Metoda klouzavých průměrů

Patří (spolu s *metodou exponenciálního vyrovnávání*) k adaptivním přístupům při analýze trendové složky. Tyto přístupy pracují se systematickými složkami (např. trendem), které v průběhu plynutí času mění svůj globální charakter, což mj. znamená, že pro ně nelze použít žádnou matematickou křivku s neměnnými (v čase) **parametry. Na druhé straně se předpokládá, že takovéto vyrovnání je možné lokálně (v krátkých úsecích řady), přičemž parametry tohoto – lokálního -vyrovnání budou v jednotlivých úsecích odlišené. V těchto případech se omezujeme pouze na lokální vyrovnávání (či jeho odstranění) trendu.**

Nelze –li tedy vyrovnat časovou řadu pomocí paraboly 2.stupně

(2.1) $$Tr_{\tau} = \beta_0 + \beta_1.\tau + \beta_2.\tau^2 \qquad \tau = 1,2,\dots,n \ ,$$

omezíme se na vyrovnání v krátkých úsecích, pro jejichž středy v časových bodech *t* lze použít vyrovnání pomocí lokálních trendů

(2.2) $$Tr(t,\tau) = \beta_0(t) + \beta_1(t).\tau + \beta_2(t).\tau^2 \qquad \tau = t-2, t-1, t, t+1, t+2 \ .$$

Proces eliminace trendové složky se tedy adaptuje vůči okamžitému lokálnímu průběhu řady. Stupeň tohoto přizpůsobování lze (za jistých okolností) **vědomě řídit.**

Další výhodou adaptivních technik je konstrukce předpovědí, které mohou pružně reagovat na časové změny v charakteru řady a někdy také **výpočetní nenáročnost.**

Název *klouzavý průměr* [moving average] je spojen s lineární kombinací členů původní řady s jednotkových součtem koeficientů/vah , např. typu

(2.3) $$\frac{1}{10}\left(y_{t-2} + 2y_{t-1} + 4y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2,}\right) ,$$

někdy se zkráceným zápisem (jako operátor) $\frac{1}{10}[1,2,4,2,1]$

Vytváření takových konečných kombinací hodnot řady je totiž ekvivalentní právě s lokálním vyrovnáváním řady určitými matematickými křivkami.

Jde o postup, který může být využit k identifikaci dvou složek časové řady :

- trendové složky

- sezónní složky

Obecněji můžeme zapsat *klouzavý průměr* jako

(2.4) $$\left(w_{t-m}y_{t-m} + w_{t-m+1}y_{t-m+1}\dots\dots + w_t y_t\dots\dots\dots + + w_{t+m+1}y_{t+m-1} + w_{t+m}y_{t+m,}\right)$$

Číslo *m* nazveme *poloměrem*, hodnotu $p = 2m + 1$ ***délkou klouzavého průměru*.**

Z hlediska praktických účelů je vhodnější lichý počet členů průměru (lze však pracovat i se sudým počtem členů, pokud se postup doplní centrováním).

Předpokládejme např., že **chceme danou časovou řadu vyrovnat polynomem 3. řádu,** tzv. ***kubickou parabolou. Pro vyrovnání zvolíme*** $m = 2$ ***, klouzavý průměr*** *tedy* ***sestavujeme z*** $2m + 1 = 5$ ***hodnot uvažované časové řady, které označíme jako***

$$y_{t+\tau} \text{ , pro } \tau = -2,-1,0,1,2 \text{ .}$$

Koeficienty vyrovnávajícího polynomu – s argumenty v τ , tzn. v bodech, ve kterých řadu vyrovnáváme) **odhadneme *metodou nejmenších čtverců OLS* standardně tak, že minimalizujeme výraz**

(2.6)
$$Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3\right)^2$$

Derivováním podle jednotlivých koeficientů polynomu a anulováním příslušných derivací pro minimalizaci **získáme pro hledané čtyři odhady** b_0, b_1, b_2, b_3 **koeficientů** $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ **soustavu čtyř normálních rovnic , které lze obecně zapsat jako**

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\beta_0} = 2\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3\right)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\beta_1} = 2\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3\right)(-\tau) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\beta_0} = 2\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3\right)(-\tau^2) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\beta_0} = 2\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3\right)(-\tau^3) = 0 \quad \textbf{neboli}$$

(2.7A)
$$\sum_{\tau=-2}^{2}\left(-y_{t+\tau} + \beta_0 + \beta_1.\tau + \beta_2.\tau^2 + \beta_3.\tau^3\right) = 0$$

(2.7B)
$$\sum_{\tau=-2}^{2}\left(-y_{t+\tau}\tau + \beta_0\tau + \beta_1.\tau^2 + \beta_2.\tau^3 + \beta_3.\tau^4\right) = 0$$

(2.7C)
$$\sum_{\tau=-2}^{2}\left(-y_{t+\tau}\tau^2 + \beta_0\tau^2 + \beta_1.\tau^3 + \beta_2.\tau^4 + \beta_3.\tau^5\right) = 0$$

(2.7D)
$$\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau}\tau^3 - \beta_0\tau^3 - \beta_1\tau^4 + \beta_2.\tau^5 - \beta_3.\tau^6\right)=0$$

tj. ve standardním tvaru soustavy čtyř normálních rovnic

(2.8A)
$$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^0 = b_0 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^0 + b_1 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^1 + b_2 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^2 + b_3 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^3 \text{ .} \qquad j = 0$$

(2.8B)
$$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau = b_0 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau + b_1 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^2 + b_2 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^3 + b_3 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^4 \text{ .} \qquad j = 1$$

(2.8C)
$$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^2 = b_0 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^2 + b_1 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^3 + b_2 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^4 + b_3 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^5 \text{ .} \qquad j = 2$$

(2.8D)
$$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^3 = b_0 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^3 + b_1 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^4 + b_2 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^5 + b_3 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^6 \text{ .} \qquad j = 3 \text{ ,}$$

jinak vyjádřitelných v souhrnném zápisu

(2. 9) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{j} - b_0 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j} - b_1 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j+1} - b_2 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j+2} - b_3 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j+3} = 0 . \quad j = 0,1,2,3$$

Uvedenou soustavu lze dále zjednodušit , protože pro liché j platí $\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j} = 0$

(zde se uplatňuje výhoda volby lichého počtu členů řady)

(2.10A) $\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} = b_0 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{0} + b_2 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{2}$ neboli $\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} = b_0 .5 + b_2 .10$

(2.10B) $\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau = b_1 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{2} + b_3 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{4}$ neboli $\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau = b_1 .10 + b_3 .34$

(2.10C) $\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{2} = b_0 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{2} + b_2 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{4}$ neboli $\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{2} = b_0 .10 + b_2 .34$

(2.10D) $\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{3} = b_1 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{4} + b_3 \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{6}$ neboli $\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{3} = b_1 .34 + b_3 .130$.

V předchozím jsme využili toho, že $\sum_{\tau=-2}^{2} j^{0} = 5$, $\sum_{\tau=-2}^{2} j^{2} = 10$, $\sum_{\tau=-2}^{2} j^{4} = 34$, $\sum_{\tau=-2}^{2} j^{6} = 130$.

Nás přitom zajímá toliko odhad b_0 , neboť je to hodnota vyrovnávajícího polynomu $P(\tau) = b_0 + b_1 .\tau + b_2 .\tau^2 + b_3 .\tau^3$ v bodě $\tau = 0$ a v rozvíjené metodě ji budeme brát za hledanou vyrovnanou hodnotu řady ve středu zkoumaného úseku.

K určení odhadu b_0 stačí tedy použít první a třetí rovnici soustavy (2.10A), (2.10C), pomocí nichž dostaneme :

(2.10A) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} = 5.b_0 + 10.b_2$$

(2.10C) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{2} = 10.b_0 + 34.b_2 .$$

Z první rovnice (2.10A) získáme

$$\frac{1}{10}\left(\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} - b_0 .5\right) = b_2$$

Ze druhé rovnice (2.10C) pak máme

$$\frac{1}{34}\left(\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{2} - b_0 .10\right) = b_2$$

Komparací pro b_2 : $34\left(\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} - b_0 .5\right) = 10\left(\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{2} - b_0 .10\right)$ a vydělením 2 :

$$17 \sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} - 85 b_0 = 5 \sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{2} - 50 b_0$$

(2.11) $$17 \sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} - 5 \sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{2} = 35 b_0$$ s rozvedením

$17(y_{t-2}+y_{t-1}+y_t+y_{t+1}+y_{t+2})-5(4y_{t-2}+y_{t-1}+0.y_t+y_{t+1}+4y_{t+2})=35b_0$, takže odhadnutá trendová složka b_0 a současně vyrovnaná hodnota řady v čase *t* je rovna

(2.12) $$b_0=\frac{1}{35}\left(17.\sum_\tau y_{t+\tau}-5\sum_\tau \tau^2 y_{t+\tau}\right)=\frac{1}{35}(-3y_{t-2}+12y_{t-1}+17y_t+12y_{t+1}-3y_{t+2})$$, resp.

(2.12A) $$b_0=\hat{y}_t=\frac{1}{35}(-3y_{t-2}+12y_{t-1}+17y_t+12y_{t+1}-3y_{t+2}).$$ □.

Ve zkráceném symbolickém zápisu můžeme výsledek zapsat jako

(2.12B) $$\hat{y}_t=\frac{1}{35}(-3\,;12\,;17\,;12\,;-3).$$

Obecně můžeme vyrovnávat úsek o délce $p=2m+1$ *polynomem r-tého řádu* a tak obdržet klouzavé průměry délky $2m+1$ a řádu *r*.

Vyrovnaná hodnota $\hat{y}_t$ v bodě *t* je lineární kombinace výrazů $\sum_{\tau=-m}^{m}\tau^j y_{t+j}$ se sudými $j,\ j\le r$, což lze odvodit zobecněním soustavy (2.12). Po algebraické úpravě je to lineární kombinace hodnot $y_{t-m},\dots,y_t,\dots\dots,y_{t+m}$ s pevně určenými koeficienty, které se nazývají *váhy klouzavého průměru.*

Ilustrace:

Uplatněme předchozí pravidlo pro aproximaci hodnot paraboly 3.stupně

Vyjádřeme třetí mocniny přirozených čísel od 1 do 10 :

t	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	=	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

a použijeme vzorec (2.12A) pro výpočet vyrovnané hodnoty této řady v bodě *t = 3*

$$b_0=\hat{y}_t=\frac{1}{35}(-3y_{t-2}+12y_{t-1}+17y_t+12y_{t+1}-3y_{t+2}).$$.

v konkretizaci $$\hat{y}_3=\frac{1}{35}(-3.1^3+12.2^3+17.3^3+12.4^3-3.5^3).$$, tzn.

v konkretizaci $$\hat{y}_3=\frac{1}{35}(-3.1+12.8+17.27+12.64-3.125)=27=\hat{y}_3.$$

Podobně dostaneme: $$\hat{y}_4=\frac{1}{35}(-3.2^3+12.3^3+17.4^3+12.5^3-3.6^3).$$

$$\hat{y}_4=\frac{1}{35}(-3.8+12.27+17.64+12.125-3.216).$$

$$\hat{y}_4=\frac{1}{35}(-24+324+1088+1500-648)=\frac{2240}{35}=64.$$

Vyrovnávali jsme zde kubickou řadu polynomem 3.stupně (shodný výsledek bychom též dostali, pokud bychom vyrovnávali polynomem řádu vyšším než 3).

Příklad1 **Modifikace pro polynomickou křivku 4.stupně se stejnou délkou průměru:**

(2.14) $$Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3 - \beta_4.\tau^4\right)^2$$

Derivováním podle jednotlivých koeficientů polynomu a anulováním příslušných derivací pro minimalizaci **získáme pro hledané čtyři odhady** b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 **koeficientů** $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ **soustavu pěti normálních rovnic, které lze obecně zapsat**

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)}{\beta_0} = 2\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3 - \beta_4.\tau^4\right)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)}{\beta_1} = 2\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3 - \beta_4.\tau^4\right)(-\tau) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)}{\beta_2} = 2\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3 - \beta_4.\tau^4\right)(-\tau^2) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)}{\beta_3} = 2\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3 - \beta_4.\tau^4\right)(-\tau^3) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)}{\beta_4} = 2\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3 - \beta_4.\tau^4\right)(-\tau^4) = 0$$

neboli

$$\sum_{\tau=-2}^{2}\left(-y_{t+\tau} + \beta_0 + \beta_1.\tau + \beta_2.\tau^2 + \beta_3.\tau^3 + \beta_4.\tau^4\right) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^{2}\left(-y_{t+\tau}\tau + \beta_0\tau + \beta_1.\tau^2 + \beta_2.\tau^3 + \beta_3.\tau^4 + \beta_4.\tau^5\right) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^{2}\left(-y_{t+\tau}\tau^2 + \beta_0\tau^2 + \beta_1.\tau^3 + \beta_2.\tau^4 + \beta_3.\tau^5 + \beta_4.\tau^6\right) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau}\tau^3 - \beta_0\tau^3 - \beta_1\tau^4 + \beta_2.\tau^5 + \beta_3.\tau^6 + \beta_4.\tau^7\right) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^{2}\left(y_{t+\tau}\tau^3 - \beta_0\tau^4 - \beta_1\tau^5 + \beta_2.\tau^6 + \beta_3.\tau^7 + \beta_4.\tau^8\right) = 0$$

tj. ve standardním tvaru soustavy pěti normálních rovnic

(2.15A) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^0 = b_0\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^0 + b_1\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^1 + b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^2 + b_3\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^3 + b_4\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^4 . \qquad j = 0$$

(2.15B) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau = b_0\sum_{\tau=-2}^{2}\tau + b_1\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^2 + b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^3 + b_3\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^4 + b_4\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^5 . \qquad j = 1$$

(2.15C) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^2 = b_0\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^2 + b_1\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^3 + b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^4 + b_3\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^5 + b_4\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^6 . \qquad j = 2$$

(2.15D) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^3 = b_0\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^3 + b_1\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^4 + b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^5 + b_3\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^6 + b_4\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^7 . \qquad j = 3 ,$$

(2.15E) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^4 = b_0\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^4 + b_1\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^5 + b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^6 + b_3\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^7 + b_4\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^8 . \qquad j = 4 ,$$

jinak vyjádřitelných v souhrnném zápisu

(2.16) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{j} - b_0\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j} - b_1\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j+1} - b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j+2} - b_3\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j+3} - b_4\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j+4} = 0 .\quad j = 0,1,2,3,4$$

S ohledem na nulovost členů s lichými mocninami u τ dostaneme dále:

(2.17A) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{0} = b_0.5 + b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{2} + b_4\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{4} .\qquad j = 0$$

(2.17B) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau = b_1\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{2} + b_3\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{4} .\qquad j = 1$$

(2.17C) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{2} = b_0\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{2} + b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{4} + b_4\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{6} .\qquad j = 2$$

(2.17D) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{3} = b_1\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{4} + b_3\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{6} .\qquad j = 3\ ,$$

(2.17E) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{4} = b_0\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{4} + b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{6} + b_4\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{8} .\qquad j = 4\ ,$$

Po vyčíslení členů se sudými mocninami τ máme :

(2.18A) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} = 5.b_0 + 10.b_2 + 34.b_4 \qquad j = 0$$

(2.18B) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau = 5.b_1 + 34b_3 \qquad j = 1$$

(2.18C) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{2} = 10b_0 + 34b_2 + 130b_4 \qquad j = 2$$

(2.18D) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{3} = 34b_1 + 130b_3 \qquad j = 3$$

(2.18E) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{4} = 34b_0 + 130b_2 + 514b_4 \qquad j = 4\ ,$$

Pro určení parametru b_2 máme nyní k použití 3 rovnice:

(2.18A), (2.18C), (2.18E) , které lze souhrnně zapsat maticově

(2.19) $$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 34 \\ 10 & 34 & 130 \\ 34 & 130 & 514 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{2}.y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{4}.y_{t+\tau} \end{pmatrix}_0 ,\ \text{tedy}\ \begin{pmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 34 \\ 10 & 34 & 130 \\ 34 & 130 & 514 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{2}.y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{4}.y_{t+\tau} \end{pmatrix}_0$$

Pomocí stejných tří rovnic lze vypočíst parametry b_0, b_4 , zatímco k určení zbývajících dvou parametrů lze uplatnit vztahy vyjádřené rovnicemi(2.17B),(2.17D). Jak patrno, obě (rekursívní) „podsoustavy„ zahrnují disjunktní množiny parametrů.

Inverzi matice v (2.19) získáme následovně:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 34 \\ 10 & 34 & 130 \\ 34 & 130 & 514 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5.34.514+2.10.130.34-34^3-5.130^2-514.10^2}\begin{pmatrix} 576 & -720 & 144 \\ -720 & 1414 & -310 \\ 144 & -310 & 70 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 34 \\ 10 & 34 & 130 \\ 34 & 130 & 514 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{87380+88400-39304-84500-51400}\begin{pmatrix} 576 & -720 & 144 \\ -720 & 1414 & -310 \\ 144 & -310 & 70 \end{pmatrix}$$

(2.20)

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 34 \\ 10 & 34 & 130 \\ 34 & 130 & 514 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{576}\begin{pmatrix} 576 & -720 & 144 \\ -720 & 1414 & -310 \\ 144 & -310 & 70 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{576}\begin{pmatrix} 576 & -720 & 144 \\ -720 & 1414 & -310 \\ 144 & -310 & 70 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^2.y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^4.y_{t+\tau} \end{pmatrix}$$ **, odtud máme**

(2.21A)

$$b_0 = \sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} - 1{,}25\sum_{\tau=-2}^{2} \tau^2.y_{t+\tau} + 0{,}25.\sum_{\tau=-2}^{2} \tau^4.y_{t+\tau}$$

$$b_0 = y_{t-2}+y_{t-1}+y_t+y_{t+1}+y_{t+2}-1{,}25\left(4y_{t-2}+y_{t-1}+y_{t+1}+4y_{t+2}\right)+0{,}25.\left(16y_{t-2}+y_{t-1}+y_{t+1}+16y_{t+2}\right)$$

$$b_0 = y_{t-2}+y_{t-1}+y_t+y_{t+1}+y_{t+2}-5y_{t-2}-1{,}25y_{t-1}-1{,}25y_{t+1}-5y_{t+2}+4y_{t-2}+0{,}25.y_{t-1}+0{,}25y_{t+1}+4y_{t+2}$$

$b_0 = y_{t-1}+y_t+y_{t+1}-1{,}25y_{t-1}-1{,}25y_{t+1}+0{,}25.y_{t-1}+0{,}25y_{t+1}$ a odtud $b_0 = y_t$

Váhový vektor pro b_0 má tedy tvar $b_0 = y_t[0,0,1,0,0]$.

Podobně pro b_2 máme

$$b_2 = -\frac{720}{576}\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} + \frac{1414}{576}\sum_{\tau=-2}^{2} \tau^2.y_{t+\tau} - \frac{310}{576}\sum_{\tau=-2}^{2} \tau^4.y_{t+\tau}$$

(2.21C)

$$b_2 = -1{,}25\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} + \frac{707}{288}\sum_{\tau=-2}^{2} \tau^2.y_{t+\tau} - \frac{155}{288}\sum_{\tau=-2}^{2} \tau^4.y_{t+\tau}$$

Podobně pro b_2 máme

$$b_4 = -\frac{144}{576}\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} - \frac{310}{576}\sum_{\tau=-2}^{2} \tau^2.y_{t+\tau} + \frac{70}{576}\sum_{\tau=-2}^{2} \tau^4.y_{t+\tau}$$

(2.21E)

$$b_4 = -0{,}25\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} - \frac{155}{288}\sum_{\tau=-2}^{2} \tau^2.y_{t+\tau} + \frac{35}{288}\sum_{\tau=-2}^{2} \tau^4.y_{t+\tau}.$$

Podobně pro podsoustavu rovnic pro (2.18B), (2.18D), ze které můžeme odvodit parametry b_1 , b_3 máme maticové vyjádření

(2.19) $\begin{pmatrix} 5 & 34 \\ 34 & 130 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau . y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^3 . y_{t+\tau} \end{pmatrix}$ **, tedy** $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 34 \\ 34 & 130 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau . y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^3 . y_{t+\tau} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{506} \begin{pmatrix} 130 & -34 \\ -34 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau . y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^3 . y_{t+\tau} \end{pmatrix}$$

(2.21A) $$b_1 = \frac{130}{506} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau . y_{t+\tau} - \frac{34}{506} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^3 . y_{t+\tau}$$

(2.21A) $$b_1 = \frac{-34}{506} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau . y_{t+\tau} + \frac{5}{506} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^3 . y_{t+\tau}$$

Příklad2 Modifikace pro polynomickou křivku 2.stupně se stejnou délkou průměru:

(2.11) $$Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = \sum_{\tau=-2}^{2} \left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 . \tau - \beta_2 . \tau^2 \right)^2$$

Derivováním podle tří parametrů polynomu a anulováním příslušných derivací získáme pro odhady b_0, b_1, b_2 koeficientů $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ soustavu tří normálních rovnic, které lze obecně zapsat

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2)}{\beta_0} = 2 \sum_{\tau=-2}^{2} \left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 . \tau - \beta_2 . \tau^2 \right)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2)}{\beta_1} = 2 \sum_{\tau=-2}^{2} \left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 . \tau - \beta_2 . \tau^2 \right)(-\tau) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2)}{\beta_2} = 2 \sum_{\tau=-2}^{2} \left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 . \tau - \beta_2 . \tau^2 \right)(-\tau^2) = 0$$

Neboli $$\sum_{\tau=-2}^{2} \left(-y_{t+\tau} + \beta_0 + \beta_1 . \tau + \beta_2 . \tau^2 \right) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^{2} \left(-y_{t+\tau} \tau + \beta_0 \tau + \beta_1 . \tau^2 + \beta_2 . \tau^3 \right) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^{2} \left(-y_{t+\tau} \tau^2 + \beta_0 \tau^2 + \beta_1 . \tau^3 + \beta_2 . \tau^4 \right) = 0$$

tj. ve standardním tvaru soustavy tří normálních rovnic

(2.12A) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} \tau^0 = b_0 \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^0 + b_1 \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^1 + b_2 \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^2 . \qquad j = 0$$

(2.12B) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} \tau = b_0 \sum_{\tau=-2}^{2} \tau + b_1 \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^2 + b_2 \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^3 . \qquad j = 1$$

2.12C) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} \tau^2 = b_0 \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^2 + b_1 \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^3 + b_2 \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^4 . \qquad j = 2$$

jinak vyjádřitelných v souhrnném zápisu

(2.12) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^{j} - b_0\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j} - b_1\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j+1} - b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^{j+2} = 0 . \quad j = 0,1,2$$

S ohledem na nulovost členů s lichými mocninami u τ a po vyčíslení členů se sudými mocninami u τ :

(2.12A) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} = b_0.5 + b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^2 = 5b_0 + 10b_2 . \qquad j = 0$$

(2.12B) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau = 10.b_1 . \qquad j = 1$$

(2.12C) $$\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau^2 = b_0\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^2 + b_2\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^4 = 10b_0 + 34b_2 . \qquad j = 2$$

Pro výpočet parametrů b_0, b_1, b_2 dostáváme tedy tytéž vzorce jako v (2.13A,C), zatímco výpočet b_1 je dán vztahem $b_1 = \dfrac{\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\tau}{10}$.

Snadno lze dokázat následující vlastnosti těchto klouzavých průměrů:

(1) Součet vah klouzavého průměru je roven 1: aplikujeme-li totiž klouzavý průměr na řadu stejných hodnot, pak vyrovnanou hodnotou musí být původní konstanta.

(2) Váhy jsou symetrické kolem prostřední hodnoty , neboť ve výrazech typu

(2.17) $$\sum_{\tau=-m}^{m} \tau^{j} y_{t+j}$$

mají pro sudé j členy $y_{t-\tau}, y_{t+\tau}$ symetrické koeficienty.

(3) Je-li *r* sudé číslo, pak klouzavé průměry řadů *r* a *r+1* se stejnou délkou *2m+1* jsou totožné: prohlédneme-li si pozorně soustavu (2.12), pak pro b_0 dostaneme stejné řešení, ať jsou v soustavě zahrnuty členy s neznámou b_3 nebo nejsou.

Poznámka 1 Vyrovnáním řady pomocí techniky klouzavých průměrů získáme vyrovnané hodnoty pouze pro $t = m+1,\dots, n-m$. Ztratíme tedy *m* hodnot na začátku a *m* hodnot na konci řady, které zůstanou nevyrovnány.

Poznámka 2 Pokud bychom chtěli k vyrovnání používat úseky se sudým počtem *2m* členů: vyrovnaná hodnota by pak patřila doprostřed časového intervalu mezi okamžiky původních pozorování, což není právě výhodné vzhledem k interpretaci výsledků. Uspokojivé řešení situace bude uvedeno níže.

V následující *tabulce 1* jsou uvedeny váhy klouzavých průměrů až do pátého řádu včetně při různých délkách. Vzhledem k symetrii je uvedena někdy jen první polovina vah včetně prostřední. Podle dříve uvedené vlastnosti jsou váhy pro druhý a třetí řád stejné, stejně jako jsou stejné pro čtvrtý a pátý řád. Průměry řádu 0 a 1 nejsou uvedeny, protože jde o prosté aritmetické průměry spočtené z $2m+1$ členů řady

(2.18) $$\frac{y_{t-m}+....+y_{t+m}}{2m+1}$$

Pro úplnost tabulka obsahuje váhy klouzavých průměrů druhého nebo třetího řádu a délky 3, přestože zde platí $\hat{y}_t = y_t$.

Tabulka 1

délka/ řád	2. a 3.	4. a 5.
3	$[0,1,0]$	$[0,1,0]$
5	$\frac{1}{35}[-3,12,17,12,-3]$	$[0,0,1,0,0]$
7	$\frac{1}{21}[-2,3,6,7,....]$	$\frac{1}{231}[5,-30,75,131,....]$
9	$\frac{1}{231}[-21,14,39,54,59,....]$	$\frac{1}{429}[15,-55,30,135,179,....]$
11	$\frac{1}{429}[-36,9,44,69,84,89,....]$	$\frac{1}{429}[18,-45,-10,60,120,143....]$
13	$\frac{1}{143}[-11,0,9,16,231,24,25,....]$	

Zatím jsme pominuli otázku, **jak určit vyrovnané hodnoty pro prvních *m* a posledních *m* pozorování časové řady a jak získat** příslušné **predikce pro budoucí období.**

V ilustrativním příkladě jsme vyrovnávali kubickou parabolou vždy 5 sousedních hodnot řady. Nechť je těmito hodnotami pět posledních hodnot řady $y_{n-4}, y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$.

Na rozdíl od předchozího nás budou nyní zajímat i ty dříve ignorované **hodnoty kubické paraboly vyrovnávající tento úsek pro** $\tau = 1, \tau = 2$. **K tomu ale potřebujeme znát i odhady koeficientů** $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ **této křivky. (dříve nám stačil koeficient** β_0**). Ze soustavy (2.12A-D) se zjistí, že příslušné odhady budou mít tvar**

(2.19B) $$b_1 = \hat{\beta}_1 = \frac{1}{72}\left(65.\sum_{\tau=-2}^{2}\tau.y_{t+\tau} - 17.\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^3 y_{t+\tau}\right)$$

(2.19C) $$b_2 = \hat{\beta}_2 = \frac{1}{14}\left(\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^2 y_{t+\tau} - 2.\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau}\right)$$

(2.19D) $$b_3 = \hat{\beta}_3 = \frac{1}{72}\left(5.\sum_{\tau=-2}^{2}\tau^3 y_{t+\tau} - 17.\sum_{\tau=-2}^{2}\tau y_{t+\tau}\right).$$

Ověření např. pro b_2 : z předchozího víme, že $\frac{1}{10}\left(\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} - b_0 .5\right) = b_2$, přičemž

$$b_0 = \frac{1}{35}(-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2}).$$ Proto máme

$$b_2 = \frac{1}{10}\left(\sum_{\tau=-2}^{2} y_{t+\tau} - \frac{1}{7}(-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2})\right)$$ neboli

$$b_2 = \frac{1}{10}\left(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + \left(\frac{3}{7}y_{t-2} - \frac{12}{7}y_{t-1} - \frac{17}{7}y_t - \frac{12}{7}y_{t+1}\frac{3}{7}y_{t+2}\right)\right)$$

Po sdružení členů $$b_2 = \frac{1}{10}\left(\frac{10}{7}y_{t-2} - \frac{5}{7}y_{t-1} - \frac{10}{7}y_t - \frac{5}{7}y_{t+1} + \frac{10}{7}y_{t+2}\right)$$

závěrem dospějeme k $$b_2 = \left(\frac{1}{7}y_{t-2} - \frac{1}{14}y_{t-1} - \frac{1}{7}y_t - \frac{1}{14}y_{t+1} + \frac{1}{7}y_{t+2}\right).$$

Výsledek (2.19C) po rozvedení dává :

$$b_2 = \frac{1}{14}(4y_{t-2} + y_{t-1} + y_{t+1} + 4y_{t+2} - 2.y_{t-2} - 2.y_{t-1} - 2.y_t - 2.y_{t+1} - 2.y_{t+2})$$

Tedy platí $$b_2 = \frac{1}{14}(2y_{t-2} - y_{t-1} - 2y_t - y_{t+1} + 2y_{t+2})$$ □.

(2.19B) $$b_1 = \frac{1}{72}(65.[-2.y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} - 2.y_{t+2}] - 17.[-8.y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} - 8.y_{t+2}])$$

(2.19D) $$b_3 = \frac{1}{72}(5.[-8.y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} + 8y_{t+2}] - 17.[-2.y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} + 2y_{t+2}]).$$

(2.19B)

$$b_1 = \frac{1}{72}([-130.y_{t-2} - 65y_{t-1} + 65y_{t+1} - 130.y_{t+2}] + [136.y_{t-2} + 17y_{t-1} - 17y_{t+1} + 136.y_{t+2}])$$

$$b_1 = \frac{1}{72}([6y_{t-2} - 48y_{t-1} + 65y_{t+1} + 6y_{t+2}])$$

(2.19D) $$b_3 = \frac{1}{72}(5.[-8.y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} + 8y_{t+2}] - 17.[-2.y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} + 2y_{t+2}]).$$

(2.19D) $$b_3 = \frac{1}{72}([-40.y_{t-2} - 5y_{t-1} + 5y_{t+1} + 40y_{t+2}] + [-34y_{t-2} + 17y_{t-1} - 17y_{t+1} + 34y_{t+2}]).$$

(2.19D) $$b_3 = \frac{1}{72}([-74y_{t-2} + 12y_{t-1} - 12y_{t+1} + 74y_{t+2}]).$$

Nalezení odhadů koeficientů (kromě b_0) pro b_1, b_2, b_3 (2.19B-2.19D) spolu s (2.16A) pro b_0 umožní získat pro poslední dvě pozorování y_{n-1}, y_n jejich vyrovnané hodnoty. Dostaneme je dosazením nalezených odhadů do obecného predikčního schématu (2.20)

$$\hat{y}_{n-2+k} = b_0 + b_1.k + b_2.k^2 + b_3.k^3 = \frac{1}{35}[-3,12,17,12,-3]y_{n-2} + \frac{k}{12}[1,-8,0,8,-1]y_{n-2} + \frac{k^2}{14}[2,-1,-2,-1,2]y_{n-2} + \frac{k^3}{14}[-1,2,0,-2,1]y_{n-2}$$

$k = 1,2$

Po dosazení $k = 1$ a $k = 2$ získáme vyrovnané koncové hodnoty :

(2.21A)
$$\hat{y}_{n-1} = \frac{1}{35}[2,-8,12,27,2]y_{n-2}$$

(2.21B)
$$\hat{y}_n = \frac{1}{70}[-1,4,-6,4,69]y_{n-2}.$$

Vzhledem ke zřejmé symetrii také podobně dostaneme vyrovnanou první a druhou hodnotu ze začátku řady jako

(2.21C)
$$\hat{y}_2 = \frac{1}{35}[2,27,12,-8,2]y_3$$

(2.21D)
$$\hat{y}_1 = \frac{1}{70}[69,4,-6,4,-1]y_3.$$

Uvedený postup navíc dokonce **umožňuje konstruovat předpovědi v dané řadě: např. předpověď hodnoty y_{n+1} získáme tak, že do (2.20). dosadíme $k = 3$. Dostaneme:**

$$\hat{y}_{n+1}(n) = \frac{1}{5}[-4,11,-4,-14,16]y_{n-2}.$$

Uvedený postup lze ale použít jen pro konstrukci krátkodobý předpovědí – čím je předpovídaná hodnota vzdálenější od časového bodu předpovědi $t = n$ (tj. čím delší je horizont předpovědi)**, tím lze očekávat přirozeně menší spolehlivost predikce.**

Poznámka: Při výpočtech vah v klouzavých průměrech se uplatňuje znalost těchto dvou vztahů

Při $p = 2m + 1$ **:**
$$\sum_{k=-m}^{m} k^2 = \frac{p(p^2-1)}{12} \qquad \sum_{k=-m}^{m} k^4 = \frac{p(p^2-1)(3p^2-7)}{240}.$$

Klouzavé průměry, které jsme takto popsali, se nazývají počáteční, koncové a předpovědní, podle toho, zda vyrovnáváme počáteční hodnoty řady, koncové hodnoty řady nebo pomocí nich předpovídáme . Poznamenejme, žer tyto klouzavé průměry již nemají výhodné vlastnosti jako klouzavé průměry … Jejich váhy nejsou obecně symetrické kolem prostřední hodnoty a váhy klouzavých průměrů např. druhého a třetího řádu již nejsou totožné.

Avšak i pro klouzavé průměry tohoto typu jsou příslušné **váhy v literatuře tabelovány.**

Např. předpověď o jeden krok dopředu při použití klouzavých průměrů prvního řádu a délky 3 má podle prvního řádku tabulky tvar

$$\hat{y}^*_{n+1}(n) = \frac{1}{3}(-2y_{n-2} + y_{n-1} + 4y_n).$$

Pro metodu klouzavých průměrů musíme řešit otázku, jaký řád a jakou délku klouzavých průměrů pro analyzovanou časovou řadu zvolit.

Obvykle se rozhodujeme na základě subjektivního posouzení charakteru dat s tím, že preferujeme jednoduché průměry co nejnižšího řádu a délku volíme podle požadovaného stupně vyhlazení řady. (čím je větší délka klouzavého průměru, tím je větší vyhlazení časové řady).

Jednou z důležitých zásad pro volbu délky průměru je, že tato délka by měla odpovídat periodě sezónních nebo cyklických fluktuací, které chceme z řady vyhladit.

Nesprávně: v časové řadě ročních měření byly k vyhlazení cyklické složky s dvouletou periodou užity klouzavé průměry délky 3 a 5.

V prvém případě je výsledkem vyhlazení „inverzní cyklus“: ve skupině tří sousedních hodnot vyrovnávané řady jsou buď dva horní a jeden dolní bod zvratu nebo naopak.

Ve druhém případě nastává opačná situace: vyrovnaná řady následuje původní řadu vzhůru do horních bodů zvratu a dolů do dolních bodl zvratu.

Pokud jde o volbu řádu klouzavých průměrů, lze vyvodit objektivní kritérium:

Předpokládejme, že uvažovaná řada y_t má tvar $y_t = T_t + E_t$, kde T_t je polynom *r-tého řádu* a E_t je bílý šum s rozptylem σ^2. Budeme postupně diferencovat, čímž se polynom vytvářející řadu y_t bude postupně při každé diferenci snižovat svůj řád o 1, protože např. v rozdílu

$$\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + ... + \beta_r t^r\right) - \left(\beta_0 + \beta_1(t-1) + \beta_2(t-1)^2 + ... + \beta_r(t-1)^r\right).$$

je t^{r-1} nejvyšší mocnina proměnné t s nenulovým koeficientem.Konečně při řádu t+1 se tento polynom úplně vynuluje. Při řádu r je diferencí konstanta obvykle různá od nuly. Bílý šum vytvoří při k-té diferenci veličinu

$$\Delta^k \varepsilon_t = \varepsilon_t - \binom{k}{1}\varepsilon_{t-1} + \binom{k}{2}\varepsilon_{t-2} - (-1)^k \varepsilon_{t-k},$$

která má nulovou střední hodnotu a rozptyl roven

$$var\left(\Delta^k \varepsilon_t\right) = \sigma^2\left(1 + \binom{k}{1}^2 + \binom{k}{2}^2 + .. + 1\right) = \binom{2k}{k}.\sigma^2.$$

Označíme-li tedy $V_k = \dfrac{\sum_{t=k+1}^{n}\left(\Delta^k y_t\right)^2}{\binom{2k}{k}(n-k)}$, pak pro $k \geq r+1$ je V_k odhadem rozptylu σ^2 bílého šumu.

Metoda klouzavých průměrů

Nevylučuje to ovšem možnost, že pozorování lze vyrovnat **lokálně,** tzn. v různých úsecích časové řady různými křivkami (třeba téhož typu, ale s různými, v čase se měnícími parametry).

K pozorované hodnotě y_t konstruujeme vyrovnanou hodnotu $\hat{y}_t$, jíž nahrazujeme tuto pozorovanou hodnotu y_t takto :

$$\hat{y}_t = \frac{y_{t-m} + y_{t-m+1} + y_{t-m+2} + \dots y_t + y_{t+1} + y_{t+m-1} + y_{t+m}}{2m+1}$$

tj. *prostý*m *klouzavý*m *průměr*em , resp.

$$_w\hat{y}_t = \frac{w_{t-m}y_{t-m} + w_{t-m+1}y_{t-m+1} + \dots w_t \cdot y_t + w_{t+1} \cdot y_{t+1} + w_{t+m-1}y_{t+m-1} + w_{t+m}y_{t+m}}{2m+1}$$

tj. *vážený*m *klouzavý*m *průměr*em **pro každé $t = 1,2,\dots\dots, n$**
(*n* je počet pozorování)

Je patrné, že **prostý** aritmetický **průměr je speciálním případem váženého** aritmetického **průměru s rovnoměrně rozdělenými vahami** $w_t = \dfrac{1}{2m+1}$ **pro všechna** $t = 1,2,\dots\dots, n$ **.**

Vyrovnání časové řady pomocí klouzavého průměru závisí na :

a) počtu členů, které zahrneme do průměru; ten tedy může být :

lichý **-** $p = 2m+1$ **: pak hodnotu spočteného průměru přiřadíme prostřednímu členu průměru**

sudý **-** $p = 2m$ **: provádíme tzv. centrování, kterým hodnotu spočteného průměru přisoudíme okamžiku mezi dvěma prostředními pozorováními časové řady**

b) vahách přiřazených pozorovaným hodnotám ekonomického ukazatele

Ty mohou být :

- ***symetrické*** **platí** $w_1 = w_{-1}, w_2 = w_{-2}$**, atd.** $w_j = w_{-j}$

  index "0" označuje *prostřední* pozorování, „střed“ průměru

- ***nesymetrické*****: zpravidla podle speciálního účelu klouzavého průměru**

pro hodnoty vah platí podmínky: $\sum_j w_j = 1$ **(vždy,** dá se zajistit normováním**)**

$w_j \geq 0$ **(obvykle,** existují však výjimky**)**

Tímto způsobem však nelze nahradit pozorované hodnoty v krajních bodech :

- ***u lichého počtu členů průměru ztratíme*** vždy $m-1$ **krajních členů**
(po $(m-1)/2$ **na každé straně)**

- ***u sudého počtu členů průměru ztratíme*** rovněž $m-1$ **krajních členů**
(získané hodnoty centrujeme do „meziobdobí“ ležících vždy uprostřed dvou pozorování)

Poznámka **: Můžeme ovšem použít některý ze způsobů "dodefinování" hodnot v krajních bodech** (nějakým **vhodným algoritmem).**

Aplikace klouzavých průměrů k identifikaci trendové složky

1) mechanické vyrovnávání :

2) vyrovnávání pomocí polynomů k-tého (nevelkého) stupně :

Aplikace klouzavých průměrů k identifikaci sezónní složky

Máme-li řadu pozorovaných hodnot y_t a klouzavým průměrem vyrovnaných hodnot $\hat{y}_t$, můžeme se pokusit jednoduchým způsobem určit (nebo přibližně odhadnout) **míru sezónního kolísání časové řady (pokud jde o časovou řadu, která vykazuje sezónnost a pokud jsou její hodnoty registrovány v měsíčních nebo čtvrtletních časových odstupech).**

Uvažujme případ čtvrtletní časové řady (n ... počet pozorování za rok = 4)

(Analogicky bychom postupovali u roční sezónnosti při n = 12) :

A) v případě aditivního modelu sezónnosti : $y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$

lze nejjednodušeji uplatnit např. tento postup: Vytvoříme individuální odchylky všechna t. Sdružíme (po čtveřicích) **hodnoty odchylek u stejnolehlých čtvrtletí a tyto zprůměrujeme (přes počet let, které obsahuje datový vzorek):**

$$d^{(1)} = \frac{1}{k}\left(d_t + d_{t+4} + d_{t+8} + d_{t+12} + \dots\right)$$

$$d^{(2)} = \frac{1}{k}\left(d_{t+1} + d_{t+5} + d_{t+9} + d_{t+13} + \dots\right)$$

$$d^{(3)} = \frac{1}{k}\left(d_{t+2} + d_{t+6} + d_{t+10} + d_{t+14} + \dots\right)$$

$$d^{(4)} = \frac{1}{k}\left(d_{t+3} + d_{t+7} + d_{t+11} + d_{t+15} + \dots\right)$$

Hodnoty $d^{(1)}, d^{(2)}, d^{(3)}, d^{(4)}$ **nazýváme** ***sezónní diference*****, přičemž je lze považovat za odhady skutečných** (aditivně chápaných) ***sezónních faktorů*****.** Je zřejmé, že **některé z hodnot** $d^{(1)}, d^{(2)}, d^{(3)}, d^{(4)}$ **budou kladné, jiné záporné** (neutrální hodnota je 0)**. Pro** tyto **sezónní diference platí:** $d^{(1)} + d^{(2)} + d^{(3)} + d^{(4)} = 0.$

B) v případě multiplikativní sezónnosti : $y_t = T_t * S_t * \varepsilon_t$

lze analogicky **uplatnit tento jednoduchý postup: vytvoříme podíly** $q_t = \hat{y}_t / y_t$ **pro všechna** t**. Tyto sdružíme po shodných čtvrtletích tak, že vynásobíme hodnoty stejnolehlých čtvrtletí** v příslušných letech **a výsledek odmocníme hodnotou rovnou počtu let:**

$$q^{(1)} = \sqrt[k]{q_t * q_{t+4} * q_{t+8} * q_{t+12} * \dots}$$

$$q^{(2)} = \sqrt[k]{q_{t+1} * q_{t+5} * q_{t+9} * q_{t+13} * \dots}$$

$$q^{(3)} = \sqrt[k]{q_{t+2} * q_{t+6} * q_{t+10} * q_{t+14} * \dots}$$

$$q^{(4)} = \sqrt[k]{q_{t+3} * q_{t+7} * q_{t+11} * q_{t+15} * \dots}$$

Získané 4 hodnoty $q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}, q^{(4)}$ **se nazývají** ***sezónní poměry*** **a lze je považovat za odhady** (tentokrát multiplikativně pojatých) ***sezónních faktorů*****.** Je přitom zřejmé, že **některé z hodnot** $q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}, q^{(4)}$ **budou větší než 1, jiné menší než 1** (neutrální hodnota je 1) **Pro tyto sezónní poměry platí :** $q^{(1)}.q^{(2)}.q^{(3)}.q^{(4)} = 1$ **.**

Příklad 3 **Modifikace pro polynomickou křivku 3.stupně s délkou průměru 7**

(2.51) $$Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \sum_{\tau=-3}^{3}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3\right)^2$$

Derivováním podle jednotlivých koeficientů polynomu (2.51) a anulováním příslušných derivací pro minimalizaci **získáme pro hledané čtyři odhady** b_0,b_1,b_2,b_3 **koeficientů** $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ **soustavu čtyř normálních rovnic, které lze obecně zapsat ve tvaru**

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\partial \beta_0} = 2\sum_{\tau=-3}^{3}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3\right)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\partial \beta_1} = 2\sum_{\tau=-3}^{3}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3\right)(-\tau) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\partial \beta_2} = 2\sum_{\tau=-3}^{3}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3\right)(-\tau^2) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y,\tau,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\partial \beta_3} = 2\sum_{\tau=-3}^{3}\left(y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1.\tau - \beta_2.\tau^2 - \beta_3.\tau^3\right)(-\tau^3) = 0$$

neboli

(2.52A) $$\sum_{\tau=-3}^{3}\left(-y_{t+\tau} + \beta_0 + \beta_1.\tau + \beta_2.\tau^2 + \beta_3.\tau^3\right) = 0$$

(2.52B) $$\sum_{\tau=-3}^{3}\left(-y_{t+\tau}\tau + \beta_0\tau + \beta_1.\tau^2 + \beta_2.\tau^3 + \beta_3.\tau^4\right) = 0$$

(2.52C) $$\sum_{\tau=-3}^{3}\left(-y_{t+\tau}\tau^2 + \beta_0\tau^2 + \beta_1.\tau^3 + \beta_2.\tau^4 + \beta_3.\tau^5\right) = 0$$

(2.52D) $$\sum_{\tau=-3}^{3}\left(-y_{t+\tau}\tau^3 + \beta_0\tau^3 + \beta_1\tau^4 + \beta_2.\tau^5 + \beta_3.\tau^6\right) = 0$$

tj. ve standardním tvaru soustavy čtyř normálních rovnic

(2.53A) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^0 = b_0 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^0 + b_1 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^1 + b_2 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^2 + b_3 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^3 . \qquad j = 0$$

(2.53B) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau = b_0 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau + b_1 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^2 + b_2 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^3 + b_3 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^4 . \qquad j = 1$$

(2.53C) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^2 = b_0 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^2 + b_1 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^3 + b_2 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^4 + b_3 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^5 . \qquad j = 2$$

(2.53D) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^3 = b_0 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^3 + b_1 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^4 + b_2 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^5 + b_3 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^6 . \qquad j = 3 \,,$$

jinak vyjádřitelných v souhrnném zápisu

(2.54) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^j - b_0 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^j - b_1 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^{j+1} - b_2 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^{j+2} - b_3 \sum_{\tau=-3}^{3}\tau^{j+3} = 0 . \quad j = 0,1,2,3$$

S ohledem na nulovost členů s lichými mocninami u τ dostaneme dále:

(2.55A) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau} = b_0.7 + b_2 \sum_{\tau=-3}^{3} \tau^2 . \qquad j = 0$$

(2.55B) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau = b_1 \sum_{\tau=-3}^{3} \tau^2 + b_3 \sum_{\tau=-3}^{3} \tau^4 . \qquad j = 1$$

(2.55C) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^2 = b_0 \sum_{\tau=-3}^{3} \tau^2 + b_2 \sum_{\tau=-3}^{3} \tau^4 . \qquad j = 2$$

(2.55D) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^3 = b_1 \sum_{\tau=-3}^{3} \tau^4 + b_3 \sum_{\tau=-3}^{3} \tau^6 . \qquad j = 3 ,$$

Po vyčíslení členů se sudými mocninami τ máme :

(2.56A) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau} = 7.b_0 + 28.b_2 \qquad j = 0$$

(2.56B) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau = 28.b_1 + 196\, b_3 \qquad j = 1$$

(2.56C) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^2 = 28\, b_0 + 196\, b_2 \qquad j = 2$$

(2.56D) $$\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^3 = 196\, b_1 + 1588\, b_3 \qquad j = 3$$

Pro určení parametru b_0 máme nyní k použití 2 rovnice:

(2.56A), (2.56C), které lze souhrnně zapsat maticově

(2.57) $$\begin{pmatrix} 7 & 28 \\ 28 & 196 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_0 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^2 \end{pmatrix}, \text{ tedy } \begin{pmatrix} b_0 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 28 \\ 28 & 196 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^2 \end{pmatrix}$$

Pomocí stejných dvou rovnic lze vypočíst parametry b_0, b_4 , zatímco k určení zbývajících dvou parametrů lze uplatnit vztahy vyjádřené rovnicemi(2.56B),(2.56D). Jak patrno, obě (rekursívní) „podsoustavy„ zahrnují disjunktní množiny parametrů. Inverzi matice v (2.57) získáme následovně:

$$\begin{pmatrix} 7 & 28 \\ 28 & 196 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7.196 - 28^2} \begin{pmatrix} 196 & -28 \\ -28 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{1372 - 784} \begin{pmatrix} 196 & -28 \\ -28 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{588} \begin{pmatrix} 196 & -28 \\ -28 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{21} & \frac{1}{84} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^2 \end{pmatrix}$$, odtud máme

(2.58) $$b_0 = \frac{1}{3}\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau} - \frac{1}{21}\sum_{\tau=-3}^{3}\tau^2 . y_{t+\tau}$$

$$b_0 = \frac{1}{3}(y_{t-3} + y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + y_{t+3}) - \frac{1}{21}(9y_{t-3} + 4y_{t-2} + y_{t-1} + y_{t+1} + 4y_{t+2} + 9y_{t+3})$$

$$b_0 = \frac{1}{21}(7y_{t-3} + 7y_{t-2} + 7y_{t-1} + 7y_t + 7y_{t+1} + 7y_{t+2} + 7y_{t+3}) + \frac{1}{21}(-9y_{t-3} - 4y_{t-2} - y_{t-1} - y_{t+1} - 4y_{t+2} - 9y_{t+3})$$

(2.59) $$b_0 = \frac{1}{21}(-2y_{t-3} + 3y_{t-2} + 6y_{t-1} + 7y_t + 6y_{t+1} + 3y_{t+2} - 2y_{t+3})$$

Váhový vektor pro b_0 má tedy tvar $b_0 = y_t\left[\frac{-2}{21},\frac{3}{21},\frac{6}{21},\frac{7}{21}\right]$.

Podobně pro b_2 máme z druhé rovnice e stejné podsoustavy

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{21} & \frac{1}{84} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau}\tau^2 \end{pmatrix}$$

(2.60) $$b_2 = -\frac{1}{21}\sum_{\tau=-3}^{3} y_{t+\tau} + \frac{1}{84}\sum_{\tau=-3}^{3}\tau^2 . y_{t+\tau}$$

Tedy pro b_2 dostaneme

(2.61C)

$$b_2 = -\frac{1}{21}(y_{t-3} + y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + y_{t+3}) + \frac{1}{84}(9y_{t-3} + 4y_{t-2} + y_{t-1} + y_{t+1} + 4y_{t+2} + 9y_{t+3})$$

$$b_2 = \frac{1}{84}(-4y_{t-3} - 4y_{t-2} - 4y_{t-1} - 4y_t - 4y_{t+1} - 4y_{t+2} - 4y_{t+3}) + \frac{1}{84}(9y_{t-3} + 4y_{t-2} + y_{t-1} + y_{t+1} + 4y_{t+2} + 9y_{t+3})$$

(2.61) $$b_2 = \frac{1}{84}(5y_{t-3} - 3y_{t-1} - 4y_t - 3y_{t+1} + 5y_{t+3})$$

Váhový vektor pro b_0 má tedy tvar $b_0 = y_t\left[\frac{5}{84},0,\frac{-3}{84},\frac{-4}{84},\frac{-3}{84},0,\frac{5}{84}\right]$.

Pro výpočet „symetrických“ (kolem nuly) konečných součtů sudých mocnin přirozených čísel lze využít následující vzorce:

$$\sum_{j=-m}^{m} j^2 = \frac{p(p^2-1)}{12} \qquad \sum_{j=-m}^{m} j^4 = \frac{p(p^2-1)(3p^2-7)}{240}$$

Tedy speciálně pro $m = 2 \Rightarrow p = 5$ **máme** $\sum_{j=-2}^{2} j^2 = \frac{5(5^2-1)}{12} = \frac{5.24}{12} = 10$

podobně pro $m = 3 \Rightarrow p = 7$ **máme** $\sum_{j=-3}^{3} j^2 = \frac{7(7^2-1)}{12} = \frac{7.48}{12} = 28$

a také pro $m = 4 \Rightarrow p = 9$ **máme** $\sum_{j=-4}^{4} j^2 = \frac{9(9^2-1)}{12} = \frac{9.80}{12} = 60$

Tedy speciálně pro $m = 2 \Rightarrow p = 5$ **máme** $\sum_{j=-2}^{2} j^4 = \frac{5(5^2-1)(3.5^2-7)}{240} = \frac{5.24.68}{240} = 34$

podobně pro $m = 3 \Rightarrow p = 7$ **máme** $\sum_{j=-3}^{3} j^2 = \frac{7(7^2-1)(3.7^2-7)}{240} = \frac{7.48.140}{240} = 196$

a také pro $m = 4 \Rightarrow p = 9$ **máme** $\sum_{j=-4}^{4} j^2 = \frac{9(9^2-1)(3.9^2-9)}{240} = \frac{9.80.234}{240} = 702$

Pro výpočet vah u klouzavých průměrů lze užít tento vzorec:

(2.71A,B) $w_i = \frac{3}{4p(p^2-4)}.\left[3p^2 - 7 - 20j^2\right]$, **kde** $j = -m, -m+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots. m-1, m$

Zřejmě jsou tyto váhy symetrické, tzn., že platí $w_i = w_{-i}$ a rovněž platí $\sum_{j=-m}^{m} w_j = 1$

ověření platnosti $\sum_{j=-m}^{m} w_j = 1$:

$$\sum_{j=-m}^{m} w_i = \sum_{j=-m}^{m} \frac{3}{4p(p^2-4)}.\left[3p^2-7-20j^2\right] = \sum_{j=-m}^{m} \frac{3}{4p(p^2-4)}.\left[3p^2-7\right] - \sum_{j=-m}^{m} \frac{3}{4p(p^2-4)}.20j^2$$

$$= \frac{3}{4p(p^2-4)}.\left[3p^2-7\right](2m+1) - \frac{3}{4p(p^2-4)} \sum_{j=-m}^{m} 20j^2$$

$$= \frac{3}{4p(p^2-4)}\left\{.\left[3p^2-7\right]p - 20.\sum_{j=-m}^{m} j^2\right\} = \frac{3}{4p(p^2-4)}\left\{.\left[3p^2-7\right]p - 20\frac{p\left(p^2-1\right)}{12}\right\}$$

$$= \frac{3}{4p^3-16p}.\left[3p^3 - 7p - \frac{5\left(p^3-p\right)}{3}\right] = \frac{3}{4p^3-16p}.\left[\frac{4p^3-16p}{3}\right] = 1.$$

□ .

Vzorec (2.71A,B) můžeme uplatnit k výpočtu vah u sedmičlenného kl.průměru:

j	*j*^{2}	*20j*^{2}	*3p*^{2}*-7-20j*^{2}	w_j	$w_j=21w_j$
-3	9	180	-40	-0,09524	-2
-2	4	80	60	0,14286	3
-1	1	20	120	0,28571	6
0	0	0	140	0,33333	7
1	1	20	120	0,28571	6
2	4	80	60	0,14286	3
3	9	180	-40	-0,09524	-2
0			420	1	21

p	7
3p^2-7	140
4p^3-16p	1260
3/(4p^3-16p)	0,00238

Podobně pro podsoustavu rovnic pro (2.56B), (2.56D), ze které můžeme odvodit parametry b_1 , b_3 máme příslušné maticové vyjádření

(2.62) $$\begin{pmatrix} 28 & 196 \\ 196 & 1588 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-3}^{3} \tau . y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-3}^{3} \tau^3 . y_{t+\tau} \end{pmatrix}$$ **, tedy** $$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 196 \\ 196 & 1588 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau . y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^3 . y_{t+\tau} \end{pmatrix}$$

(2.63) $$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{44464 - 38416} \begin{pmatrix} 1588 & -196 \\ -196 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-3}^{3} \tau . y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-3}^{3} \tau^3 . y_{t+\tau} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6048} \begin{pmatrix} 1588 & -196 \\ -196 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-3}^{3} \tau . y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-3}^{3} \tau^3 . y_{t+\tau} \end{pmatrix} = \frac{1}{216} \begin{pmatrix} 1588 & -7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-3}^{3} \tau . y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-3}^{3} \tau^3 . y_{t+\tau} \end{pmatrix}$$

(2.65A) $$b_1 = \frac{130}{506} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau . y_{t+\tau} - \frac{34}{506} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^3 . y_{t+\tau}$$???????????

(2.65B) $$b_1 = \frac{-34}{506} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau . y_{t+\tau} + \frac{5}{506} \sum_{\tau=-2}^{2} \tau^3 . y_{t+\tau}$$??????????