

Metoda exponenciálního vyrovnávání¹

[R.G.Brown-R.F.Meyer]

Je dalším z přístupů, který je řazen (vedle metody klouzavých průměrů) k **adaptivním technikám** určení **trendové složky časové řady**.

Výchozí úvahou této techniky je, že se k predikci nové hodnoty časové řady :

- a) berou v úvahu všechna dostupná pozorování časové řady
- b) starší pozorování jsou z hlediska síly ovlivnění aktuálních předpovědí brána s nižší významností než pozorování nová (aktuální).

Váhová struktura, která je při **Brownově exponenciálním vyrovnávání** uplatněna, je představována geometrickým rozdělením. Váhy jsou tedy stanoveny podle vzorce

$$(1) \quad w_i = (1 - \alpha)^{i-1} \alpha$$

Je patrné, že váhy splňují podmínku $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, neboť

$$\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n (1 - \alpha)^{i-1} \alpha = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \alpha = 1 - \alpha^n \approx 1$$

Nechť nepřekvapí, že váhová struktura se řídí rozdělením, které je definováno na neomezeném oboru, přestože počet pozorování časové řady, kterým jsou váhy přiřazovány je vždy konečný - z matematického hlediska nepředstavuje tato okolnost žádný problém.

Název exponenciální by odpovídal zespojitění situace, neboť obdobou diskrétního geometrického rozdělení je ve spojitém případě rozdělení exponenciální. Název tedy nemá nic společného s exponenciálním průběhem trendu.

Podobně jako **metoda klouzavých průměrů** je i **exponenciální vyrovnávání** založeno na lokálním vyrovnání časové řady jednoduchou matematickou křivkou (na rozdíl od metody klouzavých průměrů se však vzata pozorování neváží „symetricky“).

Podle typu vyrovnávací křivky rozlišujeme tři základní verze tohoto postupu :

1. **Jednoduché (konstantní) exponenciální vyrovnávání** (lokálně vyrovnávací křivkou je po částech **konstantní funkce**).
2. **Dvojitě (také lineární) exponenciální vyrovnávání** (zde je lokálně vyrovnávací křivkou **lineární funkce**).
3. **Trojitě (také kvadratické) exponenciální vyrovnávání** (uplatňuje se parabola 2. stupně lokálně vyrovnávací křivkou **kvadratická funkce**)

¹ Postup všech typů exponenciálního vyrovnávání je zevrubně popsán v monografii: Brown,R.,G.: *Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series. London, Prentice-Hall 1963.* popř. v článku Brown,R.,G.,Meyer, R.,F.“: *The fundamental theory of exponential smoothing. Operations Research 9/1961 str. 673-684.*

Všechny verze exponenciálního vyrovnávání se opírají o následující úvahu :

V kterémkoliv bodě (pevně zvoleném okamžiku t) máme k dispozici jednak :

- poslední pozorování analyzované časové řady, tedy y_t
- předpověď téhož pozorování y_t^* (určenou dříve na základě předtím, tj. do času $t-1$ dostupných pozorování, tedy do hodnoty y_{t-1} včetně).

Předpověď pro "opravenou hodnotu" \hat{y}_t tedy nyní vytvořme pomocí váženého průměru

$$(2) \quad \hat{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_{t-1}$$

tzn. že nová předpověď je konstruována jako vážený aritmetický průměr skutečné hodnoty "nového" pozorování y_t a „staré“, předpovědi tohoto pozorování y_t^* (při informaci dostupné do okamžiku $t-1$ včetně). Hodnota "váhové" konstanty α rozhoduje o tom, které z obou uplatňujících se informací přisoudíme větší význam (resp. v jaké proporcii budeme tyto informace brát).

Opakovanou substitucí dostáváme ze vztahu (2) výraz

$$\hat{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) \alpha y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \hat{y}_{t-2} = \alpha y_t + \alpha (1 - \alpha) y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \hat{y}_{t-2}$$

$$\hat{y}_t = \alpha y_t + \alpha (1 - \alpha) y_{t-1} + (1 - \alpha)^3 \hat{y}_{t-3}$$

$$\hat{y}_t = \alpha y_t + \alpha (1 - \alpha) y_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2 y_{t-2} + (1 - \alpha)^3 \hat{y}_{t-3} \text{ atd., až po}$$

$$(3) \quad \hat{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) \alpha y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \alpha y_{t-2} + \dots + (1 - \alpha)^{n-1} \alpha y_{t-n+1} + (1 - \alpha)^n \hat{y}_{t-n}$$

Při dostatečně velkém n (teoreticky pro $n \rightarrow \infty$) dospějeme k nekonečnému součtu

$$(4) \quad \hat{y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha (1 - \alpha)^j \hat{y}_{t-j}, \text{ což je}$$

vlastně *aritmetický průměr* (o nekonečném počtu členů) „vyrovnaných hodnot“ s vahami ve tvaru (1).

Výraz (2) $\hat{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_{t-1}$, kde $\alpha = 1 - \beta$ je vyrovnávací konstanta

lze dále jednoduchou úpravou přepsat na tvar

$$\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} + \alpha (y_t - \hat{y}_{t-1}) = \hat{y}_{t-1} + \alpha (y_t - \hat{y}_{t-1}(t-1)) = \hat{y}_{t-1} + \alpha d_t,$$

který bývá nazýván jako chybový či korekční:

pro opravu předchozí vyrovnané hodnoty \hat{y}_{t-1} použijeme (jakmile dostaneme pozorování y_t) příslušně upravenou chybu předpovědi d_t o jeden krok dopředu (konstruovanou v čase $t-1$)

$$(2') \quad y_t^* = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha (1 - \alpha)^j y_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^n y_{t-1}^*, \text{ kde } d_{t-1}^* = y_{t-1}^* - \hat{y}_{t-1}$$

což lze interpretovat tak, že novou předpověď y_t^* pro y_t dostaneme jako součet

skutečné hodnoty pozorování y_t a určitého ($100 \times \alpha$) procentního podílu chyby předpovědi d_{t-1} téže veličiny y_t určené na základě informací známých jen do minulého období $t-1$ (predikce je sestavená toliko z hodnot y_1, \dots, y_{t-1}).

Důležitou otázkou je v tomto kontextu volby „vyrovnávací konstanty“, α : zpravidla se omezujeme na rozsah mezi (0,1 – 0,3). Někdy je však vyrovnávací konstanta pojímána jako doplněk α do 1, stanoví se tedy $\gamma \in [0,9; 0,7]$. Čím je hodnota γ blíže k 1 tím váhy přiřazované jednotlivým pozorováním směrem do minulosti klesají pomaleji.

O rychlosti klesání dává představu toto srovnání s konstantou γ :

k =	1	2	3	4	5	6	10
Srovnejme:	0,9	0,81	0,729	0,6561	0,59049	0,531441	0,34868
	0,8	0,64	0,512	0,4096	0,32768	0,262144	0,1342177
	0,7	0,49	0,343	0,2401	0,16807	0,117649	0,02709

Zatímco podíl vah u nejčerstvějších (nezpožděných) pozorování je $9/7 = 1,2857 : 1$, je u desátých pozorování (tj. se zpožděním 9) tento poměr již $0,3487 / 0,0282$ tj. $12,34/1$

,7	0,49	0,343	0,2401	0,16807	0,117649	0,082354	0,057648	0,040354	0,028248
0,9	0,81	0,729	0,6561	0,59049	0,531441	0,478297	0,430467	0,38742	0,348678

Přirozenou otázkou je, zda existují užitečná **vodítka pro určení konstanty α** :

a) Pravidla vyvozená ze statistických požadavků na odhady obecně:

a1) Jedna možnost vychází z volby vyrovnávací konstanty ze vztahu

(5)
$$\frac{I}{n} = \frac{I + \alpha}{I - \alpha}$$
 odkud pro dané n dostaneme
$$\alpha = \frac{n}{n+2}$$

a2) Další z možností vychází z variantního modelu (vyrovnání parabolou k -tého řádu), na základě kterého se volí α_0 tak, aby vyhovovalo vztahu

(6)
$$I - \alpha = \alpha^k$$
 α_k je tzv. ekvivalentní vyrovnávací konstanta.

a3) Ještě jiná možnost vychází z nejlépe vyrovnávacího (pozorované hodnoty časové řady) klouzavého průměru délky d . Pak se stanoví α jako

pro konstantní/jednoduché exponenciální vyrovnávání a stejně tak

(7A) pro dvojitě exponenciální vyrovnávání (klouzavý průměr)
$$\alpha = \frac{d-1}{d+1}$$

(7B) pro trojitě exponenciální vyrovnávání
$$\alpha = \sqrt{\frac{d-1}{d+1}}$$
, kde

d je délka (počet členů) nejlépe vyrovnávacího klouzavého průměru.

b) Simulační způsob: interval 0,7 - 1 se rozdělí např. na 30 úseků po 0,01, provedou se predikce na několik kroků dopředu, **spočte se průměrná nebo střední kvadratická chyba predikce a vyhledá se taková hodnota α , při které je tato chyba predikce nejmenší.**

Poznámka: Výpočtové vzorce (zejména *u trojitého exponenciálního vyrovnávání*) jsou již natolik (technicky) složité, že je uživatel zpravidla odkázán na některý ze softwarových produktů určených k analýze časových řad, které zpravidla všechny tři verze exponenciálního vyrovnávání obsahují. Proto je daleko vhodnější pořídit si příslušné software (*STATGRAPHICS, SPSS, RATS apod.*), než pracně počítat hodnoty vyrovnání a předpovědi (rekurentně) tabulkovými procesory, kalkulačkou nebo dokonce ručně.

Komparační zhodnocení: čím je vyrovnávací konstanta α vzdálenější od 1 (tedy blíže k nule), tím je vyrovnání flexibilnější a provedená následná predikce vykazuje vyšší rozkolísanost.

Podobný rys vykazuje také *trojité exponenciální vyrovnávání* ve srovnání s *dvojitým* a zejména vůči *jednoduchému*, které dává velmi rigidní předpovědi (tj. po částech konstantním trendem) .

1. Jednoduché (konstantní) exponenciální vyrovnávání

Formulace modelu je založena na představě, že pro dané pevné t a hodnoty zpoždění $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ lze uplatnit **konstantní trend** tvaru

$$(11) \quad Tr_{t,j} = \hat{y}_t = \beta_{t,j} \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, 3, \dots, \text{ kde}$$

$\beta_{t,0}$ je (jediný) neznámý parametr. Tato domněnka (o konstantnosti vývoje) není příliš realistická, avšak jednoduchost modelu (11) umožňuje přiblížit postup odhadu parametrů $\beta_{t,j}$ i u složitějších modelů.

Výchozím předpokladem modelu (11) je tedy trend ve tvaru po částech konstantní funkce.

Minimalizační kritérium má zde tvar

$$(12) \quad \text{Min}_{\beta_{t,0}} G(y, \beta_{t,j}, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j (y_{t-j} - \beta_{t,j})^2$$

ve kterém se uplatňuje trendový model tvaru $Tr_{tj} = \beta_{t,j}$ (tedy **konstantní trend**).

Odhad $\beta_{t,0}$ parametru $\beta_{t,0}$ realizovaný váženou metodou nejmenších čtverců (WLS) je pak dán vztahem

$$(13) \quad \beta_{t,0} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j}}{\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j}$$

ověření: Derivací výrazu (12) podle $\beta_{t,0}$ dostaneme:

$$(12A) \quad \frac{\partial (G(y, \beta_{t,j}, \alpha))}{\partial \beta_{t,0}} = \sum_{j=0}^{\infty} 2 \alpha^j (y_{t-j} - \beta_{t,0}) (-1) \alpha^j$$

Upravíme-li krácením $2(\alpha - 1)$ a položíme-li derivaci rovnou nule, dostaneme

$$(12A) \quad \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j} \alpha^j = \beta_{t,0} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j$$

Pak s využitím toho, že součet řady $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{1}{1-\alpha}$, obdržíme (13). \square

U tohoto typu mohou být vysloveny námitky, že model s konstantním trendem (11) je pro většinu reálných situací stěží použitelný, poněvadž trend časové řady se zpravidla vyvíjí jiným způsobem než po částech konstantní funkci.

(14) vyrovnání pro aktuální období ($\tau = j$): $\hat{y}_t = \beta_{t,0}$

(15) predikce na τ období dopředu ($\tau > j$): $\hat{y}_{t+\tau} = y_t$

Předpovídání hodnoty na libovolné období dopředu jsou tedy shodné s poslední pozorovanou hodnotou (je zřejmé, že tato zásada není vhodná pro situace, kdy časová řada vykazuje jakýkoliv znatelný trend).

Lze ještě užít tzv. **chybový vzorec**:

$$(14A) \quad \hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} + \alpha (y_t - \hat{y}_{t-1}) = \hat{y}_{t-1} + \alpha (y_t - \hat{y}_{t-1}) = \hat{y}_{t-1} + \alpha d_t$$

V případě **dvojitého a trojitého** exponenciálního vyrovnávání je užitečné definovat dvě tzv. "vyrovnávací statistiky" :

$$(16a) \quad S_t = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j}$$

$$(16b) \quad S_t^* = S_t + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j}$$

Pro tyto vyrovnávací statistiky platí následující rekurentní vztahy :

$$(17a) \quad S_t = (1 - \alpha) y_t + \alpha S_{t-1}$$

$$(17b) \quad S_t^* = (1 - \alpha) S_t^* + \alpha S_{t-1}^* + \alpha y_t$$

ověření (17a),(17b):

Levou stranu (17a) lze vyjádřit jako

$$S_t = (1 - \alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{j-1} y_{t-j+1} = (1 - \alpha) \alpha y_t + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} = (1 - \alpha) \alpha y_t + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} y_{t-k} = (1 - \alpha) \alpha y_t + \alpha S_{t-1}, \text{ přičemž } k = j - 1$$

Levou stranu (17b) lze vyjádřit jako

$$S_t^* = (1 - \alpha) S_t^* + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} j \alpha^{j-1} y_{t-j+1} = (1 - \alpha) S_t^* + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j} = (1 - \alpha) S_t^* + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha^{k-1} y_{t-k} = (1 - \alpha) S_t^* + \alpha S_{t-1}^* + \alpha y_t \quad \square$$

Výpočet těchto statistik se provádí rekurentně počínaje S_0, S_0^* .

Volba vyrovnávací konstanty α pro jednoduché exponenciální vyrovnávání: Omezujeme se zde zpravidla na interval $0 < \alpha \leq 0,3$ a podobně jako pro jednoduché se užívá

a) fixní volba $\alpha = 0,1$ nebo $\alpha = 0,2$.

b) volba $\alpha = \frac{1}{m+1}$, kde $d = 2m + 1$ je délka klouzavých průměrů adekvátní této řadě (odvozena z požadavku, aby tzv. **střední věk vah** jednoduchých klouzavých průměrů této délky, tj. $\sum_{k=0}^{2m} \frac{k}{2m+1}$ a střední věk vah jednoduchého exponenciálního

vyrovnávání, tj. $\sum_{k=0}^m k \cdot \alpha (1 - \alpha)^k$ byly shodné. Přístup ale není ideální, protože stejně musíme vyjít z vhodné délky klouzavého průměru.

c) Jako možné hodnoty α se vezmou hodnoty z intervalu $\alpha = 0,01, 0,02, \dots, 0,30$ a vybere se ta hodnota, která nejlépe predikuje ve smyslu minimální míry SSE.

100.(1-p) předpovědní interval pro jednoduché exponenciální vyrovnávání

V případě, že rozdělení náhodné složky uvažované řady je alespoň přibližně normální, lze v rámci exponenciálního vyrovnávání vedle bodových předpovědí konstruovat také předpovědní intervaly. Jako 100.(1-p) předpovědní interval pro jednoduché vyrovnávání se doporučuje konstruovat interval ve tvaru

$$\left[\hat{y}_{n+h}(n) - u_{1-p/2} \cdot d_\tau \cdot MAE, \hat{y}_{n+h}(n) + u_{1-p/2} \cdot d_\tau \cdot MAE \right], \text{ kde}$$

libovolné $\tau > 0$ je

$u_{1-p/2} \dots \Phi^{-1}(1-p/2)$ kvantil normovaného normálního rozdělení

d_τ definováno jako $d_\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,25$ sloužící k převodu MSE na MAE .

MAE je **střední absolutní chyba**, tedy $MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_t(t-1)|$

2. Dvojité (lineární) exponenciální vyrovnávání

Formulace modelu je založena na představě, že pro dané pevné t a hodnoty zpoždění $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ lze uplatnit lokálně **lineární trend** tvaru

$$(21) \quad Tr_{t,t-j} = \hat{y}_t = \beta_{t0} + \beta_{t1} \cdot j \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Minimalizační kritérium má v tomto případě tvar

$$(22) \quad \min_{\beta_{t0}, \beta_{t1}} G(y, \beta_{t0}, \beta_{t1}, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j |y_{t-j} - (\beta_{t0} + \beta_{t1} \cdot j)|^2$$

ve kterém se uplatňuje lineární trendový model tvaru $Tr_{t,t-j} = \beta_{t0} + j \cdot \beta_{t1}$.

Výchozím předpokladem modelu (22) je tedy trend ve tvaru po částech lineární funkce. V tomto případě jsou předmětem odhadu dva parametry b_{t0} - jako odhad β_{t0} - a b_{t1} - jako odhad parametru β_{t1} .

Odhad obou parametrů v (22) získáme řešením soustavy normálních rovnic

$$(25A) \quad b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha} b_{t1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \cdot y_{t-j}$$

$$(25B) \quad \alpha b_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} b_{t1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \cdot j \cdot y_{t-j}$$

ověření (25A), (25B): Derivací výrazu (22) podle β_{t0} dostaneme

$$(23A) \quad \frac{\partial G(y, \beta_{t0}, \beta_{t1}, \alpha)}{\partial \beta_{t0}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \cdot 2 \cdot (y_{t-j} - \beta_{t0} - \beta_{t1} \cdot j) \cdot (-1)$$

Podobně, derivací výrazu (22) podle β_{t1} dostaneme:

$$(23B) \quad \frac{\partial G(y, \beta_{t0}, \beta_{t1}, \alpha)}{\partial \beta_{t1}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \cdot 2 \cdot (y_{t-j} - \beta_{t0} - \beta_{t1} \cdot j) \cdot j$$

Upravíme-li (23A) a položíme-li příslušnou derivaci rovnou nule:

$$(24A) \quad 0 = \sum_{j=0}^{\infty} (y_{t-j} - b_{t0} + j \cdot b_{t1}) \cdot (-\alpha)^j, \text{ neboli}$$

$$(24A^*) \quad b_{t0} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j - b_{t1} \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j} \cdot \alpha^j$$

a s využitím toho, že součet řady $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{1}{1-\alpha}$ a součet řady $\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \alpha^{j-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$

$$\text{obdržíme} \quad b_{t0} \frac{1}{1-\alpha} - b_{t1} \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

a následně vynásobením $(1-\alpha)^2$ získáme (25A).

Krátíme-li (23B) výrazem $1 - \alpha$ a položíme-li levostrannou derivaci rovnou nule:

$$(24B) \quad 0 = \sum_{j=0}^{\infty} (y_{t-j} - \beta_{t,0} + \beta_{t,1} \cdot j \alpha^j) \cdot \alpha^j$$

Výrazy s neznámými $\beta_{t,0}, \beta_{t,1}$ přemístíme v rovnici nalevo

$$(24B^*) \quad \beta_{t,0} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j - \beta_{t,1} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j}$$

a s využitím toho, že součty řad $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{1}{1-\alpha}$, $\sum_{j=1}^{\infty} j \alpha^j = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$

$$\text{máme} \quad \beta_{t,0} \frac{1}{1-\alpha} - \beta_{t,1} \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j}, \text{ což}$$

po vynásobení $(1-\alpha)^2$ dává (25B). □.

Máme tedy soustavu dvou *normálních* rovnic pro výpočet parametrů $b_{t,0}, b_{t,1}$

$$(25A) \quad b_{t,0} - \frac{\alpha}{1-\alpha} b_{t,1} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j}$$

$$(25B) \quad \alpha b_{t,0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} b_{t,1} = \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j}$$

kteřou můžeme vyjádřit v maticovém tvaru

$$(26) \quad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{1-\alpha} \\ \alpha & -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{t,0} \\ b_{t,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} \\ \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j} \end{pmatrix}, \text{ takže}$$

$$(27) \quad \begin{pmatrix} b_{t,0} \\ b_{t,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{1-\alpha} \\ \alpha & -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} \\ \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j} \end{pmatrix}, \text{ kde}$$

determinant matice soustavy (27) je roven $\frac{-\alpha(1+\alpha) + \alpha}{1-\alpha} = \frac{-\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Takže

$$(28) \quad \begin{pmatrix} b_{t,0} \\ b_{t,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha-1} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} & \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} \\ \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j} \end{pmatrix}$$

$$(28) \quad \begin{pmatrix} b_{t,0} \\ b_{t,1} \end{pmatrix} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} & -1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} \\ \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j} \end{pmatrix}$$

$$(29) \quad \begin{pmatrix} b_{t0} \\ b_{t1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -1 \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \\ -\alpha \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} \end{pmatrix}$$

Odtud máme pro oba parametry výsledné výrazy

$$b_{t0} = (1 + \alpha) \left(-\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right) - \left(-\alpha \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} \right) \quad \text{neboli}$$

$$(30A) \quad b_{t0} = \left(-\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right) - \left(-\alpha \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} \right) \quad \mathbf{a}$$

$$(30B) \quad b_{t1} = (\alpha - 1) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - \frac{-\alpha \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j}}{\alpha}$$

Pokud pracujeme s konečným počtem pozorování, má odpovídající soustava normálních rovnic tento tvar:

$$(41A) \quad b_{t0} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j - b_{t1} \sum_{j=0}^{n-1} j \alpha^j = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

$$(41B) \quad -b_{t0} \sum_{j=0}^{n-1} j \alpha^j + b_{t1} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \alpha^j = - \sum_{j=0}^{n-1} j \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

Její řešení dostaneme odhady parametrů ve tvaru

$$(42A) \quad b_{t0} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \cdot y_{t-j} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \alpha^j - \sum_{j=0}^{n-1} j \alpha^j \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j \alpha^j \cdot y_{t-j}}{\left[\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \alpha^j - \left[\sum_{j=0}^{n-1} j \alpha^j \right]^2 \right]}$$

$$(42B) \quad b_{t1} = \frac{- \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j \alpha^j \cdot y_{t-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \cdot y_{t-j} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j \alpha^j}{\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \alpha^j - \left[\sum_{j=0}^{n-1} j \alpha^j \right]^2}$$

Vyčíslíme výrazy bez „ypsilonových„ členů s využitím toho, že platí dle

$$(61) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{1}{1-\alpha}, \quad (62) \quad \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}, \quad (63) \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \alpha^j = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$$

Výraz ve jmenovateli (42A), (42B) je rovný

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha^j - \left[\sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \right]^2 = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} - \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^4} = \frac{\alpha + \alpha^2 - \alpha^2}{(1-\alpha)^4} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^4}$$

Potom dle (42A)

$$b_{t0} = \frac{\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j}}{\frac{\alpha}{(1-\alpha)^4}}$$

$$b_{t0} = \frac{\alpha(1+\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j}}{\alpha}$$

$$b_{t0} = (1+\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

$$b_{t0} = (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

O.K.

a podle (42B)

$$b_{t1} = \frac{-\frac{1}{1-x} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} + \frac{\alpha}{1-x} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j}}{\alpha}$$

$$b_{t1} = -\frac{-\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} + \frac{-\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \quad \text{O.K.}$$

Ta je srovnatelná s (25A), (25B), protože pokud n je dostatečně velké, lze nahradit

$$(36A) \quad b_{t0} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j - b_{t1} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

$$(36B) \quad -b_{t0} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j + b_{t1} \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha^j = - \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} \quad \text{tj.}$$

$$(37A) \quad b_{t0} \frac{1}{1-\alpha} - b_{t1} \frac{\alpha}{1-\alpha^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

$$(37B) \quad -b_{t0} \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + b_{t1} \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha^3} = - \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j}, \text{ což po vynásobení}$$

první rovnice $(1-x)^{-1}$ a druhé rovnice $-x(1-x)^{-2}$ dává přesně

$$(25A) \quad b_{t0} \frac{1}{1-\alpha} - b_{t1} \frac{\alpha}{1-\alpha^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

$$(25B) \quad \alpha b_{t0} \frac{1}{1-\alpha^2} - b_{t1} \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha^3} = - \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} \quad \square.$$

Zavedeme-li pomocné veličiny

$$(51a) \quad S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \cdot y_{n-j}$$

$$(51b) \quad S_n^* = \sum_{j=0}^{n-1} j \alpha^j \cdot y_{n-j}, \text{ nebo též } S_n^{[2]} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot S_{t-j}$$

lze zapsat výsledné odhady parametrů b_{t0}, b_{t1} také jako

$$(26A) \quad b_{t0} = 2 \cdot S_t - S_t^*$$

$$(26B) \quad b_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} (S_t - S_t^*)$$

přímé (alternativní) ověření výpočtu parametrů ze soustavy (25A), (25B):

(25A)
$$b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha} b_{t1} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

(25B)
$$\alpha b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha} b_{t1} = \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

Vyděme z (25A), (25B) a vyjádříme z obou těchto vztahů b_{t1} :

(31A)
$$\frac{1-\alpha}{\alpha} \left(b_{t0} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right) = b_{t1}$$

(31B)
$$\frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\alpha b_{t0} - \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} \right) = b_{t1}$$

Porovnáme obě strany a máme

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} \left(b_{t0} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right) = \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\alpha b_{t0} - \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} \right)$$

$$\left(b_{t0} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right) = \left(\alpha b_{t0} - \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} \right), \text{ odečteme}$$

$$b_{t0} + \left(- \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right) = \left(- \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} \right),$$

$$b_{t0} = \left(- \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} \right) - \left(- \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right)$$

$$b_{t0} = - \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

O.K.

a dále podle (31A):
$$b_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(b_{t0} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right)$$

tedy
$$b_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(- \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right)$$

pak
$$b_{t1} = - \frac{1-\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right)$$

po úpravě
$$b_{t1} = - \frac{1-\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} + \left[\frac{1-\alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right]$$

$$b_{t1} = - \frac{1-\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} + \left[\frac{1-\alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} \right]$$

$$b_{t1} = -\frac{(-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} + \left[\frac{-\alpha}{\alpha} + \alpha \right] \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

$$b_{t1} = -\frac{(-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} + \left[\frac{-\alpha}{\alpha} + \alpha + 1 \right] \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j}, \quad \text{až dospějeme}$$

k výslednému tvaru $b_{t1} = -\frac{(-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} + \left[\frac{-\alpha}{\alpha} + \alpha + 2 \right] \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j}$ O.K.

Máme dostat

$$b_{t0} = 2 \cdot S_t - S_t^k$$

tj.

$$b_{t0} = 2 \left[\frac{-\alpha}{\alpha} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - \left[\frac{-\alpha}{\alpha} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot S_{t-j}$$

vyrovnání pro aktuální období $\tau = 0$:

(24)

$$y_t^* = 2 \cdot S_t - S_t^k$$

predikce na τ období dopředu $\tau > 0$ je dána vztahy

(25)

$$y_{t+\tau}^* = b_{t0} + b_{t0} \cdot \tau \quad \text{neboli}$$

(25a)

$$y_{t+\tau}^* = \left[2 + \frac{\tau(-\alpha)}{\alpha} \right] S_t - \left[2 + \frac{\tau(-\alpha)}{\alpha} \right] S_t^k$$

Model dvojitého exponenciálního vyrovnávání (21) je pro řadu situací dobrým predikčním nástrojem, pokud se při volbě vyrovnávací konstanty řídíme některým z výše uvedených pravidel.

Při výpočtu statistik S_t, S_t^k postupujeme rekurentně, přičemž jejich počáteční hodnoty pro $\tau = 0$ získáme ze vztahů :

(26A)

$$S_0 = b_{00} - \frac{\alpha}{1-\alpha} b_{01}$$

(26B)

$$S_0^k = b_{00} - \frac{2\alpha}{1-\alpha} b_{01}$$

Počáteční hodnoty odhadů b_{00}, b_{01} získáme prostou lineární regresí tak, že několik (cca 6-10) počátečních pozorování řady proložíme regresní přímkou. b_{00} je příslušná úroňová konstanta, b_{01} je parametr sklonu regresní přímky.

(22)

$$\text{Min} \left[\frac{-\alpha}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \left[-\beta_{t0} + \beta_{t1} \left(\frac{-\alpha}{\alpha} \right)^j \right] \right]$$

β_{t0}, β_{t1}

Derivací výrazu (22) podle β_{t1} a jeho anulováním dostaneme:

$$2 \left[\frac{-\alpha}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \left[-\beta_{t0} + \beta_{t1} \left(\frac{-\alpha}{\alpha} \right)^j \right] \right] = 0 \quad \text{krátíme výrazem } 2 \left[\frac{-\alpha}{\alpha} \right]$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j} - \beta_{i0} + \beta_{i1} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \beta_{i0} + \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha^j \beta_{i1} = 0$$

□.

Výrazy s neznámými β_{i0}, β_{i1} přemístíme nalevo

$$-\beta_{i0} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j + \beta_{i1} \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j} \quad \text{což zapíšeme jako}$$

$$\beta_{i1} \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha^j - \beta_{i0} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j}$$

Protože dle (52) $\sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$, u neznámé β_{i0} máme člen $\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

Dále dle (53) $\sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha^j = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$ u neznámé β_{i1} máme

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha^j = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha^{j-1} = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (j-1) \alpha^{j-1} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{j-1} = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (j-1) \alpha^{j-1} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{j-1}$$

Tedy $\sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha^j = \alpha \left(\frac{2}{(1-\alpha)^3} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right) = \frac{2\alpha + \alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^3} = \frac{\alpha + \alpha^2}{(1-\alpha)^3}$

$$\beta_{i1} \cdot \frac{\alpha + \alpha^2}{(1-\alpha)^3} - \beta_{i0} \cdot \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j y_{t-j} \quad (12B) \quad \alpha \beta_{i0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} \beta_{i1} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j j \cdot y_{t-j}$$

Volba vyrovnávací konstanty α : omezujeme se zde zpravidla na interval $0 < \alpha \leq 0,3$ a podobně jako pro jednoduché se užívá

- a) fixní volba $\alpha = \sqrt{\frac{1}{m+1}}$, kde $d = 2m + 1$ je délka klouzavých průměrů adekvátní
- b) pro danou řadu (vyplývá opět z porovnání středních věk u jednoduchých klouzavých průměrů a vah dvojitého exp. vyrovnávání).
- c) Jako vhodné hodnoty α se vyšetří hodnoty z intervalu $\alpha = 0,01, 0,02, \dots, 0,30$ a vybere se ta hodnota, která nejlépe predikuje ve smyslu míry SSE.

Jako $100 \cdot (1-p)$ **předpovědní interval** se doporučuje konstruovat ve tvaru

$$\hat{y}_{n+\cdot(n)-} \pm t_{1-p/2, d\tau} MAE \quad ; \quad \hat{y}_{n+\cdot(n)+} \pm t_{1-p/2, d\tau} MAE$$

libovolné $\tau > 0$ je d_τ definováno jako

$$d_\tau = 1,25 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} + 2 \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} + 2 \frac{\alpha}{(1-\alpha)^3} \tau + 2 \frac{\alpha}{(1-\alpha)^4} \tau^2}{1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} + 2 \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} + 2 \frac{\alpha}{(1-\alpha)^3}}}$$

alternativní odvození odhadu parametrů z (25A) , (25B) :

$$(25A) \quad b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha} b_{t1} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j}$$

$$(25B) \quad \alpha b_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} b_{t1} = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j}$$

z (25A) máme

$$b_{t0} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} + \frac{\alpha}{1-\alpha} b_{t1}$$

z (25B) máme

$$b_{t0} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j}}{\alpha} + \frac{1+\alpha}{1-\alpha} b_{t1}$$

komparací

$$\frac{\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j}}{\alpha} + \frac{1+\alpha}{1-\alpha} b_{t1} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} + \frac{\alpha}{1-\alpha} b_{t1}$$

po úpravě

$$\frac{\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j}}{\alpha} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} + \alpha b_{t1}$$

Odečtením

výrazu αb_{t1} od obou stran dostaneme

$$b_{t1} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} - \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j}}{\alpha}$$

$$b_{t1} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} \right) - \left(\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j} \right)$$

$$b_{t1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha^j - j\alpha^j \right) y_{t-j}$$

Dále využijeme (25A)

$$b_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(b_{t0} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} \right)$$

$$b_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} \right)$$

$$b_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j} \right) - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j}$$

$$b_{t1} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} - \frac{1-\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} \right)$$

$$b_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} - \frac{1-\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j}$$

$$b_{t1} = \frac{1-3\alpha+3\alpha-\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} - \frac{1-2\alpha+\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j}$$

$$b_{t1} = \frac{-\alpha + 2\alpha - \alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - \frac{-\alpha^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

$$b_{t1} = \frac{-1 + 2\alpha - \alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - \frac{-\alpha^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

$$b_{t1} = - \frac{-\alpha^2}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - \frac{-\alpha^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j}$$

$$b_{t1} = - \frac{-\alpha^2}{\alpha} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \cdot y_{t-j} - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j \cdot y_{t-j} \right]$$

3. Trojité (kvadratické) exponenciální vyrovnávání

je třetím užívaným typem exponenciálního vyrovnávání, které se uplatňuje především u časových řad vyznačujících se ve svém dosavadním vývoji úseky se zřetelnou akcelerací nebo naopak decelerací průběhu v čase.

Minimalizační kritérium má u toho typu vyrovnání tvar

$$(51) \quad \text{Min} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha \left[y_{t-j} - \beta_{t0} + \beta_{t1} \left(\frac{j}{t} \right) + \beta_{t2} \left(\frac{j}{t} \right)^2 \right]^2$$

ve kterém se uplatňuje **trendový model tvaru**

$$(52) \quad y_{t-j}^* = \beta_{t0} - j \cdot \beta_{t1} + j^2 \beta_{t2}$$

Zde máme co do činění již se třemi konstantami $\beta_{t0}, \beta_{t1}, \beta_{t2}$ coby s odhady trojice neznámých parametrů kvadratické funkce $\beta_{t0}, \beta_{t1}, \beta_{t2}$.

Odhady těchto parametrů se opět obdrží vyvozením ze soustavy (tří) normálních rovnic. Ve výrazech se tentokrát uplatňují již tři vyrovnávací statistiky :

jednoduchá vyrovnávací statistika $S_t = \alpha y_t + \alpha S_{t-1}$

dvojitá vyrovnávací statistika

$$(53) \quad S_t^{(2)} = \alpha y_t + \alpha S_t + \alpha S_{t-1}$$

s vlastností

$$S_t^{(2)} = \alpha y_t + \alpha S_t + \alpha S_{t-1}$$

trojitá vyrovnávací statistika

$$S_t^{(3)} = \alpha y_t + \alpha S_t^{(2)} + \alpha S_{t-1}^{(2)}$$

Pomocí nich se dají vyjádřit jak vyrovnané, tak předpovídané hodnoty :

vyrovnání pro aktuální období ($\tau = 0$):

$$(54) \quad y_t^* = 3 \cdot S_t - 3 \cdot S_{t-1} + S_{t-2}$$

predikce na τ období dopředu ($\tau > 0$):

$$(55) \quad y_{t+\tau}^* = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \begin{aligned} & \left[\alpha + \alpha + 5\alpha \left(\frac{\tau}{t} \right) + \alpha \left(\frac{\tau}{t} \right)^2 \right] S_t \\ & - \left[6\alpha + 2\alpha \left(\frac{\tau}{t} \right) + 4\alpha \left(\frac{\tau}{t} \right)^2 \right] S_{t-1} \\ & + \left[\alpha + \alpha + 3\alpha \left(\frac{\tau}{t} \right) + \alpha \left(\frac{\tau}{t} \right)^2 \right] S_{t-2} \end{aligned} \right\}$$

Predikce pomocí trojitého exponenciálního vyrovnání jsou (zejména při nízké volbě konstanty α - tj. blízké 0,7) značně citlivé na chování posledních 2-3 pozorovaných hodnot řady. Vykazují-li tato pozorování zřetelný odklon oproti předchozímu průběhu časové řady, poskytne kvadratické vyrovnání zpravidla nepoužitelné předpovědi (tyto se vychylují buď příliš nahoru nebo příliš dolů podle směru vychýlení právě posledních nejčerstvějších pozorování).

Při určování počátečních odhadů b_{00}, b_{01}, b_{02} se v tomto případě doporučuje volit delší úsek (až 1/2 počtu všech pozorování). Vyrovnání se zde provádí (pomocí **prosté metody nejmenších čtverců**) kvadratickým trendem.

Odvození normálních rovnic pro trojitě exponenciální vyrovnávání:

Derivací výrazu (51) podle $\beta_{t,0}$ a jeho anulováním dostaneme:

$$-\alpha \sum_{j=1}^{\infty} y_{t-j} - \beta_{t,0} + \beta_{t,1} \sum_{j=1}^{\infty} y_{t-j} + \beta_{t,2} \sum_{j=1}^{\infty} y_{t-j}^2 \alpha^j = 0 \quad \text{neboli}$$

(56A)

$$\sum_{j=1}^{\infty} y_{t-j} \alpha - \beta_{t,0} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha + \beta_{t,1} \sum_{j=1}^{\infty} y_{t-j} \alpha - \beta_{t,2} \sum_{j=1}^{\infty} y_{t-j}^2 \alpha^2 = 0$$

Derivací výrazu (31) podle $\beta_{t,1}$ a jeho anulováním dostaneme:

$$-\alpha \sum_{j=1}^{\infty} j y_{t-j} - \beta_{t,0} + \beta_{t,1} \sum_{j=1}^{\infty} y_{t-j} + \beta_{t,2} \sum_{j=1}^{\infty} j y_{t-j} \alpha^j = 0 \quad \text{neboli}$$

(56B)

$$\sum_{j=1}^{\infty} j y_{t-j} \alpha - \beta_{t,0} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha + \beta_{t,1} \sum_{j=1}^{\infty} y_{t-j} \alpha - \beta_{t,2} \sum_{j=1}^{\infty} j y_{t-j} \alpha^2 = 0$$

Derivací výrazu (31) podle $\beta_{t,2}$ a jeho anulováním dostaneme:

$$-\alpha \sum_{j=1}^{\infty} j^2 y_{t-j} - \beta_{t,0} + \beta_{t,1} \sum_{j=1}^{\infty} j y_{t-j} + \beta_{t,2} \sum_{j=1}^{\infty} j^2 y_{t-j} \alpha^j = 0 \quad \text{neboli}$$

(56C)

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2 y_{t-j} \alpha - \beta_{t,0} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha + \beta_{t,1} \sum_{j=1}^{\infty} j y_{t-j} \alpha - \beta_{t,2} \sum_{j=1}^{\infty} j^2 y_{t-j} \alpha^2 = 0$$

(56A) upravíme na

$$\beta_{t,0} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha - \beta_{t,1} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha + \beta_{t,2} \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j} \alpha^j$$

Po vyčíslení sumací máme

$$\beta_{t,0} \frac{1}{1-\alpha} - \beta_{t,1} \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta_{t,2} \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j} \alpha^j$$

(56B) upravíme na

$$\beta_{t,0} \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha + \beta_{t,1} \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha - \beta_{t,2} \sum_{j=0}^{\infty} j^3 \alpha = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j} j \alpha^j$$

Po vyčíslení sumací máme

$$\beta_{t,0} \frac{\alpha}{1-\alpha} + \beta_{t,1} \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} - \beta_{t,2} \sum_{j=0}^{\infty} j^3 \alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j} j \alpha^j$$

(56C) upravíme na

$$\beta_{t,0} \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha + \beta_{t,1} \sum_{j=0}^{\infty} j^3 \alpha - \beta_{t,2} \sum_{j=0}^{\infty} j^4 \alpha = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j} j^2 \alpha^j$$

Po vyčíslení sumací máme

$$\beta_{t,0} \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} + \beta_{t,1} \sum_{j=0}^{\infty} j^3 \alpha - \beta_{t,2} \sum_{j=0}^{\infty} j^4 \alpha = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j} j^2 \alpha^j$$

Dostáváme tedy soustavu tří normálních rovnic k výpočtu parametrů $\beta_{t,0}, \beta_{t,1}, \beta_{t,2}$:

$$(57) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha} & \frac{\alpha}{1-\alpha^2} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha^3} \\ \frac{\alpha}{1-\alpha^2} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha^3} & \frac{\alpha+4\alpha+\alpha}{1-\alpha^4} \\ \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha^3} & \frac{\alpha+4\alpha+\alpha}{1-\alpha^4} & h\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j}\alpha \\ \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot y_{t-j}\alpha \\ \sum_{j=0}^{\infty} j^2 y_{t-j}\alpha \end{pmatrix}$$

z níž by byly hledané parametry získatelné vztahem (58)

$$\begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha} & \frac{\alpha}{1-\alpha^2} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha^3} \\ \frac{\alpha}{1-\alpha^2} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha^3} & \frac{\alpha+4\alpha+\alpha}{1-\alpha^4} \\ \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha^3} & \frac{\alpha+4\alpha+\alpha}{1-\alpha^4} & h\alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j}\alpha \\ \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot y_{t-j}\alpha \\ \sum_{j=0}^{\infty} j^2 y_{t-j}\alpha \end{pmatrix} \quad \text{Je}$$

nicméně zřejmé, že i když principiálně takto parametry $\beta_{i,0}, \beta_{i,1}, \beta_{i,2}$ získáme, budou příslušné tři vzorce již silně nepřehledné.

Poznámka: Při výpočtech součtů konvergentních nekonečných řad, které se vyskytují v *normálních rovnicích* u různých verzí exponenciálního vyrovňování, lze užitečně uplatnit poznatky odvozené z teorie mocninných řad.

Máme-li pro argument $0 < z < 1$ definovanou funkci resp. mocninnou řadu

$$(61) \quad F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}, \text{ pak}$$

výpočet derivací této funkce (do čtvrté derivace včetně) vede k těmto výsledkům:

$$(62) \quad F'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot z^{j-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$(63) \quad F''(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)z^{j-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$(64) \quad F'''(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)(j-2)z^{j-3} = \frac{6}{(1-z)^4}$$

$$(65) \quad F^{(4)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)(j-2)(j-3)z^{j-4} = \frac{24}{(1-z)^5}$$

Všimněme si, že sumace derivovaných prvků mocninné řady (výrazy v součtech v (61,62,63,64)) se získají velmi prostým způsobem tím, že derivujeme funkci $F(z)$. Platí to pro první, druhou i třetí (případně i vyšší) derivaci.

Vzme-li za argument z vyrovnávací konstantu α - to je přípustné, neboť její hodnoty rovněž leží v intervalu $(0,1)$ - dostaneme :

$$(71) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots = \frac{1}{1-\alpha},$$

$$(72) \quad \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha^j = 0 \cdot 1 + 1\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \dots = \alpha \left(1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \dots \right) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2},$$

$$(73) \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \alpha^j = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} \text{ což vypočteme z rozvoje}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2 \alpha^j = x \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \alpha^{j-1} = x \left[\sum_{j=1}^{\infty} j(j-1) \alpha^{j-2} + \sum_{j=1}^{\infty} j \alpha^{j-2} \right] = x \left[\sum_{j=1}^{\infty} j(j-1) \alpha^{j-2} + x \sum_{j=1}^{\infty} j \alpha^{j-2} \right]$$

$$\alpha \left[\frac{2}{(1-\alpha)^3} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right] = \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^3} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha(2 + 1-\alpha)}{(1-\alpha)^3} = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$$

Dále máme ještě

$$(74) \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^3 \alpha^j = \frac{6\alpha^2 + 3\alpha - 3\alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha - 2\alpha}{(1-\alpha)^4} = \frac{\alpha(6\alpha + 3\alpha - 3\alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha - 2\alpha)}{(1-\alpha)^4} = \frac{\alpha(6\alpha + 3\alpha - 3\alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha - 2\alpha)}{(1-\alpha)^4}$$

odvození (74):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} j^3 \alpha^j &= \alpha \sum_{j=1}^{\infty} j^3 \alpha^{j-3} = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} [j(j-1)(j-2) \alpha^{j-3} + 3j^2 \alpha^{j-3} - 2j \alpha^{j-3}] = \\ &= \alpha \left[\sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)(j-2) \alpha^{j-3} + 3 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \alpha^{j-3} - 2 \sum_{j=1}^{\infty} j \alpha^{j-3} \right] \end{aligned}$$

Tedy
$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3 \alpha^j = \alpha \sum_{j=3}^{\infty} j(j-1)(j-2) \alpha^{j-3} + 3 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \alpha^j - 2 \sum_{j=1}^{\infty} j \alpha^j$$

S využitím (62), (62) a (63) dostaneme

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3 \alpha^j = \alpha \left[\frac{6}{(-x)^4} + 3 \frac{\alpha(1+x)}{(-x)^3} - 2 \frac{\alpha}{(-x)^2} \right] = \frac{6\alpha}{(-x)^4} + 3 \frac{\alpha(1+x)(-x)}{(-x)^4} - \frac{2\alpha(-x)^2}{(-x)^4}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3 \alpha^j = \frac{6\alpha + 3\alpha(-x) - 2\alpha(-2\alpha+x)}{(-x)^4} = \frac{6\alpha + 3\alpha - 3\alpha - 2\alpha + 4\alpha^2 - 2\alpha}{(-x)^4}$$

až konečně máme (74)
$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3 \alpha^j = \frac{\alpha + \alpha^2 + \alpha^3}{(-x)^4} \quad \square$$

Uvedené vztahy se aktivně uplatňují při výpočtu výrazů, které vedou v jednotlivých typech exponenciálního vyrovnávání k určení odhadů parametrů b_{i0}, b_{i1}, b_{i2} .

Pokusme se ještě spočítat

(75)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} j^4 \alpha^j &= \alpha \sum_{j=1}^{\infty} j^4 \alpha^{j-4} = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} [j(j-1)(j-2)(j-3) \alpha^{j-4} + 6j^3 \alpha^{j-4} - 11j^2 \alpha^{j-4} + 6j \alpha^{j-4}] = \\ &= \alpha \left[\sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)(j-2)(j-3) \alpha^{j-4} + 6 \sum_{j=1}^{\infty} j^3 \alpha^{j-4} - 11 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \alpha^{j-4} + 6 \sum_{j=1}^{\infty} j \alpha^{j-4} \right] \end{aligned}$$

$$= \alpha \left[\sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)(j-2)(j-3) \alpha^{j-4} + 6 \sum_{j=1}^{\infty} j^3 \alpha^j - 11 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \alpha^j + 6 \sum_{j=1}^{\infty} j \alpha^j \right]$$

$$= \alpha \left[\frac{24}{(-x)^4} + 5 \frac{\alpha(1+4\alpha+x)}{(-x)^3} - 1 \frac{\alpha(1+x)}{(-x)^2} + 5 \frac{\alpha}{(-x)^2} \right]$$

$$= \alpha \left[\frac{24}{(-x)^4} + 5 \frac{(-x)\alpha + 4\alpha + x}{(-x)^3} - 1 \frac{\alpha(1+x)(-x)}{(-x)^4} + 5 \frac{\alpha(-x)^2}{(-x)^4} \right]$$

$$= \frac{1}{(-x)^4} \left[\alpha + 5\alpha(-x)\alpha + 4\alpha + x - \alpha(1+x)(-x) + 5\alpha(-x)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{(-x)^4} \left[\alpha + 5\alpha^2 + 4\alpha + x - x\alpha + 4\alpha + x - \alpha(1+x)(-x) + 5\alpha(-3\alpha + 3\alpha - x) \right]$$

$$= \frac{1}{(-x)^4} \left[\alpha + 5\alpha^2 + 24\alpha + 5\alpha - x - 4\alpha - x - \alpha(1+x)(-x) + 5\alpha(-8\alpha + 8\alpha - 5\alpha) \right]$$

$$= \frac{1}{(-x)^4} \left[\alpha + 23\alpha^2 + 5\alpha - \alpha(1+x)(-x) - 22\alpha - 22\alpha + 11\alpha + 11\alpha + 5\alpha(-8\alpha + 8\alpha - 5\alpha) \right]$$

$$= \frac{1}{(-x)^3} \{ 10\alpha + 5\alpha + 2\alpha - 1\alpha - 1\alpha + 22\alpha + 22\alpha - 1\alpha - 1\alpha - 5\alpha \}$$

$$= \frac{1}{(-\alpha)^3} \{ -7\alpha + 33\alpha + 6\alpha + \alpha \} = \frac{\alpha}{(-\alpha)^3} \{ -7\alpha + 33\alpha + 6\alpha + \alpha \}$$

Tedy (76)

$$h'(\alpha) = \frac{\alpha}{(-\alpha)^3} \{ -7\alpha + 33\alpha + 6\alpha + \alpha \}$$

Holtova vyrovnávací metoda²

Jistým zobecněním dvojitého exponenciálního vyrovnávání je tzv. **Holtova metoda**, ve které se uplatňují dvě vyrovnávací konstanty $0 < \alpha, \gamma < 1$

α pro vyrovnání úrovně L_t

γ pro vyrovnání směrnice T_t téže řady

$$(81) \quad L_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) L_{t-1} + \gamma T_{t-1}$$

Vyhlazení úrovně je tedy definováno jako konvexní kombinace poslední pozorované hodnoty v čase t a odhadu této hodnoty vzatého v předchozím čase $t-1$.

$$(82) \quad T_t = \gamma (L_t - L_{t-1}) + (1 - \gamma) T_{t-1}$$

Pro vyrovnání, resp. predikci zde platí předpisy:

$$(83) \quad \hat{y}_t = L_t$$

$$(84) \quad \hat{y}_{t+\tau}(t) = L_t + T_t \cdot \tau \quad \text{pro } \tau > 0$$

Jako volby počátečních hodnot se doporučují:

$$(85A) \quad L_0 = y_1$$

$$(85B) \quad T_0 = y_2 - y_1$$

Za pozornost stojí, že **Holtova metoda** byla nejprve navržena jako *ad hoc* postup na základě prosté logické úvahy. Teprve později bylo prokázáno, že **Brownovo dvojité exponenciální vyrovnávání** se zvolenou vyrovnávací konstantou α je speciálním případem **Holtovy metody**, jejíž vyrovnávací konstanty jsou pak

$$(86) \quad \alpha_H = \alpha_B \frac{2 - \alpha_B}{2}, \quad \gamma_H = \frac{\alpha_B}{2 - \alpha_B}$$

Za pozornost stojí, že **Holtova metoda** byla nejprve navržena jako *ad hoc* postup na základě prosté logické úvahy. Teprve později bylo prokázáno, že **Brownovo dvojité exponenciální vyrovnávání** se zvolenou vyrovnávací konstantou α je speciálním případem **Holtovy metody**, jejíž vyrovnávací konstanty jsou pak

$$\alpha_B = 0,1 \quad , \quad \text{potom} \quad \alpha_H = 0,1 \frac{2 - 0,1}{2} = 0,19 \quad \gamma_H = \frac{0,1}{2 - 0,1} = \frac{0,1}{1,9} = 0,0527$$

$$\alpha_B = 0,2 \quad , \quad \text{pak} \quad \alpha_H = 0,2 \frac{2 - 0,2}{2} = 0,36 \quad \gamma_H = \frac{0,2}{2 - 0,2} = \frac{0,2}{1,8} = 0,111111$$

$$\alpha_B = 0,3 \quad , \quad \text{odtud} \quad \alpha_H = 0,3 \frac{2 - 0,3}{2} = 0,51 \quad \gamma_H = \frac{0,3}{2 - 0,3} = \frac{0,3}{1,7} = 0,17647$$

² Postup je popsán v textu: Holt, C.,C: Forecasting seasonal and trends by exponentially weighted moving averages . Res. mem. No 52. Carnegie Institute of Technology. Pittsburg 1957.