Kromě možnosti aplikovat metodu klouzavých průměrů, která může časovou řadu významně a účinně sezónně očistit, (např. pomocí měsíčních centrovaných klouzavých průměrů při aplikaci na měsíční sezónní pozorování)**, při podrobnější analýze sezónnosti by se navíc ještě měly identifikovat/**separovat **tzv.** ***sezónní faktory*** $I_1, I_2, ..., I_s$**, kde *s* označuje délku** (počet období za rok) **sezóny, tj. např. *s=12* v případě časové řady s měsíčními pozorováními či *s=4* v případě časové řady čtvrtletních pozorování, které v jednotlivých sezónách modelují sezónní složku a které lze využít nejen pro sezónní očištění, ale také pro konstrukce předpovědí.**

Přitom **se předpokládá, že sezónnost je v průběhu sledovaného období pravidelná, aby její modelování pravidelně se opakujícími sezónními faktory bylo oprávněné.**

Pro sezónní faktory platí:

Jednotky, ve kterých jsou sezónní faktory měřeny, závisí na tom, zda je příslušná dekompozice

- aditivní (ve specifikaci $y_t = Tr_t + S_t + E_t$).

Sezónní faktor I_t se vyjadřuje ve stejných jednotkách jako příslušná časová řada. (např. prosincový sezónní faktor maloobchodního prodeje ve výši *4,4 mld.Kč* znamená, že sezónnost se projeví prosincovým nárůstem měsíční řady maloobchodního prodeje o *4,4 mld. Kč* nad běžný měsíční průměr roku.)

- multiplikativní (ve specifikaci $y_t = Tr_t * S_t * E_t$)

Sezónní faktor I_t je zde bezrozměrná veličina (např. prosincový sezónní faktor maloobchodního prodeje ve výši 1,28 znamená, že sezónnost se projeví prosincovým nárůstem tržeb v prodejnách o 28% oproti běžnému měsíčnímu průměru roku.)

Poznámka 1 **Pro multiplikativní dekompozici je charakteristické, že sezónní výkyvy se zvětšují** (resp. zmenšují) **pro rostoucí** (resp. klesající) **trend, a to i tehdy, když se multiplikativní sezónní faktory v jednotlivých sezónách pravidelně opakují. V případě aditivní dekompozice sezónní výkyvy na monotónním průběhu trendu** v podstatě **nezávisejí.**

Poznámka 2

Trendová a sezónní složka nejsou navzájem určeny jednoznačně: jednu z nich můžeme do určité míry navýšit, pokud to vykompenzujeme zmenšením druhé a naopak. **Tato nejednoznačnost se odstraní zavedením tzv.** ***normalizačního pravidla*** (opět ale závisejícího na tom, zda je zvolena aditivní nebo multiplikativní dekompozice):

- aditivní: součet sezónních faktorů pro každou sezónu je roven nule: tj.pro $j \geq 0$

(1) $I_{1+12j} + I_{2+12j} + I_{3+12j} + ... + I_{12+12j} = 0$ **pro měsíční pozorování.**

- multiplikativní: součin sezónních faktorů pro každou sezónu je roven 1: tj. $j \geq 0$

(2) $I_{1+12j} * I_{2+12j} * I_{3+12j} * .... * I_{12+12j} = 1$ **(nebo 12) pro měsíční pozorování.**

Logaritmujeme-li v tomto druhém případě (2), dostaneme obdobu (1)

(1*) $\ln I_{1+12j} + \ln I_{2+12j} + \ln I_{3+12j} + ... + \ln I_{12+12j} = 0$

Aditivní dekompozice sezónní složky

1) Zkonstruují se centrované klouzavé průměry $\tilde{y}_t^{(12)}$ **v případě měsíčních pozorování,** (resp. $\tilde{y}_t^{(4)}$ v případě čtvrtletních pozorování) **z „vnitřních" pozorování. Jako vyrovnané počáteční a koncové hodnoty řady lze** např. **zopakovat první a poslední** (spočitatelný) **klouzavý průměr** (při menším počtu pozorování).

2) Takto zkonstruované klouzavé průměry lze považovat za hrubý odhad trendové složky, který nám umožní časovou řadu očistit od trendu.

(3) $$dy_t = y_t - \tilde{y}_t^{(12)}$$

3) Určíme (tzv.necentrované) ***sezónní diference*** $I_1^*, I_2^*, \ldots, I_{12}^*$; **přitom** (necentrovanou) **sezónní diferenci** I_j^* **pro *j*-tý měsíc v roce odhadneme jako aritmetický průměr všech** těch **hodnot** y_t, $j = 1,2,3,\ldots,12$, **časové řady, které odpovídají *j*-tému měsíci v roce: Máme-li *n* pozorování řady rozdělených do 12xr měsíců, pak**

$$I_j^* = \frac{1}{r}\left(dy_j + dy_{12+j} + dy_{24+j} + dy_{36+j} + \ldots + dy_{12(r-1)+j}\right)$$ **, kde**

r je počet let časové řady

4) Provedeme „centrování„ hodnot $I_1^*, I_2^*, \ldots, I_{12}^*$ **jejich odečtením od jejich aritmetického průměru**

(4) $$I_j = I_j^* - \bar{I}^* = I_j^* - \frac{\sum_{j=1}^{12} I_j^*}{12}\ ;\ j = 1,2,3,\ldots,12\ ,$$

aby bylo splněno *normalizační pravidlo* (1).

5) Provede se finální sezónní očištění časové řady odečtením

(5) $$\hat{y}_t^{(12)} = y_t - I_j$$ **, kde**

index *t* odpovídá *j*-tému měsíci v roce. Poznámka.: I_j **již nezávisí (přímo) na *t*.**

Multiplikativní dekompozice sezónní složky

1) Zkonstruují se centrované klouzavé průměry $\tilde{y}_t^{(12)}$ (v případě měsíčních pozorování), resp. $\tilde{y}_t^{(4)}$, **shodně jako při aditivní dekompozici řady**

2) Provede se trendové očištění dané řady, tentokrát ale podílovým způsobem, získají se *sezónní poměry/indexy*

(6) $$qy_t = \frac{y_t}{\tilde{y}_t^{(12)}}$$

3) Určíme (necentrované) **sezónní indexy** $I_1^{\$}, I_2^{\$}, \ldots, I_{12}^{\$}$; **přitom** (necentrovaný) **sezónní faktor** $I_j^{\$}$ **pro j-tý měsíc v roce určíme jako *aritmetický* průměr všech těch hodnot** qy_t, **které odpovídají *j*-tému měsíci v roce.** $j = 1,2,3,\ldots,12$ **. Máme-li *n* pozorování řady rozdělených do 12xr měsíců, pak**

$$I_j^{\$} = \frac{1}{r}\left(qy_j + qy_{12+j} + qy_{24+j} + \ldots + qy_{12(r-1)+j}\right)$$

4) Provedeme centrování hodnot sezónních indexů $I_1^\$, I_2^\$, \ldots, I_{12}^\$$ vydělením jejich geometrickým průměrem

(7) $$I_j = \frac{I_j^\$}{\bar{I}^\$} = \frac{I_j^\$}{\sqrt[12]{\prod_{j=1}^{12} I_j^\$}}$$; $j = 1,2,3,\ldots,12$, opět proto, aby bylo

splněno normalizační pravidlo (2).

5) Provede se finální sezónní očištění časové řady tak, že původní hodnoty řady podělíme příslušnými sezónními indexy:

(8) $$\hat{y}_t^{(12)} = \frac{y_t}{I_j},$$ kde

index *t* odpovídá *j*-tému měsíci v roce,

Regresní přístupy k sezónnosti

Tyto postupy se od předchozích liší propracovanějším modelováním sezónních faktorů pomocí regresních modelů. Uplatňují se při nich sezónní umělé (anglicky *„dummy„*) proměnné, které vstupují jako vysvětlující veličiny do regresních rovnic, které pracují se čtvrtletními nebo měsíčními časovými řadami.

Sezónnost modelovaná pomocí kvalitativní proměnné

Při aditivní podobě sezónnosti se často sezónnost modeluje jako ***kvalitativní proměnná s použitím*** $s-1$ umělých (*„dummy„*[1]) proměnných, přičemž *s* je délka sezóny, která je obsažena v časové řadě. Jako příklad by mohla sloužit *aditivní sezónní dekompozice s lineárním trendem* pro časovou řadu čtvrtletních pozorování y_t. Příslušný regresní model lze pak formulovat ve tvaru

(9) $$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \alpha_2 . x_{t2} + \alpha_3 . x_{t3} + \alpha_4 . x_{t4} + \varepsilon_t$$, kde umělé

proměnné jsou definovány jako vektory[2]

(9) $$x_{t2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix} \quad x_{t3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix} \quad x_{t4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

[1] Z mnoha možností překladů tohoto slova by asi nejlépe hodilo *atrapové, fiktivní* , možná *vycpávací*

[2] Délka těchto nula-jedničkových vektorů je přirozeně rovna počtu pozorování časové řady

Odhadnutý regresní model s OLS-odhady parametrů $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ **lze** mj. jiné **použít ke konstrukci bodových a intervalových předpovědí jako v kterémkoliv jiném regresním modelu s tím, že budoucí hodnoty umělých proměnných ihned dostaneme přirozeným rozšířením předchozího schématu na předpovědní horizont.** (Zde se jedná o ***předpovědi*** typu ***ex ante***). **Pokud se jedná o sezónní očištění, pak je navíc potřebné zohlednit normalizační pravidlo, např. takovým způsobem, že odhadnutý trend a sezónní faktory upravíme do tvaru**

$\hat{Tr}_t = b_0 + \bar{a} + b_1.t$, $I_1 = -\bar{a}$, $I_2 = a_2 - \bar{a}$, $I_3 = a_3 - \bar{a}$, $I_4 = a_4 - \bar{a}$, **kde**

(10) $$\bar{a} = \frac{a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

Poznámka: při tomto postupu není tedy odhadnutý regresní koeficient $a_j, j = 2,3,4$ **přímo sezónním indexem, nýbrž tento index je uvažován relativně vůči „průměru„** [3] $\bar{a}$

Při této normalizaci je zřejmě splněno normalizační pravidlo (1), protože

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -\bar{a} + (a_2 - \bar{a}) + (a_3 - \bar{a}) + (a_4 - \bar{a}) = -4.\bar{a} + a_2 + a_3 + a_4 = 0.$$

[3] **Nejde o aritmetický průměr tří hodnot/regresních koeficientů** $a_j, j = 2,3,4$**, nýbrž o ¾ jejich součtu. Může být přirozeně i záporný.**

Aplikace klouzavých průměrů k identifikaci trendové složky

1) mechanické vyrovnávání prostými klouzavými průměry:

2) vyrovnávání pomocí polynomů k-tého (nevelkého) stupně :

Aplikace klouzavých průměrů k identifikaci sezónní složky

Máme-li řadu pozorovaných hodnot y_t **a klouzavým průměrem vyrovnaných hodnot** $\hat{y}_t$**, můžeme se pokusit jednoduchým způsobem určit** (nebo aspoň přibližně odhadnout) **míru sezónního kolísání časové řady (pokud jde o časovou řadu, která vykazuje sezónnost a pokud jsou její hodnoty registrovány v měsíčních nebo čtvrtletních časových odstupech).**

Uvažujme případ čtvrtletní časové řady (n ... počet pozorování za rok = 4)

(Analogicky bychom postupovali u roční sezónnosti při n = 12) :

A) v případě aditivního modelu sezónnosti : $y_t = Tr_t + S_t + \varepsilon_t$

lze nejjednodušeji uplatnit např. tento postup: Vytvoříme individuální odchylky d_t **hodnot časové řady** y_t **od trendu** Tr_t **pro všechna *t*. Sdružíme** (po čtveřicích) **hodnoty odchylek u stejnolehlých čtvrtletí a tyto zprůměrujeme (přes počet let, které obsahuje datový vzorek):**

$$d^{(1)} = \frac{1}{k}\left(d_t + d_{t+4} + d_{t+8} + d_{t+12} + \dots\right)$$

$$d^{(2)} = \frac{1}{k}\left(d_{t+1} + d_{t+5} + d_{t+9} + d_{t+13} + \dots\right)$$

$$d^{(3)} = \frac{1}{k}\left(d_{t+2} + d_{t+6} + d_{t+10} + d_{t+14} + \dots\right)$$

$$d^{(4)} = \frac{1}{k}\left(d_{t+3} + d_{t+7} + d_{t+11} + d_{t+15} + \dots\right)$$

Hodnoty $d^{(1)}, d^{(2)}, d^{(3)}, d^{(4)}$ **nazýváme** ***sezónní diference*****, přičemž je lze považovat za odhady skutečných** (aditivně chápaných) ***sezónních faktorů*****.** Je zřejmé, že **některé z hodnot** $d^{(1)}, d^{(2)}, d^{(3)}, d^{(4)}$ **budou kladné, jiné záporné** (neutrální hodnota je 0)**. Pro** tyto **sezónní diference platí:** $d^{(1)} + d^{(2)} + d^{(3)} + d^{(4)} = 0.$

B) v případě multiplikativní sezónnosti : $y_t = Tr_t * S_t * \varepsilon_t$

lze analogicky **uplatnit tento jednoduchý postup: vytvoříme podíly** $q_t = \hat{y}_t / y_t$ **pro všechna** t**. Tyto sdružíme po shodných čtvrtletích tak, že vynásobíme hodnoty stejnolehlých čtvrtletí** v příslušných letech **a výsledek odmocníme hodnotou rovnou počtu let** r **:**

$$q^{(1)} = \sqrt[r]{q_t * q_{t+4} * q_{t+8} * q_{t+12} * \dots}$$

$$q^{(2)} = \sqrt[r]{q_{t+1} * q_{t+5} * q_{t+9} * q_{t+13} * \dots}$$

$$q^{(3)} = \sqrt[r]{q_{t+2} * q_{t+6} * q_{t+10} * q_{t+14} * \dots}$$

$$q^{(4)} = \sqrt[r]{q_{t+3} * q_{t+7} * q_{t+11} * q_{t+15} * \dots}$$

Získané 4 hodnoty $q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}, q^{(4)}$ **se nazývají *sezónní poměry* a lze je považovat za odhady** (tentokrát multiplikativně pojatých) ***sezónních faktorů*.** Je přitom zřejmé, že **některé z hodnot** $q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}, q^{(4)}$ **budou větší než 1, jiné menší než 1** (neutrální hodnota je 1) **. Pro tyto sezónní poměry platí:** $q^{(1)}.q^{(2)}.q^{(3)}.q^{(4)} = 1$.

Klouzavé průměry hrají významnou roli při očišťování časových řad od sezónních vlivů, jakož i v některých dalších úlohách analýzy časových řad (např.filtrace). Zde se setkáváme i s některými speciálně zkonstruovanými algoritmy , jimž jsou např.

- *Spencerův patnáctičlenný vzorec* s váhovou strukturou

$$\frac{1}{320}\left[-3,-[illegible],-[illegible],3,21,46,67,74,67,46,21,3,-[illegible],-[illegible],-[illegible]\right]$$

- *Spencerův jednadvacetičlenný vzorec* s váhovou strukturou

$$\frac{1}{320}\left[-[illegible],-[illegible],-[illegible],-[illegible],-[illegible],6,18,33,47,57,60,57,47,33,18,6,-[illegible],-[illegible],-[illegible],-[illegible],-[illegible]\right]$$

Již před půlstoletím byla otázce optimálních postupů při sezónním očišťování časových řad věnována značná pozornost. Ve Spojených státech byla (v 50.letech 20.století) za tímto účelem dokonce založena agentura U.S.Bureau of the Census. Známé jsou např. postupy CensusX11 (případně CensusX11Q) a Census X12. Algoritmy jsou charakteristické zejména tím, že se na danou časovou řadu aplikuje po sobě několik speciálně vzatých klouzavých průměrů, které tak tvoří kombinovaný *filtr*.

Pro ekonomické časové řady se v poslední době často **používá *Hodrick-Prescottův filtr* (uplatněný např. v *software Eviews*), ve kterém se pro danou časovou řadu** $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_t$ **sestaví řada vyrovnaných hodnot** $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \ldots, \hat{y}_t$ **na základě minimalizačního kritéria**

$$Min \sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\hat{y}_t\right)^2+\lambda\sum_{t=2}^{n-1}\left[\left(\hat{y}_{t+1}-\hat{y}_t\right)-\left(\hat{y}_t-\hat{y}_{t-1}\right)\right]^2$$ **, kde kladná**

konstanta λ **řídí stupeň vyhlazení řady (pro** $\lambda \to \infty$ **) postup zřejmě eliminuje lineární trend.**

Jiné postupy určení sezónnosti vycházejí z postupů *harmonické analýzy* (Burman)