Kapitola 3.: Úlohy o jednom náhodném výběru z normálního rozložení a alternativního rozložení

Cíl kapitoly

Po prostudování této kapitoly budete
- znát vlastnosti pivotových statistik odvozených z náhodného výběru z normálního rozložení a budete je umět použít pro řešení konkrétních úloh
- umět sestrojit intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu a rozptyl normálního rozložení
- provádět testy hypotéz o střední hodnotě a rozptylu normálního rozložení
- sestrojit intervalový odhad pravděpodobnosti úspěchu
- testovat hypotézu o pravděpodobnosti úspěchu

Časová zátěž

Na prostudování této kapitoly a splnění úkolů s ní spojených budete potřebovat asi 11 hodin studia.

3.1. Motivace

Mnoho náhodných veličin, s nimiž se setkáváme ve výzkumu i praxi, se řídí normálním rozložením. Za jistých předpokladů obsažených v centrální limitní větě se dá rozložení jiných náhodných veličin aproximovat normálním rozložením. Proto je zapotřebí věnovat velkou pozornost právě náhodným výběrům z normálního rozložení.

Normální rozložení je charakterizováno dvěma parametry – střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Budeme tedy řešit úlohy, které se týkají těchto parametrů. Jedná se především o jednovýběrový t-test či test o rozptylu. Seznámíme se rovněž se situací, kdy máme k dispozici jeden náhodný výběr z dvourozměrného rozložení a posuzujeme rozdílnost středních hodnot obou náhodných veličin. K řešení tohoto problému slouží párový t-test.

3.2. Rozložení statistik odvozených z výběrového průměru a výběrového rozptylu

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Pak platí

a) Výběrový průměr M a výběrový rozptyl S^2 jsou stochasticky nezávislé.

b) $M \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, tedy $U = \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.

(Pivotová statistika U slouží k řešení úloh o μ, když σ^2 známe.)

c) $K = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

(Pivotová statistika K slouží k řešení úloh o σ^2, když μ neznáme.)

d) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$.

(Tato pivotová statistika slouží k řešení úloh o σ^2, když μ známe.)

e) $T = \dfrac{M-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n\text{-}1)$.

(Pivotová statistika T slouží k řešení úloh o μ, když σ^2 neznáme.)

3.2.1. Příklad

Na výrobní lince jsou automaticky baleny balíčky rýže o deklarované hmotnosti 1000 g. Působením náhodných vlivů hmotnost balíčků kolísá. Lze ji považovat za náhodnou veličinu, která se řídí normálním rozložením se střední hodnotou 996 g a směrodatnou odchylkou 18 g. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný balíček rýže neprojde výstupní kontrolou, jestliže je povolená tolerance ± 30 g od deklarované hmotnosti 1000 g?

Řešení:

Použijeme pivotovou statistiku U z bodu (b).

$X \sim N(996,\, 18^2)$, $U = \dfrac{X-996}{18} \sim N(0,1)$

$$P\big(X \notin \langle 970{,}1030\rangle\big) = 1 - P(970 < X < 1030) = 1 - P\left(\frac{970-996}{18} < U < \frac{1030-996}{18}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1{,}89) + \Phi(-1{,}44) = 2 - 0{,}971 - 0{,}925 = 0{,}104$$

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Využijeme toho, že STATISTICA pomocí funkce INormal(x;mu;sigma) umí vypočítat hodnotu distribuční funkce normálního rozložení se střední hodnotou mu a směrodatnou odchylkou sigma. Tedy

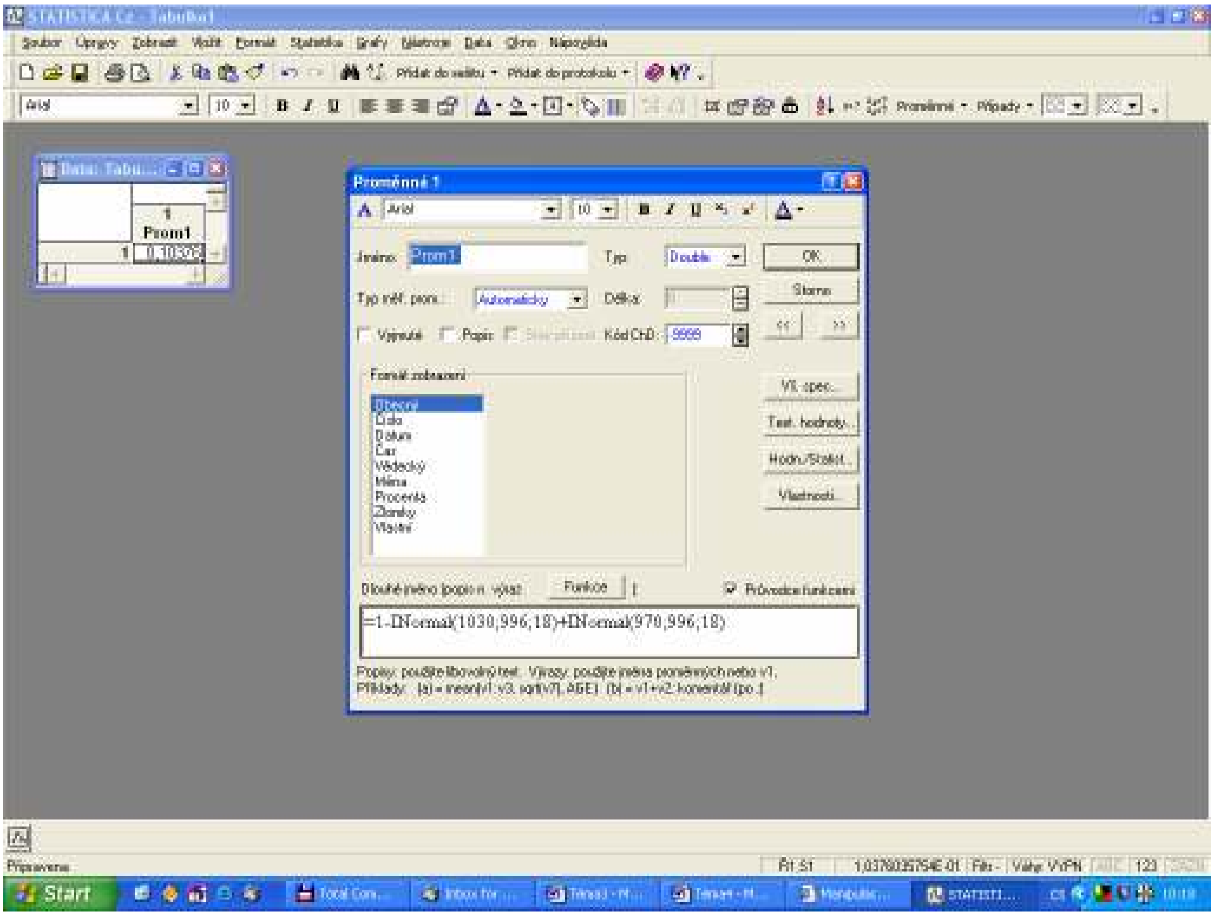
$$P\big(X \notin \langle 970{,}1030\rangle\big) = 1 - P(970 < X < 1030) = 1 - [\Phi(1030) - \Phi(970)] = 1 - \Phi(1030) + \Phi(970),$$

kde Φ je distribuční funkce rozložení $N(996{,}18^2)$.

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Dvakrát klikneme na název proměnné Prom1. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme

= 1- INormal(1030;996;18) + INormal(970;996;18).

V proměnné Prom1 se objeví hodnota 0,10376.



3.3. Intervaly spolehlivosti pro parametry μ, σ^2

V kapitole 1 jsme se seznámili s pojmem intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci h(ϑ). Nyní se budeme zabývat speciálními případy, kdy za parametrickou funkci h(ϑ) považujeme střední hodnotu μ nebo rozptyl σ^2 normálního rozložení. V příkladu 1.3.5. jsme si ukázali způsob, jak zkonstruovat interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ, když rozptyl σ^2 známe. Odvození intervalu spolehlivosti pro další tři situace (tj. pro μ, když σ^2 neznáme, pro σ^2, když μ neznáme a konečně pro σ^2, když μ známe) provádět nebudeme, uvedeme jen přehled vzorců pro meze 100(1-α)% empirických intervalů spolehlivosti pro tyto parametry .

3.3.1. Přehled vzorců

a) Interval spolehlivosti pro μ, když σ^2 známe

(využití pivotové statistiky $U = \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$)

Oboustranný: $(d, h) = (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2})$

Levostranný: $(d, \infty) = (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}, \infty)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = (-\infty, m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha})$

b) Interval spolehlivosti pro μ, když σ^2 neznáme (využití pivotové statistiky $T = \frac{M-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$)

Oboustranný: (d, h) = $\left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1),\ m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right)$

Levostranný: (d, ∞) = $\left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1),\ \infty\right)$

Pravostranný: (-∞, h) = $\left(-\infty,\ m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)\right)$

c) Interval spolehlivosti pro σ^2, když μ neznáme

(využití pivotové statistiky $K = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$)

Oboustranný: (d, h) = $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$

Levostranný: (d, ∞) = $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \infty\right)$

Pravostranný: (-∞, h) = $\left(-\infty, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\right)$

d) Interval spolehlivosti pro σ^2, když μ známe

(využití pivotové statistiky $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$)

Oboustranný: (d, h) = $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$

Levostranný: (d, ∞) = $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}, \infty\right)$

Pravostranný: (-∞, h) = $\left(-\infty, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)}\right)$

3.3.2. Příklad

10 krát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ. Výsledky měření byly: 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Tyto výsledky považujeme za číselné realizace náhodného

výběru $X_1, ..., X_{10}$ z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$, kde parametry μ, σ^2 neznáme. Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro μ, a to

a) oboustranný,
b) levostranný,
c) pravostranný.

Řešení:

Vypočteme realizaci výběrového průměru: m = 2,06, výběrového rozptylu: $s^2 = 0{,}0404$ a výběrové směrodatné odchylky: s = 0,2011. Riziko α je 0,05. Jde o situaci popsanou v bodě (b), kde využíváme pivotovou statistiku T, která se řídí Studentovým rozložením t(9). V tabulkách najdeme kvantil $t_{0,975}(9) = 2{,}2622$ pro oboustranný interval spolehlivosti a kvantil $t_{0,95}(9) = 1{,}8331$ pro jednostranné intervaly spolehlivosti.

ad a) $d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 2{,}06 - \frac{0{,}2011}{\sqrt{10}} 2{,}2622 = 1{,}92$

$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 2{,}06 + \frac{0{,}2011}{\sqrt{10}} 2{,}2622 = 2{,}20$

$1{,}92 < \mu < 2{,}20$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad b) $d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) = 2{,}06 - \frac{0{,}2011}{\sqrt{10}} 1{,}8331 = 1{,}94$

$1{,}94 < \mu$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c) $h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) = 2{,}06 + \frac{0{,}2011}{\sqrt{10}} 1{,}8331 = 2{,}18$

$\mu < 2{,}18$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné (nazveme ji Měření) a 10 případech. Do této proměnné zapíšeme výsledky měření.

ad a) Meze 100(1-α)% empirického oboustranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu při neznámém rozptylu vypočteme takto: Statistika – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – OK, Proměnné – Měření – OK. Na záložce Detaily vybereme Meze spolehl. prům. a ponecháme implicitně nastavenou hodnotu 95%. Po kliknutí na Souhrn dostaneme tabulku

	Popisné statistiky (Tabulka2	
Proměnná	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. +95,000%
Měření	1,916136	2,203864

Po zaokrouhlení na dvě desetinná místa dostaneme výsledek $1{,}92 < \mu < 2{,}20$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad b), c) U volby Meze spolehl. prům. změníme hodnotu na 90%. Dostaneme tabulku

	Popisné statistiky (Tabulka2	
Proměnná	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. +90,000%
Měření	1,943421	2,176579

Odtud získáme dolní mez 95% empirického levostranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu: $1{,}94 < \mu$ s pravděpodobností aspoň 0,95 a horní mez 95% empirického pravostranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu: $\mu < 2{,}18$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

3.4. Testování hypotéz o parametrech μ, σ^2

a) Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe. Nechť $n \geq 2$ a c je konstanta. Test H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu \neq c$ se nazývá z-test.
b) Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 neznáme. Nechť $n \geq 2$ a c je konstanta. Test H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu \neq c$ se nazývá jednovýběrový t-test.
c) Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ neznáme. Nechť $n \geq 2$ a c je konstanta. Test H_0: $\sigma^2 = c$ proti H_1: $\sigma^2 \neq c$ se nazývá test o rozptylu.

3.4.1. Provedení testů o parametrech μ, σ^2 pomocí kritického oboru

V kapitole 1 byly uvedeny tři způsoby testování hypotéz – pomocí kritického oboru, pomocí intervalu spolehlivosti a pomocí p-hodnoty. V tomto odstavci si ukážeme, jak testovat hypotézy o střední hodnotě μ a rozptylu σ^2 pomocí kritického oboru.

a) Provedení z-testu
Testujeme H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu \neq c$ (resp. H_1: $\mu < c$ resp. H_1: $\mu > c$).
Vypočteme realizaci testové statistiky: $t_0 = \dfrac{m - c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.
Stanovíme kritický obor:
pro oboustranný test: $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$,
pro levostranný test: $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$,
pro pravostranný test: $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$.
H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když $t_0 \in W$.

b) Provedení jednovýběrového t-testu
Testujeme H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu \neq c$ (resp. H_1: $\mu < c$ resp. H_1: $\mu > c$).
Realizace testového kritéria: $t_0 = \dfrac{m - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.
Kritický obor pro oboustranný test: $W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\right)$,
pro levostranný test: $W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)\right\rangle$
pro pravostranný test: $W = \left\langle t_{1-\alpha}(n-1), \infty\right)$
H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když $t_0 \in W$.

c) Provedení testu o rozptylu
Testujeme H_0: $\sigma^2 = c$ proti H_1: $\sigma^2 \neq c$ (resp. H_1: $\sigma^2 < c$ resp. H_1: $\sigma^2 > c$).
Realizace testového kritéria $t_0 = \dfrac{(n-1)s^2}{c}$.
Kritický obor pro oboustranný test: $W = \left\langle 0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\right)$,
pro levostranný test: $W = \left\langle 0, \chi^2_{\alpha}(n-1)\right\rangle$,

pro pravostranný test: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(n-1), \infty)$

H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když $t_0 \in W$.

Před provedením kteréhokoli z uvedených testů je zapotřebí ověřit normalitu dat pomocí diagnostických grafů a testů normality popsaných v kapitole 2. Zjistíme-li u jednovýběrového t-testu, že rozsah souboru je malý (n < 30) a porušení normality je výraznější, doporučuje se přejít k neparametrickému jednovýběrovému Wilcoxonovu testu (viz kapitola 7). Pro výběry větších rozsahů není mírné porušení normality na překážku použití uvedených testů.

3.4.2. Příklad

Podle údajů na obalu čokolády by její čistá hmotnost měla být 125g. Výrobce dostal několik stížností od kupujících, ve kterých tvrdili, že hmotnost čokolád je nižší než deklarovaných 125g. Z tohoto důvodu oddělení kontroly náhodně vybralo 50 čokolád a zjistilo, že jejich průměrná hmotnost je 122 g a směrodatná odchylka 8,6 g. Za předpokladu, že hmotnost čokolád se řídí normálním rozložením, můžeme na hladině významnosti 0,01 považovat stížnosti kupujících za oprávněné?

Řešení:

$X_1, ..., X_{50}$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$. Testujeme hypotézu H_0: $\mu = 125$ proti levostranné alternativě H_1: $\mu < 125$. Protože neznáme rozptyl σ^2, použijeme jednovýběrový t-test.

Realizace testového kritéria $t_0 = \dfrac{m-c}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{122-125}{\frac{8,6}{\sqrt{50}}} = -2,4667$.

Kritický obor: $W = (-\infty, -t_{0,99}(49)\rangle = (-\infty, -2,4667\rangle$

Jelikož $t_0 \in W$, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,01. Stížnosti kupujících tedy lze považovat za oprávněné (s rizikem omylu nejvýše 1%).

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení) – zaškrtneme Výběrový průměr vs. Střední hodnota a zvolíme Jednostr. – do políčka Pr1 napíšeme 122, do políčka SmOd1 napíšeme 80, do políčka N1 napíšeme 20, do políčka Pr2 napíšeme 1000 - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0086, tedy zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,01

3.5. Náhodný výběr z dvourozměrného rozložení

Nechť $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ je náhodný výběr z dvourozměrného rozložení s vektorem středních hodnot $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$, přičemž $n \geq 2$. Označíme $\mu = \mu_1 - \mu_2$ a zavedeme rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1, ..., Z_n = X_n - Y_n$. Předpokládáme, že tento rozdílový náhodný výběr pochází z normálního rozložení. Vypočteme $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - M)^2$.

3.5.1. Interval spolehlivosti pro parametr μ

Pro výpočet mezí 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ použijeme vzorec uvedený v 3.3.1. (b).

3.5.2. Párový t-test

Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (tj. $\mu = 0$) proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (tj $\mu \neq 0$). Přechodem k rozdílovému náhodnému výběru převedeme párový t-test na jednovýběrový t-test, jehož provedení je popsáno v 3.4.1. (b).

Před provedením párového t-testu je zapotřebí testovat hypotézu o normalitě rozdílů dvourozměrných dat. Je-li rozsah výběru malý ($n < 30$) a porušení normality je výraznější, je zapotřebí místo párového testu použít neparametrický párový Wilcoxonův test (viz kapitola 7). Pro výběry větších rozsahů, které vykazují jen mírné porušení normality, můžeme použít párový t-test.

3.5.3. Příklad

Na 10 automobilech stejného typu se testovaly dva druhy benzínu lišící se oktanovým číslem. U každého automobilu se při průměrné rychlosti 90 km/h měřil dojezd (tj. dráha, kterou ujede na dané množství benzínu) při použití každého z obou druhů benzínu. Výsledky:

Číslo auta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
benzín A	17,5	20,0	18,9	17,9	16,4	18,9	17,2	17,5	18,5	18,2
benzín B	17,8	20,8	19,5	18,3	16,6	19,5	17,5	17,9	19,1	18,6

Za předpokladu, že dojezd se řídí normálním rozložením, testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že rozdíl středních hodnot dojezdu při dvou druzích benzínu se neliší.

Řešení:

Přejdeme k rozdílovému náhodnému výběru. Označíme $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Testujeme hypotézu H_0: $\mu = 0$ proti H_1: $\mu \neq 0$ na hladině významnosti 0,05. Vypočteme m = -0,46, s = 0,1838 a realizaci testového kritéria $t_0 = -7{,}9148$. Stanovíme kritický obor

$W = \left(-\infty, -t_{0,975}(9)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(9), \infty\right) = \left(-\infty, -2{,}2622\right\rangle \cup \left\langle 2{,}2622, \infty\right)$. Protože $t_0 \in W$, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 5% jsme tedy prokázali, že rozdíl středních hodnot dojezdu při dvou druzích benzínu se liší.

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor se třemi proměnnými benzín A, benzín B a rozdíl a o deseti případech. Do proměnných benzin A, benzin B zapíšeme zjištěné hodnoty, do proměnné rozdil uložíme rozdíl hodnot benzin A – benzin B. Ověříme normalitu proměnné rozdíl: Statistika – Základní statistiky/tabulky – Tabulky četností – OK, Proměnné rozdíl – OK. Na záložce zvolíme Normalita a zaškrtneme Lilieforsův test a Shapiro – Wilksův W test – Testy normality.

	Testy normality (Dva_druhy_benzinu.sta)				
Proměnná	N	max D	Lilliefors p	W	p
rozdil: =v1-v2	10	0,227963	p < ,15	0,930239	0,450252

Ani jeden z těchto testů nezamítá na hladině významnosti 0,05 hypotézu o normalitě.
Nyní provedeme párový t-test: Statistika – Základní statistiky/tabulky – t-test, závislé vzorky – OK, Proměnné – 1. seznam proměnných benzín A, benzín B – OK – Souhrn. Dostaneme tabulku

Proměnná	t-test pro závislé vzorky (Dva_druhy_benzinu.sta) Označ. rozdíly jsou významné na hlad. p < ,05000 Průměr	Sm.odch.	N	Rozdíl	Sm.odch. rozdílu	t	sv	p	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. +95,000%
benzin A	18,10000	1,028483								
benzin B	18,56000	1,207569	10	-0,460000	0,183787	-7,91484	9	0,000024	-0,591474	-0,328526

Vidíme, že testová statistika se realizovala hodnotou -7,91484, počet stupňů volnosti = 9, odpovídající p-hodnota = 0,000024 ≤ 0,05, tedy nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,05.

3.6. Náhodný výběr z alternativního rozložení

Předpokládáme, že provádíme n-krát nezávisle na sobě týž náhodný pokus a sledujeme výskyt nějakého jevu, jehož pravděpodobnost nastoupení v libovolném z těchto n pokusů je rovna neznámému parametru ϑ. Zavedeme náhodné veličiny $X_1,\dots,X_n$, přičemž $X_i = 1$, když v i-tém pokusu nastal sledovaný jev a $X_i = 0$ jinak, $i = 1,\dots,n$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$. Pomocí tohoto náhodného výběru můžeme konstruovat interval spolehlivosti pro neznámý parametr ϑ nebo testovat hypotézu o tomto parametru. Přitom jako bodový odhad parametru ϑ slouží výběrový průměr $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, tj. relativní četnost výskytu sledovaného jevu.

3.6.1. Asymptotický interval spolehlivosti pro parametr ϑ

Nechť $X_1,\dots,X_n$ je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$ (viz Zvára, str. 65). Pak statistika $U = \frac{M-\vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}}$ konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným normálním rozložením. (Říkáme, že U má asymptoticky rozložení $N(0,1)$ a píšeme $U \approx N(0,1)$.)

Oboustranný 100(1-α)% asymptotický empirický interval spolehlivosti pro parametr ϑ má meze:

$$(d,h) = \left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}\,u_{1-\alpha/2},\ m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}\,u_{1-\alpha/2} \right)$$

3.6.2. Příklad

Náhodně bylo vybráno 100 osob a zjištěno, že 34 z nich by v příštích parlamentních volbách volilo stranu X. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude volit stranu X.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny $X_1,\dots,X_{100}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tá osoba volí stranu X a $X_i = 0$ jinak, $i = 1,\dots,100$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

Známe: Rozsah výběru $n = 100$, výběrový průměr (tj. relativní četnost osob volících stranu X) $m = \frac{34}{100}$, riziko $\alpha = 0{,}05$, kvantil $u_{1-\alpha/2} = u_{0{,}975} = 1{,}96$.

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem. Pak $100 \cdot 0{,}34 \cdot 0{,}66 = 22{,}44 > 9$.

Dosadíme do vzorce z odstavce 3.6.1. a dostaneme:

$$d = 0{,}34 - \sqrt{\frac{0{,}34(1-0{,}34)}{100}}1{,}96 = 0{,}2472,\ h = 0{,}34 + \sqrt{\frac{0{,}34(1-0{,}34)}{100}}1{,}96 = 0{,}4328\,.$$

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy můžeme očekávat, že v populaci je 24,7 % až 43,3 % osob, které by volily stranu X.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

a) Přesný způsob

Otevřeme nový datový soubor se dvěma proměnnými a o jednom případu.

První proměnnou nazveme d a do jejího Dlouhého jména napíšeme
=0,34-sqrt(0,34*0,66/100)*VNormal(0,975;0;1)

Druhou proměnnou nazveme h a do jejího Dlouhého jména napíšeme
=0,34+sqrt(0,34*0,66/100)*VNormal(0,975;0;1)

Dostaneme výsledek:

	1 d	2 h
1	0,247155	0,432845

Vidíme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost volby strany X bude pohybovat v mezích od 0,2471 do 0,4328.

b) Přibližný způsob, použitelný pro dostatečně velký rozsah výběru

Do nového datového souboru o jedné proměnné X a 100 případech uložíme 34 jedniček (indikují volbu strany X) a 66 nul.

Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. prům. – ponecháme implicitní hodnotu pro Interval 95,00 – Výpočet.

Dostaneme tabulku:

Proměnná	N platných	Průměr	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. 95,000
X	100	0,340000	0,245532	0,434468

Dospěli jsme k výsledku, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost volby strany X bude pohybovat v mezích 0,2455 až 0,4345.

Vidíme, že rozdíl mezi přesným a přibližným výsledkem je v tomto případě vskutku zanedbatelný. Takto dobré shody je dosaženo díky tomu, že náhodný výběr má dostatečně velký rozsah, n = 100.

3.6.3. Testování hypotézy o parametru ϑ

Nechť $X_1,\ldots,X_n$ je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$. Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu $H_0 : \vartheta = c$ proti alternativě $H_1 : \vartheta \neq c$.

Realizace testového kritéria: $t_0 = \dfrac{m-c}{\sqrt{\dfrac{c(1-c)}{n}}}$.

Kritický obor pro oboustranný test: $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$,

pro levostranný test: $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$,

pro pravostranný test: $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$.

H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $t_0 \in W$.

3.6.4. Příklad

Pravděpodobnost vyrobení zmetku při výrobě určité součástky činí $\vartheta = 0{,}01$. Bylo náhodně vybráno 1000 výrobků a zjistilo se, že mezi nimi je 16 zmetků. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že odchylka relativní četnosti zmetků od udané pravděpodobnosti je pouze náhodná.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny $X_1,\ldots,X_{1000}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tý výrobek byl zmetek a $X_i = 0$ jinak, $i = 1,\ldots,1000$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

Testujeme hypotézu $H_0 : \vartheta = 0{,}01$ proti alternativě $H_1 : \vartheta \neq 0{,}01$.

Známe: Rozsah výběru $n = 1000$, výběrový průměr (tj. relativní četnost zmetků) $m = \dfrac{16}{1000}$, riziko $\alpha = 0{,}05$, kvantil $u_{1-\alpha/2} = u_{0{,}975} = 1{,}96$.

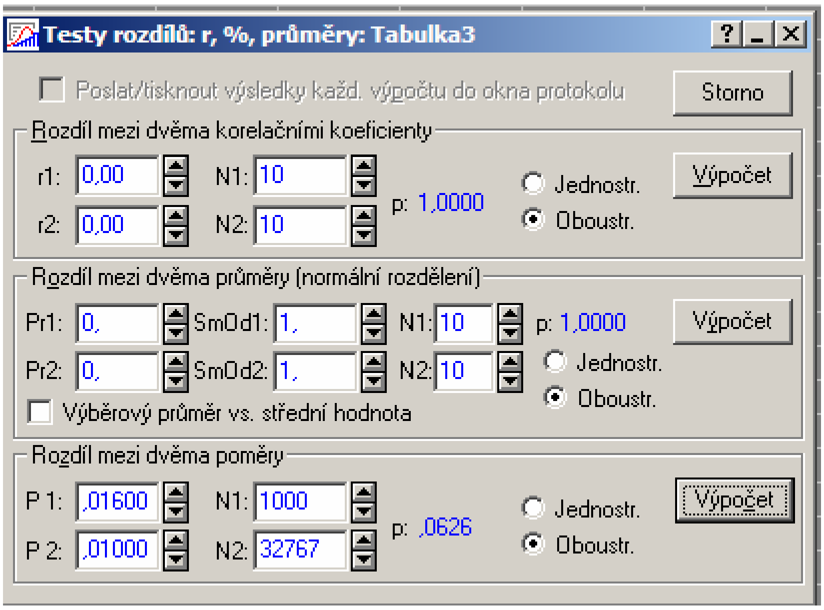
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $1000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99 = 9{,}9 > 9$.

Realizace testového kritéria: $t_0 = \dfrac{m-c}{\sqrt{\dfrac{c\cdot(1-c)}{n}}} = \dfrac{0{,}016-0{,}01}{\sqrt{\dfrac{0{,}01\cdot 0{,}99}{1000}}} = 1{,}907$.

Kritický obor: $W = \left(-\infty, -u_{0{,}975}\right\rangle \cup \left\langle u_{0{,}975}, \infty\right) = \left(-\infty, -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96, \infty\right)$. Protože 1,907 $\notin$ W, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA (pouze přibližný):

STATISTICA má implementovaný způsob, jak testovat významnost rozdílu mezi dvěma poměry. V našem případě je jedním poměrem relativní četnost zmetků (tj. 0,016) a druhým poměrem je deklarovaná pravděpodobnost vyrobení zmetku (tj. 0,01). Rozsah prvního výběru je 1000, rozsah druhého výběru je ovšem nekonečně velký. Nekonečno samozřejmě nelze do systému zadat, proto použijeme největší hodnotu, kterou STATISTICA umožní, což je 32767. Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,016, do políčka N1 napíšeme 1000, do políčka P 2 napíšeme 0,01, do políčka N2 napíšeme 32767 - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0626, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na asymptotické hladině významnosti 0,05.



Shrnutí

V praxi se často setkáváme s náhodným výběrem z normálního rozložení. Toto rozložení je charakterizováno střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Při řešení úloh o těchto dvou parametrech používáme čtyři pivotové statistiky, které jsou odvozeny z výběrového průměru M a výběrového rozptylu S^2. Jsou zavedeny ve 3.2. Pro výpočet mezí 100(1-α)% empirických intervalů spolehlivosti pro μ či pro σ^2 slouží vzorce uvedené ve 3.3.1. Meze lze počítat též pomocí systému STATISTICA, jak je uvedeno v příkladu 3.3.2.

Testování hypotéz o střední hodnotě a rozptylu je popsáno ve 3.4. včetně způsobu, jak při těchto testech využít systém STATISTICA. Jedná se o *jednovýběrový z-test, jednovýběrový t-test* a *test o rozptylu.* V situaci, kdy máme k dispozici jeden náhodný výběr z dvourozměrného rozložení a posuzujeme rozdílnost středních hodnot obou náhodných veličin, použijeme *párový t-test* popsaný v 3.5.

Při ověřování předpokladu normality se opíráme o diagnostické grafy či o testy normality dat popsané ve 2. kapitole.

Sledujeme-li výskyt nějakého jevu (úspěchu) v n opakovaných nezávislých pokusech, zajímá nás často *intervalový odhad pravděpodobnosti úspěchu* nebo testujeme *tvrzení o pravděpodobnosti úspěchu*. V takové situaci použijeme metody založené na náhodném výběru z alternativního rozložení a využijeme asymptotické normality relativní četnosti.

Kontrolní otázky

1. Jaké pivotové statistiky odvozené z výběrového průměru M a výběrového rozptylu S^2 používáme při řešení úloh o střední hodnotě μ a rozptylu σ^2 normálního rozložení?
2. Jak vypadají meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ, když rozptyl σ^2 není znám?
3. Jaké testy o parametrech normálního rozložení znáte?
4. V jaké situaci a za jakých podmínek použijete jednovýběrový t-test?
5. V jaké situaci a za jakých podmínek použijete párový t-test?
6. Jaká podmínka musí být splněna při intervalovém odhadu pravděpodobnosti výskytu nějakého jevu?

Autokorekční test

1. Máme-li sestrojit interval spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozložení a neznáme rozptyl, použijeme pivotovou statistiku, která se řídí
a) standardizovaným normálním rozložením,
b) Pearsonovým chí-kvadrát rozložením,
c) Studentovým rozložením.

2. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?
a) 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti pro neznámou směrodatnou odchylku normálního rozložení při neznámé střední hodnotě má meze

$$\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}}, \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}}\right).$$

b) 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu normálního rozložení při známém rozptylu má meze

$$\left(m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\right).$$

c) 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti pro neznámý rozptyl normálního rozložení při známé střední hodnotě má meze

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right).$$

3. Jednovýběrový t-test slouží k testování hypotézy
a) o střední hodnotě normálního rozložení při neznámém rozptylu,
b) o směrodatné odchylce normálního rozložení při neznámé střední hodnotě,
c) o střední hodnotě normálního rozložení při známém rozptylu.

4. Nechť je dán náhodný výběr rozsahu n z rozložení $N(\mu,\sigma^2)$, kde rozptyl σ^2 známe. Jak musíme změnit rozsah náhodného výběru, chceme-li, aby šířka 100(1-α)% empirického interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ klesla na polovinu?
a) Rozsah zvětšíme 2 x.
b) Rozsah zvětšíme 4 x.
c) Rozsah zmenšíme na polovinu.

5. Nechť je dán náhodný výběr rozsahu n z rozložení $N(\mu,\sigma^2)$, kde parametry μ,σ^2 neznáme. Dále je dána reálná konstanta c. Testujeme nulovou hypotézu H_0: $\sigma^2 = c$ proti levostranné alternativě H_1: $\sigma^2 < c$. Kritický obor pro tento test má tvar
a) $W = \left(0, \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right)$
b) $W = \left(0, \chi^2_{\alpha}(n-1)\right)$
c) $W = \left(\chi^2_{1-\alpha}(n-1), \infty\right)$

6. Chceme-li testovat hypotézu, že pravděpodobnost padnutí líce se neliší od 0,5, použijeme pivotovou statistiku, která se asymptoticky řídí normálním rozložením
a) N(0,5; 1)

b) N(0;5 $0{,}5^2$)
c) N(0; 1)

Správné odpovědi: 1c) 2b) 3a) 4b) 5b) 6c)

Příklady

1. Lze předpokládat, že hmotnost pomerančů dodávaných do obchodní sítě se řídí normálním rozložením se střední hodnotou 170 g a směrodatnou odchylkou 12 g. Jaká je pravděpodobnost, že celková hmotnost devíti náhodně vybraných pomerančů balených do síťky překročí 1,5 kg?
Výsledek: Hledaná pravděpodobnost je 0,797.

2. Počet bodů v testu inteligence je náhodná veličina, která se řídí rozložením N(100,225). Jaká je pravděpodobnost, že průměr v náhodně vybrané skupině 20 osob bude větší než 105 bodů?
Výsledek: Hledaná pravděpodobnost je 0,06811.

3. Při provádění určitého pokusu bylo zapotřebí udržovat v laboratoři konstantní teplotu 26,5°C. Teplota byla v jednom pracovním týdnu 46x namátkově kontrolována v různých denních a nočních hodinách. Z výsledků měření byly vypočteny realizace výběrového průměru a výběrové směrodatné odchylky: m = 26,33°C, s = 0,748°C. Za předpokladu, že výsledky měření teploty se řídí rozložením $N(\mu,\sigma^2)$, vypočtěte 95% empirický interval spolehlivosti
a) pro střední hodnotu μ
b) pro směrodatnou odchylku σ.
Výsledek:
ad a) Dosazením do vzorce 3.3.1. (b) dostaneme 26,11°C < μ < 26,55°C s pravděpodobností aspoň 0,95.
ad b) Dosazením do vzorce 3.3.1. (d), kde meze odmocníme, dostaneme 0,62°C < σ < 0,94°C s pravděpodobností aspoň 0,95.

4. U 25 náhodně vybraných dvoulitrových lahví s nealkoholickým nápojem byl zjištěn přesný objem nápoje. Výběrový průměr činil m = 1,99 l a výběrová směrodatná odchylka s = 0,1 l. Předpokládejme, že objem nápoje v láhvi je náhodná veličina s normálním rozložením.
a) Na hladině významnosti 0,05 ověřte tvrzení výrobce, že zákazník není znevýhodněn.
b) Na hladině významnosti 0,05 ověřte tvrzení výrobce, že směrodatná odchylka je 0,08 l.
Výsledek:
ad a) Testujeme hypotézu H_0: $\mu = 2$ proti levostranné alternativě H_1: $\mu < 2$ pomocí jednovýběrového t-testu (viz 3.4.1. (b)). Jelikož hodnota testového kritéria -0,5 neleží v kritickém oboru $\left(-\infty; -2{,}064\right\rangle$, nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.
ad b) Testujeme hypotézu H_0: $\sigma = 0{,}08$ proti oboustranné alternativě H_1: $\sigma \neq 0{,}08$ pomocí testu o rozptylu (viz 3.4.1. (c)). Jelikož hodnota testového kritéria 37,5 neleží v kritickém oboru $\left(0;12{,}4\right\rangle \cup \left\langle 39{,}4;\infty\right)$, nejsme oprávněni na hladině významnosti 0,05 zamítnout tvrzení výrobce.

5. Bylo vybráno šest nových vozů téže značky a po určité době bylo zjištěno, o kolik mm se sjely jejich levé a pravé přední pneumatiky. Výsledky: (1,8; 1,5), (1,0; 1,1), (2,2; 2,0), (0,9; 1,1), (1,5; 1,4), (1,6; 1,4). Za předpokladu, že rozdíl uvedených dvojice tvoří náhodný výběr

z normálního rozložení, testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že obě pneumatiky se sjíždějí stejně rychle.
Výsledek:
Vzhled N-P plotu není v rozporu s předpokladem o normálním rozložení rozdílového výběru. Testujeme nulovou hypotézu H_0: $\mu = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu \neq 0$ pomocí párového t-testu. Hodnota testového kritéria = 1,0512, počet stupňů volnosti = 5. Protože odpovídající p-hodnota = 0,3411 je větší než hladina významnosti 0,05, nelze na hladině významnosti 0,05 zamítnout nulovou hypotézu. Ke stejnému rozhodnutí dospějeme, pokud stanovíme kritický obor: W = $(-\infty;-2{,}571)\cup(2{,}571;\infty)$. Testové kritérium se nerealizuje v kritickém oboru, tedy nelze na hladině významnosti 0,05 zamítnout nulovou hypotézu.

6. Uměle připravený vzorek minerálu obsahoval 10% křemene a byl 12 krát proměřen. Výsledky měření byly: 8,7 10,2 10,07 9,75 9,65 10,37 10,14 10,5 9,48 11,22 9,49 9,86. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že obsah křemene byl stanoven správně.
Výsledek:
K-S test ani S-W test nezamítají na hladině významnosti 0,05 normalitu dat. Testujeme nulovou hypotézu H_0: $\mu = 10$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu \neq 10$. Úloha vede na jednovýběrový t-test. Realizace testového kritéria = -0,262, počet stupňů volnosti = 9. Protože odpovídající p-hodnota = 0,7981 je větší než hladina významnosti 0,05, nelze na hladině významnosti 0,05 zamítnout nulovou hypotézu.

7. Ve 100 hodech kostkou padla 17 krát šestka.
a) Najděte 95 % asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost padnutí šestky.
b) Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že pravděpodobnost padnutí šestky je $\frac{1}{6}$.
Výsledek: ad a) $0{,}096 < \vartheta < 0{,}244$ s pravděpodobností přibližně 0,95.
ad b) Na asymptotické hladině významnosti 0,05 nulovou hypotézu nezamítáme.