$. Toto dělení označíme D_n . Dále zavedeme

$$m_i = \inf_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} f(x) \text{ a } M_i = \sup_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} f(x), i = 1, \dots, n.$$

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$. Postupujme následujícím způsobem:

rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na n částečných intervalů

$\langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \dots, \langle x_n, x_{n+1} \rangle$, kde $a = x_1 < x_2 < \dots, x_n < x_{n+1} = b$. Toto dělení označíme D_n . Dále zavedeme

$$m_i = \inf_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} f(x) \text{ a } M_i = \sup_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} f(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Hledaný plošný obsah lze odhadnout pomocí výrazů

$$s(f, D_n) = \sum_{i=1}^n m_i(x_{i+1} - x_i), \text{ resp. } S(f, D_n) = \sum_{i=1}^n M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Tyto výrazy nazýváme **dolním, resp. horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D_n .

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **dolní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(f, D)$$

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **dolní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **horní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_D S(f, D).$$

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **dolní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **horní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_D S(f, D).$$

Definice : Má-li funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ horní i dolní Riemannův integrál a jsou-li stejné, pak klademe $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ a toto číslo nazýváme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$.

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **dolní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **horní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_D S(f, D).$$

Definice : Má-li funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ horní i dolní Riemannův integrál a jsou-li stejné, pak klademe $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ a toto číslo nazýváme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$.

Poznámka : Číslo a nazýváme **dolní mez** integrálu, číslo b nazýváme **horní mez** integrálu. O funkci f říkáme, že je na daném intervalu **integrabilní**.

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **dolní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **horní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_D S(f, D).$$

Definice : Má-li funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ horní i dolní Riemannův integrál a jsou-li stejné, pak klademe $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ a toto číslo nazýváme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$.

Poznámka : Číslo a nazýváme **dolní mez** integrálu, číslo b nazýváme **horní mez** integrálu. O funkci f říkáme, že je na daném intervalu **integrabilní**.

Poznámka : Pro existenci integrálu $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ stačí, aby zde funkce byla spojitá.

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu itegrálu pro případy, kdy není splněna podmínka

$a < b$:

pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,

pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu itegrálu pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:

pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,

pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Věta : Existují-li integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, pak je funkce $f(x)$ integrabilní i na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu itegrálu pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:

pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,

pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Věta : Existují-li integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, pak je funkce $f(x)$ integrabilní i na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Věta : Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na $\langle a, b \rangle$ a platí-li pro $\forall x \in \langle a, b \rangle : f(x) \geq g(x)$, pak také platí $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu integrálu pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:

pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,

pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Věta : Existují-li integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, pak je funkce $f(x)$ integrabilní i na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Věta : Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na $\langle a, b \rangle$ a platí-li pro $\forall x \in \langle a, b \rangle : f(x) \geq g(x)$, pak také platí $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Věta : Pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ a libovolné konstanty α, β je integrovatelná i funkce $\alpha f(x) + \beta g(x)$ a platí:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1$, $a = 1$, $b = 3$.

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1$, $a = 1$, $b = 3$.

Řešení: $\int_1^3 (x + 1)dx = [x^2/2 + x]_1^3 = 9/2 + 3 - (1/2 + 1) = 6$.

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1$, $a = 1$, $b = 3$.

Řešení: $\int_1^3 (x + 1)dx = [x^2/2 + x]_1^3 = 9/2 + 3 - (1/2 + 1) = 6$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$, $b = 1$

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1$, $a = 1$, $b = 3$.

Řešení: $\int_1^3 (x + 1)dx = [x^2/2 + x]_1^3 = 9/2 + 3 - (1/2 + 1) = 6$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$, $b = 1$

Řešení: $\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx = [3x^{4/3}/4]_0^1 = 3/4$.

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Příklad : $\int_0^1 x \ln(x+1) dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x & v = \ln(x+1) \\ u = x^2/2 & v' = 1/(x+1) \end{array} \right| = [\frac{x^2}{2} \ln(x+1)]_0^1 -$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - 0 - \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{(x+1)} \right) dx =$$
$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - 0 = \frac{1}{4}$$

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Příklad : $\int_0^1 x \ln(x+1) dx = \left| \begin{array}{l} u' = x \quad v = \ln(x+1) \\ u = x^2/2 \quad v' = 1/(x+1) \end{array} \right| = [\frac{x^2}{2} \ln(x+1)]_0^1 -$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - 0 - \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx =$$
$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - 0 = \frac{1}{4}$$

Substituce v určitém integrálu

Jestliže $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na $\langle a, b \rangle$ a je-li $f(u)$ spojitá na $\varphi(\langle a, b \rangle)$,

pak platí $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Příklad : $\int_0^1 x \ln(x+1) dx = \left| \begin{array}{l} u' = x \quad v = \ln(x+1) \\ u = x^2/2 \quad v' = 1/(x+1) \end{array} \right| = [\frac{x^2}{2} \ln(x+1)]_0^1 -$
 $\int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - 0 - \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx =$
 $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} [\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - 0 = \frac{1}{4}$

Substituce v určitém integrálu

Jestliže $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na $\langle a, b \rangle$ a je-li $f(u)$ spojitá na $\varphi(\langle a, b \rangle)$,

pak platí $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$

Příklad :

$$\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 2x + 3 \\ du = (2x + 2) dx \\ u(-1) = 2, u(0) = 3 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{u} dx =$$

 $\frac{1}{2} [\ln(u)]_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$, pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky

definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$.

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$, pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky

definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$.

Příklad :

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$, pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$.

Příklad :

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ nazveme **konvergentním**, pokud pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály $\int_{-\infty}^c f(x)dx$, $\int_c^\infty f(x)dx$, potom definujeme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$, pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$.

Příklad :

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ nazveme **konvergentním**, pokud pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály $\int_{-\infty}^c f(x)dx$, $\int_c^\infty f(x)dx$, potom definujeme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Příklad : $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-2x+5} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x-1)^2+4} dx = \left| \begin{array}{l} 2t = x - 1 \\ 2dt = dx \end{array} \right| =$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4t^2+4} 2dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2+1} dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1} dt =$$
$$\frac{1}{2} [\arctg(t)]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2} [\arctg(t)]_0^\infty = \frac{1}{2} (0 - \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{2}$$

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t \rangle$ pro

libovolné $t \in \langle a, b \rangle$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$, pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro

funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$.

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t \rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b \rangle$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$, pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro

funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$.

Příklad : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [5x^{4/5}/4]_t^1 =$
 $\lim_{t \rightarrow 0^+} (5/4 - 5\sqrt[5]{t^4}/4) = 5/4 - 0 = 5/4.$

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t \rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b \rangle$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$, pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro

funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$.

Příklad : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [5x^{4/5}/4]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (5/4 - 5\sqrt[5]{t^4}/4) = 5/4 - 0 = 5/4$.

Poznámka : Je-li funkce $f(x)$ je neomezená v bodě $c \in (a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, pokud oba integrály na pravé straně existují.

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t \rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b \rangle$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$, pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro

funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$.

Příklad : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [5x^{4/5}/4]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (5/4 - 5\sqrt[5]{t^4}/4) = 5/4 - 0 = 5/4$.

Poznámka : Je-li funkce $f(x)$ je neomezená v bodě $c \in (a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, pokud oba integrály na pravé straně existují.

Příklad : Spočtete: $\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$.

Špatný postup: $\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx = [\ln|x-1|]_0^2 = \ln 1 - \ln 1 = 0$

Správně: funkce není definována v bodě 1, tedy

$\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} [\ln|x-1|]_0^t + \lim_{t \rightarrow 1^-} [\ln|x-1|]_t^2 = \infty - \ln 1 + \ln 1 - \infty$, integrál diverguje.

Funkce více proměnných

Nechť $n \in \mathbb{N}$, uvažujme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (prostor uspořádaných n -tic reálných čísel).
Zobrazení množiny D do \mathbb{R} nazveme **funkcí n proměnných**. Píšeme
 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$.

Funkce více proměnných

Nechť $n \in \mathbb{N}$, uvažujme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (prostor uspořádaných n -tic reálných čísel). Zobrazení množiny D do \mathbb{R} nazveme **funkcí n proměnných**. Píšeme $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka : Metrika v \mathbb{R}^n

Budeme používat euklidovskou metriku (vzdálenost); vzdálenost mezi $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ a $B = [b_1, b_2, \dots, b_n] \in \mathbb{R}^n$ je definována jako

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Funkce více proměnných

Nechť $n \in \mathbb{N}$, uvažujme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (prostor uspořádaných n -tic reálných čísel). Zobrazení množiny D do \mathbb{R} nazveme **funkcí n proměnných**. Píšeme $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka : Metrika v \mathbb{R}^n

Budeme používat euklidovskou metriku (vzdálenost); vzdálenost mezi $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ a $B = [b_1, b_2, \dots, b_n] \in \mathbb{R}^n$ je definována jako

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Obdobně jako u funkce jedné proměnné tedy můžeme definovat **okolí bodu** $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$. Pro $\delta > 0$ nazveme δ -okolím bodu A množinu všech bodů z \mathbb{R}^n , jejichž vzdálenost od bodu A je menší než δ ;

$$U_\delta(A) = \{X \in \mathbb{R}^n, \rho(X, A) < \delta\}$$

Limita funkce více proměnných

Definice : Říkáme, že funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$ **limitu** rovnou $A \in \mathbb{R}$ a píšeme $\lim_{X \rightarrow X^0} f(X) = A$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $f(X)$ je definovaná v ryzím okolí $U_\delta(X^0) \setminus \{X^0\}$ a pro všechna X z tohoto okolí platí: $|f(X) - A| < \varepsilon$. (tj. "pro všechna X blízka X^0 platí $f(X) \approx A$.)

Limita funkce více proměnných

Definice : Říkáme, že funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$ **limitu** rovnou $A \in \mathbb{R}$ a píšeme $\lim_{X \rightarrow X^0} f(X) = A$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $f(X)$ je definovaná v ryzím okolí $U_\delta(X^0) \setminus \{X^0\}$ a pro všechna X z tohoto okolí platí: $|f(X) - A| < \varepsilon$. (tj. "pro všechna X blízká X^0 platí $f(X) \approx A$.)

Poznámka : Pro počítání s limitami platí analogická pravidla jako u funkce jedné proměnné. Obdobně se zavádějí i nevlastní limity.

Definice : Řekneme, že funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je **spojitá** v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$, jestliže má v tomto bodě limitu a platí:

$$\lim_{X \rightarrow X^0} f(X) = f(X^0).$$

Limita funkce více proměnných

Definice : Říkáme, že funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$ **limitu** rovnou $A \in \mathbb{R}$ a píšeme $\lim_{X \rightarrow X^0} f(X) = A$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $f(X)$ je definovaná v ryzím okolí $U_\delta(X^0) \setminus \{X^0\}$ a pro všechna X z tohoto okolí platí: $|f(X) - A| < \varepsilon$. (tj. "pro všechna X blízka X^0 platí $f(X) \approx A$.)

Poznámka : Pro počítání s limitami platí analogická pravidla jako u funkce jedné proměnné. Obdobně se zavádějí i nevlastní limity.

Definice : Řekneme, že funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je **spojitá** v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$, jestliže má v tomto bodě limitu a platí:

$$\lim_{X \rightarrow X^0} f(X) = f(X^0).$$

Příklad : Funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ je spojitá ve všech bodech \mathbb{R}^2 kromě bodu $[0, 0]$.

Parciální derivace

Uvažujme nejprve funkci dvou proměnných $f(x, y)$ a položme y rovno konstantě y_0 . Dostaneme funkci jedné proměnné, označme ji $g(x) = f(x, y_0)$. Jestliže má tato funkce derivaci v bodě x_0 , tj. existuje-li

$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, nazveme ji **parciální derivací** funkce $f(x, y)$ v

bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné x . Označujeme ji $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $f_x(x_0, y_0)$

nebo $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$. Analogicky se definuje parciální derivace podle y .

Parciální derivace

Uvažujme nejprve funkci dvou proměnných $f(x, y)$ a položme y rovno konstantě y_0 . Dostaneme funkci jedné proměnné, označme ji $g(x) = f(x, y_0)$. Jestliže má tato funkce derivaci v bodě x_0 , tj. existuje-li

$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, nazveme ji **parciální derivací** funkce $f(x, y)$ v

bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné x . Označujeme ji $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $f_x(x_0, y_0)$

nebo $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$. Analogicky se definuje parciální derivace podle y .

Poznámka : Pro funkci n proměnných se parciální derivace definují obdobně. Derivujeme-li podle x_i , ostatní proměnné považujeme za konstanty. Parciální derivace funkce $f(X)$ v bodě X^0 značíme například

$f'_{x_1}(X^0), f'_{x_2}(X^0), \dots, f'_{x_n}(X^0)$.

Parciální derivace

Uvažujme nejprve funkci dvou proměnných $f(x, y)$ a položme y rovno konstantě y_0 . Dostaneme funkci jedné proměnné, označme ji $g(x) = f(x, y_0)$. Jestliže má tato funkce derivaci v bodě x_0 , tj. existuje-li

$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, nazveme ji **parciální derivací** funkce $f(x, y)$ v

bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné x . Označujeme ji $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $f_x(x_0, y_0)$

nebo $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$. Analogicky se definuje parciální derivace podle y .

Poznámka : Pro funkci n proměnných se parciální derivace definují obdobně. Derivujeme-li podle x_i , ostatní proměnné považujeme za konstanty. Parciální derivace funkce $f(X)$ v bodě X^0 značíme například

$$f'_{x_1}(X^0), f'_{x_2}(X^0), \dots, f'_{x_n}(X^0).$$

Příklad : Funkce $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 5xy - 4x + y - 1$ má parciální derivace $f'_x(x, y) = 2x + 0 + 5y - 4 + 0$ a $f'_y(x, y) = 0 + 6y + 5x - 0 + 1$

Parciální derivace

Uvažujme nejprve funkci dvou proměnných $f(x, y)$ a položme y rovno konstantě y_0 . Dostaneme funkci jedné proměnné, označme ji $g(x) = f(x, y_0)$. Jestliže má tato funkce derivaci v bodě x_0 , tj. existuje-li

$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, nazveme ji **parciální derivací** funkce $f(x, y)$ v

bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné x . Označujeme ji $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $f_x(x_0, y_0)$

nebo $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$. Analogicky se definuje parciální derivace podle y .

Poznámka : Pro funkci n proměnných se parciální derivace definují obdobně. Derivujeme-li podle x_i , ostatní proměnné považujeme za konstanty. Parciální derivace funkce $f(X)$ v bodě X^0 značíme například

$f'_{x_1}(X^0), f'_{x_2}(X^0), \dots, f'_{x_n}(X^0)$.

Příklad : Funkce $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 5xy - 4x + y - 1$ má parciální derivace $f'_x(x, y) = 2x + 0 + 5y - 4 + 0$ a $f'_y(x, y) = 0 + 6y + 5x - 0 + 1$

Příklad : Funkce $f(x, y, z) = \frac{x}{y+z^2}$ má parciální derivace

$$f'_x(x, y, z) = \frac{1 \cdot (y+z^2) - x \cdot 0}{(y+z^2)^2} = \frac{1}{(y+z^2)^2}, \quad f'_y(x, y, z) = \frac{0 \cdot (y+z^2) - x \cdot 1}{(y+z^2)^2} = \frac{-x}{(y+z^2)^2} \text{ a}$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{0 \cdot (y+z^2) - x \cdot 2z}{(y+z^2)^2} = \frac{-2xz}{(y+z^2)^2}$$

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i} . Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j , nazveme ji **parciální derivací** druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$$f_{x_i x_j}(X_0) \quad \text{nebo} \quad f''_{x_i x_j}(X_0) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i} . Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j , nazveme ji **parciální derivací** druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$$f_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } f''_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i} . Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j , nazveme ji **parciální derivací** druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$$f_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } f''_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz$.

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i} . Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j , nazveme ji **parciální derivací** druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$$f_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } f''_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci

$$f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz.$$

$$f_x = 6x - yz, f_y = 2y - xz, f_z = 3z^2 - xy,$$

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i} . Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j , nazveme ji **parciální derivací** druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$$f_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } f''_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci

$$f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz.$$

$$f_x = 6x - yz, \quad f_y = 2y - xz, \quad f_z = 3z^2 - xy,$$

$$f_{xx} = 6, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{zz} = 6z,$$

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i} . Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j , nazveme ji **parciální derivací** druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$$f_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } f''_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci

$$f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz.$$

$$f_x = 6x - yz, \quad f_y = 2y - xz, \quad f_z = 3z^2 - xy,$$

$$f_{xx} = 6, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{zz} = 6z,$$

$$f_{xy} = -z, \quad f_{xz} = -y, \quad f_{yz} = -x,$$

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i} . Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j , nazveme ji **parciální derivací** druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$$f_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } f''_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci

$$f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz.$$

$$f_x = 6x - yz, \quad f_y = 2y - xz, \quad f_z = 3z^2 - xy,$$

$$f_{xx} = 6, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{zz} = 6z,$$

$$f_{xy} = -z, \quad f_{xz} = -y, \quad f_{yz} = -x,$$

$$f_{yx} = -z, \quad f_{zx} = -y, \quad f_{zy} = -x.$$

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i} . Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j , nazveme ji **parciální derivací** druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$$f_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } f''_{x_i x_j}(X_0) \text{ nebo } \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci

$$f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz.$$

$$f_x = 6x - yz, \quad f_y = 2y - xz, \quad f_z = 3z^2 - xy,$$

$$f_{xx} = 6, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{zz} = 6z,$$

$$f_{xy} = -z, \quad f_{xz} = -y, \quad f_{yz} = -x,$$

$$f_{yx} = -z, \quad f_{zx} = -y, \quad f_{zy} = -x.$$

Věta : Jestliže má funkce f **spojité** parciální derivace až do řádu k v nějakém okolí $U_\delta(X_0)$ bodu X_0 , nezáleží na pořadí, ve kterém derivujeme, tedy např.

$$f''_{x_i x_j}(X_0) = f''_{x_j x_i}(X_0)$$

Totální diferenciál

Definice : Uvažujme bod $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0] \in \mathbb{R}^n$. Má-li funkce f v okolí $U_\delta(X_0)$ bodu X_0 spojité parciální derivace prvního řádu, definujeme lineární zobrazení $df(dx_1, \dots, dx_n) = f'_{x_1}(X_0) \cdot dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X_0) \cdot dx_n$. Toto zobrazení nazýváme **totálním diferenciálem** funkce f v bodě X_0 . (místo dx_i píšeme někdy také $x_i - x_i^0$)

Totální diferenciál

Definice : Uvažujme bod $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0] \in \mathbb{R}^n$. Má-li funkce f v okolí $U_\delta(X_0)$ bodu X_0 spojité parciální derivace prvního řádu, definujeme lineární zobrazení $df(dx_1, \dots, dx_n) = f'_{x_1}(X_0) \cdot dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X_0) \cdot dx_n$. Toto zobrazení nazýváme **totálním diferenciálem** funkce f v bodě X_0 . (místo dx_i píšeme někdy také $x_i - x_i^0$)

Poznámka : Pro $n = 2$ je vztahem

$z = f(x_0, y_0) + df(dx, dy) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
definována tečná rovina ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$.

Totální diferenciál

Definice : Uvažujme bod $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0] \in \mathbb{R}^n$. Má-li funkce f v okolí $U_\delta(X_0)$ bodu X_0 spojité parciální derivace prvního řádu, definujeme lineární zobrazení $df(dx_1, \dots, dx_n) = f'_{x_1}(X_0) \cdot dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X_0) \cdot dx_n$. Toto zobrazení nazýváme **totálním diferenciálem** funkce f v bodě X_0 . (místo dx_i píšeme někdy také $x_i - x_i^0$)

Poznámka : Pro $n = 2$ je vztahem

$z = f(x_0, y_0) + df(dx, dy) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
definována tečná rovina ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$.

Příklad : Určete diferenciál funkce $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ v bodě $T = [1, 1]$

Totální diferenciál

Definice : Uvažujme bod $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0] \in \mathbb{R}^n$. Má-li funkce f v okolí $U_\delta(X_0)$ bodu X_0 spojité parciální derivace prvního řádu, definujeme lineární zobrazení $df(dx_1, \dots, dx_n) = f'_{x_1}(X_0) \cdot dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X_0) \cdot dx_n$. Toto zobrazení nazýváme **totálním diferenciálem** funkce f v bodě X_0 . (místo dx_i píšeme někdy také $x_i - x_i^0$)

Poznámka : Pro $n = 2$ je vztahem

$z = f(x_0, y_0) + df(dx, dy) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
definována tečná rovina ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$.

Příklad : Určete diferenciál funkce $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ v bodě $T = [1, 1]$

Řešení: Funkce má parciální derivace $f'_x(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cdot 2x$,

$f'_y(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cdot (-2y)$. Tedy $f'_x(1, 1) = e^0 \cdot 2 = 2$, $f'_y(1, 1) = -2$. Diferenciál funkce v bodě $T = [1, 1]$ je $df(dx, dy) = 2dx - 2dy$. Rovnice tečné roviny je $z = e^0 + 2(x - 1) - 2(y - 1) = 1 + 2x - 2y$.

Poznámka : Přidáním dalších členů s derivacemi vyšších řádů bychom dostali **Taylorův polynom** vyššího stupně.

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f(X)$ má **lokální minimum** v bodě $X^0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže existuje okolí $U_\delta(X^0)$ takové, že pro všechna $X \in U_\delta(X^0)$ platí: $f(X^0) \leq f(X)$.

Analogicky lokální maximum.

Poznámka : V případě ostrých nerovností mluvíme o **ostrých** lokálních extrémech.

Věta : Má-li funkce $f(X)$ v bodě X^0 lokální extrém, pak všechny parciální derivace, které zde existují, musí být rovny 0

Poznámka : Body, ve kterých jsou všechny parciální derivace nulové, nazýváme **stacionární**.

Příklad : Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$.

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f(X)$ má **lokální minimum** v bodě $X^0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže existuje okolí $U_\delta(X^0)$ takové, že pro všechna $X \in U_\delta(X^0)$ platí: $f(X^0) \leq f(X)$.

Analogicky lokální maximum.

Poznámka : V případě ostrých nerovností mluvíme o **ostrých** lokálních extrémech.

Věta : Má-li funkce $f(X)$ v bodě X^0 lokální extrém, pak všechny parciální derivace, které zde existují, musí být rovny 0

Poznámka : Body, ve kterých jsou všechny parciální derivace nulové, nazýváme **stacionární**.

Příklad : Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$.
 $f'_x = 3x^2 + 6y$, $f'_y = 6y + 6x$.

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f(X)$ má **lokální minimum** v bodě $X^0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže existuje okolí $U_\delta(X^0)$ takové, že pro všechna $X \in U_\delta(X^0)$ platí: $f(X^0) \leq f(X)$.

Analogicky lokální maximum.

Poznámka : V případě ostrých nerovností mluvíme o **ostrých** lokálních extrémech.

Věta : Má-li funkce $f(X)$ v bodě X^0 lokální extrém, pak všechny parciální derivace, které zde existují, musí být rovny 0

Poznámka : Body, ve kterých jsou všechny parciální derivace nulové, nazýváme **stacionární**.

Příklad : Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$.

$$f'_x = 3x^2 + 6y, f'_y = 6y + 6x.$$

Rovnice pro stacionární bod jsou

$$3x^2 + 6y = 0, 6y + 6x = 0.$$

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f(X)$ má **lokální minimum** v bodě $X^0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže existuje okolí $U_\delta(X^0)$ takové, že pro všechna $X \in U_\delta(X^0)$ platí: $f(X^0) \leq f(X)$.

Analogicky lokální maximum.

Poznámka : V případě ostrých nerovností mluvíme o **ostrých** lokálních extrémech.

Věta : Má-li funkce $f(X)$ v bodě X^0 lokální extrém, pak všechny parciální derivace, které zde existují, musí být rovny 0

Poznámka : Body, ve kterých jsou všechny parciální derivace nulové, nazýváme **stacionární**.

Příklad : Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$.

$$f'_x = 3x^2 + 6y, f'_y = 6y + 6x.$$

Rovnice pro stacionární bod jsou

$$3x^2 + 6y = 0, 6y + 6x = 0.$$

Z druhé rovnice dostaneme $y = -x$ a po dosazení do první dostaneme kvadratickou rovnici $3x^2 - 6x = 0$, její kořeny jsou $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Potom $y_1 = 0$, $y_2 = -2$. Našli jsme dva stacionární body $[0, 0]$, $[2, -2]$.

Lokální extrémy

Uvažujme funkci $f(x, y)$ a její stacionární bod $[x_0, y_0]$. Pokud jsou v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu, položíme

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_x(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

V případě, že $\Delta(x_0, y_0) < 0$, není v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém (potom bod $[x_0, y_0]$ nazýváme **sedlový bod**). Je-li $\Delta(x_0, y_0) > 0$, je v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, a to minimum pro $f''_x(x_0, y_0) > 0$ a maximum pro $f''_x(x_0, y_0) < 0$.

Lokální extrémy

Uvažujme funkci $f(x, y)$ a její stacionární bod $[x_0, y_0]$. Pokud jsou v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojitě parciální derivace druhého řádu, položíme

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_x(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

V případě, že $\Delta(x_0, y_0) < 0$, není v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém (potom bod $[x_0, y_0]$ nazýváme **sedlový bod**). Je-li $\Delta(x_0, y_0) > 0$, je v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, a to minimum pro $f''_x(x_0, y_0) > 0$ a maximum pro $f''_x(x_0, y_0) < 0$.

Příklad : Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$ z předchozího příkladu.

Lokální extrémy

Uvažujme funkci $f(x, y)$ a její stacionární bod $[x_0, y_0]$. Pokud jsou v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu, položíme

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_x(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

V případě, že $\Delta(x_0, y_0) < 0$, není v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém (potom bod $[x_0, y_0]$ nazýváme **sedlový bod**). Je-li $\Delta(x_0, y_0) > 0$, je v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, a to minimum pro $f''_x(x_0, y_0) > 0$ a maximum pro $f''_x(x_0, y_0) < 0$.

Příklad : Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$ z předchozího příkladu.

Nejprve spočteme parciální derivace druhého řádu, zderivujeme funkce

$$f'_x = 3x^2 + 6y \text{ a } f'_y = 6y + 6x:$$

$$f''_x = 6x, f''_{xy} = f''_{yx} = 6, f''_y = 6.$$

Lokální extrémy

Uvažujme funkci $f(x, y)$ a její stacionární bod $[x_0, y_0]$. Pokud jsou v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu, položíme

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_x(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

V případě, že $\Delta(x_0, y_0) < 0$, není v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém (potom bod $[x_0, y_0]$ nazýváme **sedlový bod**). Je-li $\Delta(x_0, y_0) > 0$, je v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, a to minimum pro $f''_x(x_0, y_0) > 0$ a maximum pro $f''_x(x_0, y_0) < 0$.

Příklad : Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$ z předchozího příkladu.

Nejprve spočteme parciální derivace druhého řádu, zderivujeme funkce

$$f'_x = 3x^2 + 6y \text{ a } f'_y = 6y + 6x:$$

$$f''_x = 6x, f''_{xy} = f''_{yx} = 6, f''_y = 6.$$

Sestavíme determinant matice druhých derivací v bodě $[0, 0]$:

$$\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 6 \cdot 6 = -36 < 0. \text{ V bodě } [0, 0] \text{ je tedy sedlový bod.}$$

Lokální extrémy

Uvažujme funkci $f(x, y)$ a její stacionární bod $[x_0, y_0]$. Pokud jsou v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu, položíme

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_x(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

V případě, že $\Delta(x_0, y_0) < 0$, není v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém (potom bod $[x_0, y_0]$ nazýváme **sedlový bod**). Je-li $\Delta(x_0, y_0) > 0$, je v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, a to minimum pro $f''_x(x_0, y_0) > 0$ a maximum pro $f''_x(x_0, y_0) < 0$.

Příklad : Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$ z předchozího příkladu.

Nejprve spočteme parciální derivace druhého řádu, zderivujeme funkce

$$f'_x = 3x^2 + 6y \text{ a } f'_y = 6y + 6x:$$

$$f''_x = 6x, f''_{xy} = f''_{yx} = 6, f''_y = 6.$$

Sestavíme determinant matice druhých derivací v bodě $[0, 0]$:

$$\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 6 \cdot 6 = -36 < 0. \text{ V bodě } [0, 0] \text{ je tedy sedlový bod.}$$

Pro $[2, -2]$ dostaneme $\Delta(2, -2) = 12 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = 36 > 0$, jde tedy o extrém a protože $f''_x(2, -2) = 12 > 0$, je v bodě $[2, -2]$ lokální minimum.