Trendy s konstantními parametry

Obecně lze trendové funkce lze rozdělit v podstatě **do dvou skupin:**

A. trendy lineární v parametrech *(a nelineární pouze v proměnných)*

V tomto případě lze trendovou složku psát ve tvaru *funkce lineární v parametrech*

(1) $$Tr_t = y_t = \beta_0 + \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t) + \beta_3 f_3(t) ... + \beta_k f_k(t)$$

tzn . ve tvaru *lineárně-aditivního schématu* případně

(2) $$Tr_t = g(y_t) = \beta_0 + \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t) + \beta_3 f_3(t) ... + \beta_k f_k(t) + \varepsilon_t$$

Vztah (2) se nazývá tvar *lineární v parametrech po transformaci vysvětlované proměnné* nebo také (podle **W.Eichhorn**a) ***zobecněná kvazilineární funkce.***[1]

Výpočet parametrů trendových funkcí lineárních v parametrech* (1)** nečiní problém a **provádí se** *prostou* ***metodou nejmenších čtverců MNČ/OLS. **Protože** všechny **vysvětlující proměnné jsou nestochastické, je situace s respektováním podmínek *standardního lineárního regresního modelu* usnadněna:**

a) Přítomnost jedničkového vektoru zajišťuje nulovou střední hodnotu náhodných složek ε_t**. (Konstantu** β_0 **lze interpretovat jako výchozí úroveň ukazatele v čase 0)**

b) Je automaticky **zajištěna *nestochastičnost*** všech **vysvětlujících proměnných (jde** zpravidla **o jednoduché transformace trendu). Není proto třeba ověřovat** pro *konzistenci odhadové funkce* **nutnou podmínku** $E(x_{tj}, \varepsilon_t) = 0$ **, protože** ta **je zde splněna vždy.**

c) V „matici plánu„ $[t, f_1(t), ... f_k(t)]$ **se nemohou vyskytnout přesné lineární závislosti mezi „vysvětlujícími„ proměnnými** (takže **nemůže vzniknout *problém multikolinearity***)[2]**. Pokud navíc nevolíme funkce** f_j **příliš „blízké“ (např.** $t^{7/8}$ **a** $t^{8/9}$ **), nehrozí ani *multikolinearita přibližná*.**

V obou předchozích případech přijímáme aditivní připojení náhodné složky ε_t**, takže stochastický/regresní tvar trendové (1) funkce je tedy**

(1St) $$y_t = \beta_0 + \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t) + \beta_3 f_3(t) ... + \beta_k f_k(t) + \varepsilon_t$$ a obdobně

Stochastický/regresní tvar trendové (2) závislosti je

(2St) $$g(y_t) = \beta_0 + \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t) + \beta_3 f_3(t) ... + \beta_k f_k(t) + \varepsilon_t$$.

---

[1] ***Kvazilineární funkce* může být zapsána schématem**

$$F(x_1, ..., x_s, ..., x_n) = g^{-1}(a + b_1 g(x_1) + ... + b_n g(x_n)) \text{ ,}$$ **kde**

g **je spojitá monotónní funkce a dále** a , $b_1, ..., b_n$ **jsou vhodné konstanty (**a **nenulové).**

Zobecněnou kvazilineární funkci F **lze zapsat ve tvaru:**

$$F(x_1, ..., x_s, ..., x_n) = h(f_1(x_1), ..., f_s(x_s), ..., f_n(x_n)) \text{ ,}$$ **kde**

$f_1, ..., f_n$ **jsou vesměs spojité a ryze monotónní funkce. Oproti *kvazilineární* funkci se nevyžaduje symetrie vnitřních funkcí** g_i , $i = 1, ..., n$ **vůči jednotlivým argumentům.**

[2] **S přirozenou podmínkou, že funkce** $f_1(t), .., f_k(t)$ **jsou vzájemně různé.**

Standardní OLS-kritérium pro výpočet trendových parametrů má tvar

pro případ **(1St)** $Min \sum_{t=1}^{n} [y_t - \hat{y}_t]^2 = Min \sum_{t=1}^{n} \left[y_t - \sum_{j=1}^{k} \beta_j f_j(t) \right]^2$ přes $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ **, ale**

pro případ **(2St)** $Min \sum_{t=1}^{n} [g(y_t) - g(\hat{y}_t)]^2 = Min \sum_{t=1}^{n} \left[g(y_t) - g\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j f_j(t) \right) \right]^2$

V jednom i ve druhém případě lze užít *prostou* ***metodou nejmenších čtverců MNČ/OLS*** **bez korekcí, avšak za uvědomění stojí, že v případě (4) OLS-kritérium** ne**minimalizuje rozdíl** prostých, nýbrž **transformovaných** (funkcí g) **pozorovaných** y_t **a vyrovnaných** $\hat{y}_t$ **hodnot** časové řady.[3]

B. trendy nelineární v parametrech *(případně nelineární i v proměnných)* .

V tomto obecném případě lze trendovou funkci psát ve tvaru

(3) $Tr_t = y_t = h(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_k, f_1(t), f_2(t), ..., f_r(t))$

případně ještě obecněji

(4) $Tr_t = g(y_t) = h(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_k, t)$.

Odpovídající stochastická specifikace tvar trendové (3) funkce je následně

(3St) $y_t = h(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_k, f_1(t), f_2(t), ..., f_r(t)) + \varepsilon_t$ a obdobně

Stochastický/regresní tvar trendové (4) závislosti je pak

(4St) $Tr_t = g(y_t) = h(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_k, t) + \varepsilon_t$.

V tomto případě již **nelze k výpočtu parametrů** (tzn. k jejich konzistentnímu odhadu) **použít standardní** ***OLS-odhadovou funkci*****. K minimalizaci výrazu (4) je zapotřebí** (s výjimkou ojedinělých příznivých podob nelinearity) **uplatnit některou z metod nelineární optimalizace, jako je** ***NLLS*** **(*****nelineární metoda nejmenších čtverců*****) nebo NLLAD (*****nelineární metoda nejmenších absolutních odchylek*****) s kritérii**

pro specifikaci (4St) a ***NLLS***

$$Min \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = Min \sum_{t=1}^{n} [y_t - \hat{y}_t]^2 = Min \sum_{t=1}^{n} \left[y_t - \hat{h}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k, t) \right]^2$$ přes $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$

resp. pro specifikaci (4St) a NLLAD

$$Min \sum_{t=1}^{n} |e_t| = Min \sum_{t=1}^{n} |y_t - \hat{y}_t| = Min \sum_{t=1}^{n} \left| y_t - \hat{h}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k, t) \right|$$ přes $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$

Poznámka: Nejobecnější myslitelný tvar trendové nelineární specifikace by byl

(4St) $G(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_k, t, \varepsilon_t) = 0$.

Ten je však natolik neurčitý a výpočetně problematický, že se neužívá.

[3] Odhady parametrů získané pomocí jednoho a druhého kritéria tedy nebudou obecně shodné.

Je patrné, že *konzistentní odhad trendových parametrů dostaneme* v prvém případě **nasazením *prosté metody nejmenších čtverců OLS*, zatímco** ve druhém **je nutné uplatnit *nelineární*** *prostou* ***metodu nejmenších čtverců NLLS.***

Alternativním postupem pro výpočet trendových parametrů může dále být např. *metoda nejmenších absolutních odchylek LAD*, jejíž minimalizační kritérium je

pro případ (3) $$Min \sum_{t=1}^{n} \left| y_t - \hat{y}_t \right| = Min \sum_{t=1}^{n} \left| y_t - \sum_{j=1}^{k} \beta_j f_j(t) \right|$$

pro případ (4) $$Min \sum_{t=1}^{n} \left| g(y_t) - g(\hat{y}_t) \right| = Min \sum_{t=1}^{n} \left| g(y_t) - g\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j f_j(t) \right) \right| \quad .$$

Nejpoužívanější matematické funkce při trendovém vyrovnání/extrapolaci

1. Lineární trend $y_t = \beta_0 + \beta_1 . t$

indikace přítomnosti: **první diference** $y_{t+1} - y_t$ **jsou přibližně konstantní**

2. Kvadratický trend $y_t = \beta_0 + \beta_1 . t + \beta_2 . t^2$

indikace přítomnosti: **druhé diference** $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$ **jsou zhruba konstantní**

3. Kubický trend $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$

indikace přítomnosti: **třetí diference** $y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t$ **jsou zhruba konstantní**

3. Polynomický trend s-tého stupně $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \ldots + \beta_s t^s$

indikace přítomnosti: **diference s-tého stupně jsou přibližně konstantní**

4. Mocninný trend $y_t = \beta_0 t.^{\beta_1}$

indikace přítomnosti:

5a Logaritmický trend $y_t = \beta_0 + \beta_1 . ln(t)$

indikace přítomnosti:

5. Exponenciální trend $y_t = \alpha\beta^t$ [$\alpha > 0, zpravidla \;\; \beta > 1$]

indikace přítomnosti: **podíly sousedních hodnot** y_{t+1} / y_t **resp. první diference logaritmů** $ln\, y_{t+1} - ln\, y_t$ **jsou přibližně konstantní.**

6. Modifikovaný exponenciální trend $y_t = \gamma + \alpha\beta^t$

indikace přítomnosti: **podíly** sousedních **prvních diferencí** $(y_{t+2} - y_{t+1})/(y_{t+1} - y_t)$ **jsou přibližně konstantní**

7. Logistický trend $y_t = \dfrac{\gamma}{1 + \alpha . \beta^t}$ s parametry $\beta > 0, \gamma > 0$

indikace přítomnosti: **a) histogram prvních diferencí** $y_{t+1} - y_t$ **je tvarem podobná křivce (hustotě)** normovaného **normálního rozdělení** $N(0,1)$.

b) podíly sousedních **prvních diferencí reciprokých hodnot** $(1/y_{t+2} - 1/y_{t+1})/(1/y_{t+1} - 1/y_t)$ **jsou přibližně konstantní.**

Inflexní bod logistické křivky je v bodě $t^* = -\dfrac{ln(\alpha)}{ln(\beta)}$

8. Gompertzův trend $ln(y_t) = \gamma + \alpha . \beta^t$ nebo ekvivalentně $y_t = exp\left(\gamma + \alpha . \beta^t\right)$ $[\beta > 0]$

indikace přítomnosti: **podíly prvních logaritmovaných diferencí** $(ln\, y_{t+2} - ln\, y_{t+1})/(ln\, y_{t+1} - ln\, y_t)$ **jsou přibližně konstantní**

Inflexní bod má Gompertzova křivka v bodě $t^* = -\dfrac{ln(-\alpha)}{ln(\beta)}$

9a. Odmocninný trend $y_t = \beta_0 + \beta_1 . \sqrt{t}$

indikace přítomnosti:

9b. Hyperbolický trend

$$y_t = \beta_0 + \frac{\beta_1}{t}$$

4. Mocninný trend

$$y_t = \beta_0 t.^{\beta_1} \qquad ln\, y_t = ln\, \beta_0 + \beta_1\, ln(\, t\,)$$

indikace přítomnosti:

$$y_{t+1} = \beta_0 (t+1)^{\beta_1}$$

$$y_{t+1} / y_t = \beta_0 (t+1)^{\beta_1} / \beta_0 (t)^{\beta_1} = \left(\frac{t+1}{t}\right)^{\beta_1} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\beta_1}$$

$$ln\, y_{t+1} = ln\, \beta_0 + \beta_1\, ln(\, t\,) \qquad ln\, y_t = ln\, \beta_0 + \beta_1\, ln(\, t\,)$$

$$ln\, y_{t+1} - ln\, y_t = \beta_1\, ln(\, t+1\,) - \beta_1\, ln(\, t\,) = \beta_1\, ln\, \frac{t+1}{t} = \beta_1\, ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$ **závisí na t.**

Diferencované logaritmy konvergují s rostoucím t k nule

5a Logaritmický trend

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 .ln(t) \qquad exp\;\; y_t = exp\;\; \beta_0 .t^{\beta_1}$$

indikace přítomnosti:

$$y_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 .ln(t+1)$$

$$y_{t+1} - y_t = \beta_1 .ln(t+1) - \beta_1 .ln(t) = \beta_1\, ln\, \frac{t+1}{t} = \beta_1\, ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

$$e^{y_{t+1}} - e^{y_t} = \beta_1 .ln(t+1) - \beta_1 .ln(t) = \beta_1\, ln\, \frac{t+1}{t}$$ **závisí na t.**

Diference „expomocnin„ konvergují s rostoucím t k nule

1A) výpočet parametrů lineárního trendu

$$Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

Pro jejich určení lze nejsnáze uplatnit výraz pro *OLS-minimalizační kritérium* z výchozí regresní specifikace (3)

$$Min \sum_{t=1}^{n}[y_t-\hat{y}_t]^2 = Min \sum_{t=1}^{n}\left[y_t-\sum_{j=1}^{2}\beta_j f_j(t)\right]^2$$, zde konkretizované na

(21) $$Min \sum_{t=1}^{n}[y_t-\hat{y}_t]^2 = Min \sum_{t=1}^{n}[y_t-\beta_0-\beta_1.t]^2 \quad .$$

a) Uplatněním standardního postupu – derivováním (21) podle obou neznámých parametrů dostaneme soustavu dvou nutných podmínek extrému

(22A,B) $$2\sum_{t=1}^{n}[y_t-\beta_0-\beta_1.t](-1)=0$$, resp. $$2\sum_{t=1}^{n}[y_t-\beta_0-\beta_1.t](-t)=0$$

a po očividných úpravách

$$\sum_{t=1}^{n}[y_t-\beta_0-\beta_1.t]=0$$, resp. $$\sum_{t=1}^{n}[y_t-\beta_0-\beta_1.t].t=0$$ neboli

(23A,B) $$\sum_{t=1}^{n}y_t-\beta_0.n-\beta_1\sum_{t=1}^{n}t=0$$, resp. $$\sum_{t=1}^{n}ty_t-\beta_0.\sum_{t=1}^{n}t-\beta_1\sum_{t=1}^{n}t^2=0$$

Přeskupením výrazů na obou stranách dospějeme k *soustavě normálních rovnic* pro odhadnuté parametry $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$ - zde značené b_0,b_1 - ve tvaru

(24A) $$b_0.n+b_1\sum_{t=1}^{n}t=\sum_{t=1}^{n}y_t$$

(24B) $$b_0.\sum_{t=1}^{n}t+b_1\sum_{t=1}^{n}t^2=\sum_{t=1}^{n}ty_t$$, jejímž řešením je dvojice

(25A,B) $$b_0=\frac{\sum_{t=1}^{n}t^2.\sum_{t=1}^{n}y_t-\sum_{t=1}^{n}t.\sum_{t=1}^{n}ty_t}{n.\sum_{t=1}^{n}t^2-\left(\sum_{t=1}^{n}t\right)^2} \qquad b_1=\frac{n.\sum_{t=1}^{n}ty_t-\sum_{t=1}^{n}t.\sum_{t=1}^{n}y_t}{n.\sum_{t=1}^{n}t^2-\left(\sum_{t=1}^{n}t\right)^2}$$

Po úpravách součtových výrazů $\sum_{t=1}^{n}t=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{t=1}^{n}t^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ a vydělením čitatele i jmenovatel n dostaneme pro b_1

(26) $$b_1=\frac{\sum_{t=1}^{n}ty_t-\frac{(n+1)}{2}.\sum_{t=1}^{n}y_t}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)^2}{4}}=\frac{\sum_{t=1}^{n}ty_t-\frac{(n+1)}{2}.\sum_{t=1}^{n}y_t}{\frac{n(n+1)[4n+2-3(n+1)]}{12}}=\frac{\sum_{t=1}^{n}ty_t-\frac{(n+1)}{2}.\sum_{t=1}^{n}y_t}{\frac{n\left(n^2-1\right)}{12}}$$

a následně pro b_0 $\quad b_0=\bar{y}-b_1.\bar{t}=\bar{y}-\frac{n+1}{2}b_1$

b) Ke stejným výrazům dospějeme aplikací standardního vzorce pro *OLS-odhady parametrů* , *tedy* $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$, pokud v něm konkretizujeme matici X jako

$X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ .. & ..\\ 1 & n\end{pmatrix}$. **Potom máme** $\begin{pmatrix}\hat\beta_0\\ \hat\beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} t\\ \sum_{t=1}^{n} t & \sum_{t=1}^{n} t^2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{n} y_t\\ \sum_{t=1}^{n} ty_t\end{pmatrix}$

Zřejmě máme $(X'X)^{-1}=\dfrac{1}{n.\sum_{t=1}^{n}t^2-\left(\sum_{t=1}^{n}t\right)^2}\cdot\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{n}t^2 & -\sum_{t=1}^{n}t\\ -\sum_{t=1}^{n}t & n\end{pmatrix}$, $X'y=\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{n}y_t\\ \sum_{t=1}^{n}ty_t\end{pmatrix}$.

Výpočtem (řešením pro neznámé b_0, b_1) dostaneme dvojici odhadů (25A,B). Že jde skutečně o minimum, se snadno přesvědčíme stejně snadno jako v případě minimalizace pro lineární regresní model.

Předpověď budoucí hodnoty y_T **má tvar**

(27) $$y^*_T = b_0 + b_1 T$$.

Příslušný $100.(1-p)$ **procentní předpovědní interval (při neznalosti** σ_e**) je**

(28) $$(\hat y_T - t_{1-p/2}(n-2).s_e f_T\ ;\ \hat y_T - t_{1-p/2}(n-2).s_e f_T\ ))$$ **, kde**

$\hat y_t$ je **vyrovnaná hodnota závisle proměnné**

$n-2$ je **počet stupňů volnosti (rozdíl mezi počtem pozorování a počtem trendových parametrů)**

$t_{1-p/2}$ je **1-p/2 (.100) % kvantil Studentova t-rozdělení o n-3 stupních volnosti**

f_T je **hodnota :** $f_t=\sqrt{1+(1,T)(X'X)^{-1}(1,T)'}$ **, přičemž**

$X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ \cdots & \cdots\\ 1 & n\end{pmatrix}$ **je matice** nestochastických **„regresorů“.**

S ohledem na specifický výraz pro momentovou matici v daném případě

$$(X'X)^{-1}=\frac{1}{\frac{(n+1)(2n+1)}{12}-\frac{n^2(n+1)^2}{4}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} & -\frac{n(n+1)}{2}\\ -\frac{n(n+1)}{2} & n\end{pmatrix}$$

dostaneme (29) $$f_t=\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(T-\frac{n+1}{2}\right)^2}{\frac{n(n^2-1)}{12}}}$$

s_e je **směrodatná odchylka reziduí (rozdílu mezi pozorovanými a vyrovnanými hodnotami časové řady) (30)** $$s_e=\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\hat y_t)^2}{n-2}}=\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}y_t^2-\sum_{t=1}^{n}\hat y_t^2}{n-2}}.$$

1B) výpočet parametrů kvadratického trendu $Tr^{Kv}{}_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$

Aplikace standardního vzorce pro *OLS* $\hat\beta = (X'X)^{-1}X'y$ vede k výrazům

(31) $$\begin{pmatrix}\hat\beta_0\\ \hat\beta_1\\ \hat\beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum\limits_{t=1}^{n} t & \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 \\ \sum\limits_{t=1}^{n} t & \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 & \sum\limits_{t=1}^{n} t^3 \\ \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 & \sum\limits_{t=1}^{n} t^3 & \sum\limits_{t=1}^{n} t^4 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} \sum\limits_{t=1}^{n} y_t \\ \sum\limits_{t=1}^{n} ty_t \\ \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 y_t \end{pmatrix}$$

Odtud vyplývá soustava normálních rovnic ve tvaru

(32A,B,C)
$$b_0 .n + b_1 \sum t + b_1 \sum t^2 = \sum y_t$$
$$b_0 .\sum t + b_1 \sum t^2 + b_2 \sum t^3 = \sum ty_t$$
$$b_0 .\sum t^2 + b_1 \sum t^3 + b_2 \sum t^4 = \sum t^2 y_t$$

Někdy je výhodné pracovat s vyjádřením trendu ve tvaru

(33) $T_t = \beta_0 + \beta_1(t-\bar t)\beta_1(t-\bar t)^2 \quad t = 1,2,\ldots,\ n$, kde $\bar t = \frac{1}{n}.\sum\limits_{t=1}^{n} t = \frac{n+1}{2}$

$$\sum_{t=1}^{n}(t-\bar t) = \sum_{t=1}^{n}(t-\bar t)^3 = 0 \qquad t = 1,2,\ldots,\ n$$, kde

Předpověď budoucí hodnoty y_T má tvar

(34) $$y^*_T = b_0 + b_1 T + b_2 T^2$$.

Příslušný $100.(1-p)$ procentní předpovědní interval je

(35) $$\left(\hat y_T - t_{1-p/2}(n-3).s_e f_T\ ;\ \hat y_T - t_{1-p/2}(n-3).s_e f_T\right)$$, kde

$\hat y_t$ je vyrovnaná hodnota závisle proměnné

$n-3$ je počet stupňů volnosti (rozdíl mezi počtem pozorování a počtem trendových parametrů)

$t_{1-p/2}(n-3)$ je $100.\left(1-\frac{p}{2}\right)\% - ní$ kvantil ***Studentova t-rozdělení*** o n-3 stupních volnosti

f_T je hodnota: (36) $f_T = \sqrt{1 + (1,T,T^2)(X'X)^{-1}(1,T,T^2)'}$, přičemž

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & n & n^2 \end{pmatrix}$$ je matice nestochastických „regresorů".

s_e je směrodatná odchylka reziduí (rozdílu mezi pozorovanými a vyrovnanými hodnotami časové řady) (37) $s_e = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{t=1}^{n}(y_t - \hat y_t)^2}{n-3}}$

1C) výpočet parametrů reciprokého/hyperbolického trendu $Tr^{Hy}{}_t = \beta_0 + \beta_1.t + \beta_2 \frac{1}{t}$

Aplikace standardního vzorce pro OLS $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$ **vede k výrazům**

(41)

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} t & \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t} \\ \sum_{t=1}^{n} t & \sum_{t=1}^{n} t^2 & \sum_{t=1}^{n} t \\ \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t} & \sum_{t=1}^{n} t & \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} t.y_t \\ \sum_{t=1}^{n} \frac{y_t}{t} \end{pmatrix}$$

1D) výpočet parametrů logaritmického trendu $y_t^{Lo} = \beta_0 + \beta_1 .ln(t)$

Aplikace standardního vzorce pro OLS $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$ **má zde podobu (42)**

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} ln\, t \\ \sum_{t=1}^{n} ln\, t & \sum_{t=1}^{n} ln^2\, t \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t\, ln\, t \end{pmatrix} = \frac{1}{n \sum_{t=1}^{n} ln^2\, t - \left(\sum_{t=1}^{n} ln\, t\right)^2} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} ln^2\, t & -\sum_{t=1}^{n} ln\, t \\ -\sum_{t=1}^{n} ln\, t & n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t\, ln\, t \end{pmatrix},$$

takže pro parametrické odhady (budou konzistentní a nestranné) **máme**

$$b_0 = \hat{\beta}_0 = \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} ln^2\, t\right).\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\right) - \left(\sum_{t=1}^{n} ln\, t\right)\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\, ln\, t\right)}{n \sum_{t=1}^{n} ln^2\, t - \left(\sum_{t=1}^{n} ln\, t\right)^2}, \quad b_1 = \hat{\beta}_1 = \frac{n.\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\, ln\, t\right) - \left(\sum_{t=1}^{n} ln\, t\right)\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\right)}{n \sum_{t=1}^{n} ln^2\, t - \left(\sum_{t=1}^{n} ln\, t\right)^2},$$

1E) výpočet parametrů exponenciálního trendu

(51) $$Tr^{ex}_t = \beta_0 \beta_1^{\,t}$$ $[\beta_0 > 0]$ **zpravidla** $[\beta_1 > 1]$

Trend je charakteristický tím, že *koeficient růstu* tj. *podíl dvou sousedních hodnot* T_{t+1}/T_t a současně podíl dvou sousedních diferencí $(T_{t+2} - T_{t+1})/(T_{t+1} - T_t)$ má konstantní hodnotu β_1. Parametr β_0 se uvažuje kladný.

Růstová tendence nastává v případě $\beta_1 > 1$, tendence poklesu v případě $\beta_1 < 1$,

K výpočtu parametrů exponenciálního trendu je vhodné uplatnit *váženou metodu nejmenších čtverců WLS* s vhodně transformovaný vahami. (Nelze totiž předpokládat multiplikativní tvar a logaritmicko-normální rozdělení náhodné složky v původním modelu před transformací) **.**

V konkrétním případě exponenciálního trendu se aplikuje *WLS* pro minimalizaci výrazu

(52) $$\sum_{t=1}^{n} v_t \left(y_t - \beta_0 \beta_1^{\,t}\right)^2$$ **, v němž** v_t **jsou** předem zvolené **váhy.**

Minimalizace se však v této metodě vztahuje k výrazu

(53) $$\sum_{t=1}^{n} w_t (\ln y_t - \ln \beta_0 - t.\ln \beta_1)^2$$ **, u kterého**

váhy w_t závisí na vahách v_t tak, abychom minimalizací obou výrazů (52),(53) dostali aspoň přibližně shodné odhady parametrů b_0, b_1. Ukazuje se, že pro přijatou logaritmickou transformaci je vhodné položit

(54) $$w_t = y_t^2 . v_t \qquad t = 1,2,3,\dots, n$$

K nejčastější volbě vah $v_t = 1$ přistupujeme tehdy, jestliže nemáme důvod preferovat v minimalizačním kritériu některá jednotlivá pozorování, takže pak pro transformované váhy bude platit $w_t = y_t^2$. Minimalizací výrazu (53) s těmito vahami **obdržíme *soustavu normálních rovnic***

(55A) $$\ln b_0 . \left(\sum y_t^2\right) + \ln b_1 \left(\sum t . y_t^2\right) = \left(\sum y_t^2 . \ln y_t\right)$$

(55B) $$\ln b_0 . \left(\sum t . y_t^2\right) + \ln b_1 \left(\sum t^2 . y_t^2\right) = \left(\sum t y_t^2 . \ln y_t\right) ,$$

neboť po dosazení (54) do (53) máme

(53*) $$\sum_{t=1}^{n} y_t^2 (\ln y_t - \ln \beta_0 - t.\ln \beta_1)^2$$ **, a tedy**

(56A) $$\frac{\partial \sum_{t=1}^{n} y_t^2 (\ln y_t - \ln \beta_0 - t.\ln \beta_1)^2}{\partial \beta_0} = -2. \sum_{t=1}^{n} y_t^2 (\ln y_t - \ln \beta_0 - t.\ln \beta_1) . \frac{1}{\beta_0}$$

(56B) $$\frac{\partial \sum_{t=1}^{n} y_t^2 (\ln y_t - \ln \beta_0 - t.\ln \beta_1)^2}{\partial \beta_1} = -2.\sum_{t=1}^{n} y_t^2 (\ln y_t - \ln \beta_0 - t.\ln \beta_1).\frac{t}{\beta_1}$$

Anulováním pravých stran (56A), (56B) a po jednoduchých úpravách máme

$$\sum_{t=1}^{n} y_t^2 \ln y_t - \ln \beta_0 \sum_{t=1}^{n} y_t^2 - \ln \beta_1 \sum_{t=1}^{n} t y_t^2 = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} t.y_t^2 \ln y_t - \ln \beta_0 \sum_{t=1}^{n} t.y_t^2 - \ln \beta_1 \sum_{t=1}^{n} t^2.y_t^2 = 0$$,

což po přemístění členů a vynásobení (-1) vede k (55A), (55B) . □ .

Soustavu (55A), (55B) lze maticově zapsat jako

$$\begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t^2 & \sum_{t=1}^{n} t y_t^2 \\ \sum_{t=1}^{n} t.y_t^2 & \sum_{t=1}^{n} t^2.y_t^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \ln \beta_0 \\ \ln \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t^2 \ln y_t \\ \sum_{t=1}^{n} t.y_t^2 \ln y_t \end{pmatrix}$$

Odtud je snadno vidět, že má *explicitní řešení* pro oba parametry ve tvaru

(56A) $$\ln b_0 = \frac{\sum t^2 y_t^2 . \sum y_t^2 \ln y_t - \sum t y_t^2 . \sum t y_t^2 \ln y_t}{\sum t^2 y_t^2 . \sum y_t^2 - \left(\sum t y_t^2\right)^2}$$

(56B) $$\ln b_1 = \frac{\sum y_t^2 . \sum t y_t^2 \ln y_t - \sum t y_t^2 \sum y_t^2 \ln y_t}{\sum t^2 y_t^2 . \sum y_t^2 - \left(\sum t y_t^2\right)^2}$$

Oba parametry získáme exponenciálním **povýšením výrazů na pravých stranách.**

Vlastnost, že exponenciální trend má *koeficient růstu* Tr_{t+1} / Tr_t **a současně podíl dvou sousedních diferencí** $(Tr_{t+2} - Tr_{t+1})/(Tr_{t+1} - Tr_t)$ konstantní je okamžitě patrná:

Vyjdeme-li z (51) $T_t = \beta_0 \beta_1^{\,t}$**, pak** $y_{t+1} = \beta_0 \beta_1^{\,t+1}$ **a tedy** $Tr_{t+1} / Tr_t = \beta_1$ (konstantní)

a rovněž tak $$\frac{Tr_{t+2} - Tr_{t+1}}{Tr_{t+1} - Tr_t} = \frac{\beta_0 \beta_1^{\,t+2} - \beta_0 \beta_1^{\,t+1}}{\beta_0 \beta_1^{\,t+1} - \beta_0 \beta_1^{\,t}} = \frac{\beta_0 \beta_1^{\,t+1} (\beta_1 - 1)}{\beta_0 \beta_1^{\,t} (\beta_1 - 1)} = \beta_1 \ .$$ □ .

1F) výpočet parametrů modifikovaného exponenciálního trendu

(61) $$Tr_t^{mex} = \beta_2 + \beta_0.\beta_1^t$$ $[\beta_0 > 0]$ **a zpravidla také** $[0 < \beta_1 < 1]$ **.**

Tento trend je *třiparametrickým* ***zobecněním*** **předchozího případu** (parametry $\beta_0, \beta_1, \beta_2$)**.** **Hodí se pro modelování *trendu s konstantním podílem sousedních diferencí*, pokud je navíc tento trend asymptoticky omezen** (přibližuje-li se k saturační úrovni)**.**

Jedna z orientačních **metod odhadu parametrů *modifikovaného exponenciálního trendu*** **(pokud nemůžeme použít** exaktní ***iterační postupy nelineární optimalizace*****), spočívá v tomto postupu:**

Rozdělíme soubor pozorovaných hodnot na tři stejně velké třetiny o délce m **.** Pokud není n přesně dělitelné třemi, pak vynecháme jedno nebo dvě počáteční pozorování**. Pak sečteme pozorování v jednotlivých třetinách, přičemž dostaneme**

(62A) $$\Sigma_1 y_t \approx \Sigma_1 T_t = m.\beta_2 + \frac{\beta_0 \beta_1 (\beta_1^m - 1)}{\beta_1 - 1} \qquad \sum_{t=1}^{m} y_t = m\beta_2 + \beta_0 . \sum_{t=1}^{m} \beta_1^t$$

(62B) $$\Sigma_2 y_t \approx \Sigma_2 T_t = m.\beta_2 + \frac{\beta_0 \beta_1^{m+1} (\beta_1^m - 1)}{\beta_1 - 1} \qquad \sum_{t=m+1}^{2m} y_t = m\beta_2 + \beta_0 . \sum_{t=m+1}^{2m} \beta_1^t$$

(62C) $$\Sigma_3 y_t \approx \Sigma_3 T_t = m.\beta_2 + \frac{\beta_0 \beta_1^{2m+1} (\beta_1^m - 1)}{\beta_1 - 1} \qquad \sum_{t=2m+1}^{3m} y_t = m\beta_2 + \beta_0 . \sum_{t=2m+1}^{3m} \beta_1^t$$ **, kde**

indexování „1" v $\Sigma_1 y_t$ **resp. v** $\Sigma_1 T_t$ **značí součet pozorovaných hodnot, případně trendových hodnot z první třetiny časové řady. Řešením této *soustavy tří rovnic* dostaneme postupně jednotlivé odhady parametrů** b_0, b_1, b_2 **ve tvaru**

(63A) $$b_1 = \left(\frac{\Sigma_3 y_t - \Sigma_2 y_t}{\Sigma_2 y_t - \Sigma_1 y_t} \right)^{1/m}$$

(63B) $$b_0 = \frac{b_1 - 1}{b_1 (b_1^m - 1)^2} (\Sigma_2 y_t - \Sigma_1 y_t)$$

(63C) $$b_2 = \frac{1}{m} \left(\Sigma_1 y_t - \frac{b_0 b_1 (b_1^m - 1)}{b_1 - 1} \right)$$

Poznámka: Např. parametr b_0 **v (63B) získáme odečtením rovnice (62A) od (62B):**

$$\Sigma_2 y_t - \Sigma_1 y_t = m.\beta_2 + \frac{\beta_0 \beta_1^{m+1} (\beta_1^m - 1)}{\beta_1 - 1} - m.\beta_2 - \frac{\beta_0 \beta_1 (\beta_1^m - 1)}{\beta_1 - 1} = \frac{\beta_0 \beta_1 (\beta_1^m - 1)^2}{b_1 - 1}$$

Podobně odečtením rovnice (62B) od (62C) dostaneme:

$$\Sigma_3 y_t - \Sigma_2 y_t = m.\beta_2 + \frac{\beta_0 \beta_1^{2m+1} (\beta_1^m - 1)}{\beta_1 - 1} - m.\beta_2 - \frac{\beta_0 \beta_1^{m+1} (\beta_1^m - 1)}{\beta_1 - 1} = \frac{\beta_0 \beta_1^{m+1} (\beta_1^m - 1)^2}{b_1 - 1}$$

a po vydělením obou vztahů obdržíme $$\frac{\Sigma_3 y_t - \Sigma_2 y_t}{\Sigma_2 y_t - \Sigma_1 y_t} = \frac{\beta_0 \beta_1^{m+1} (\beta_1^m - 1)^2}{\beta_0 \beta_1^1 (\beta_1^m - 1)^2} = \beta_1^m$$ **.**

Parametr b_2 **pak nakonec snadno získáme z (62A) při známých** b_0, b_1 **.** □ **.**

Vzhledem k tomu, že při pevně zvoleném parametru b_1 se model stane *lineárním modelem*, lze také použít takový postup, že se odhadnou parametry b_0, b_2 pro různé hodnoty b_1 a následně se zvolí taková varianta, která minimalizuje SSE. □.

ověření indikace přítomnosti modifikovaného exponenciálního trendu:

podíly sousedních **1. diferencí** $(y_{t+2} - y_{t+1})/(y_{t+1} - y_t)$ **jsou** zhruba **konstantní:**

Protože zřejmě **platí** $y_{t+2} = \beta_2 + \beta_0 . \beta_1^{t+2}$ $y_{t+1} = \beta_2 + \beta_0 . \beta_1^{t+1}$ $y_t = \beta_2 + \beta_0 . \beta_1^{t}$,

vyplývá odtud pro diference $y_{t+2} - y_{t+1} = \beta_0 . \beta_1^{t+1} . (\beta_1 - 1)$ $y_{t+1} - y_t = \beta_0 . \beta_1^{t} . (\beta_1 - 1)$ **a následně** $(y_{t+2} - y_{t+1})/(y_{t+1} - y_t) = \beta_1$**. Konstantnost představuje parametr** β_1 **.**

Limitní chování modifikovaného exponenciálního trendu

Při přijatých omezeních na parametry funkce (61)

$T_t = \beta_2 + \beta_0 . \beta_1^{t}$ $[\beta_0 > 0], [\beta_2 > 0]$ **a** $[0 < \beta_1 < 1]$, **platí**

$\lim_{t \to 0} T_t = \lim_{t \to 0} \left(\beta_2 + \beta_0 . \beta_1^{t} \right) = \beta_0 + \beta_2$ $\lim_{t \to +\infty} T_t = \lim_{t \to +\infty} \left(\beta_2 + \beta_0 . \beta_1^{t} \right) = \beta_2$

Při přijatých omezeních na parametry funkce (61)

$T_t = \beta_2 + \beta_0 . \beta_1^{t}$ $[\beta_0 < 0]$ **a** $[0 < \beta_1 < 1]$, **platí**

$\lim_{t \to 0} T_t = \lim_{t \to 0} \left(\beta_2 + \beta_0 . \beta_1^{t} \right) = \beta_0 + \beta_2$ $\lim_{t \to +\infty} T_t = \lim_{t \to +\infty} \left(\beta_2 + \beta_0 . \beta_1^{t} \right) = \beta_2$

Chování modifikovaného exponenciálního trendu asymptoticky (pro $t \to +\infty$) směřuje k saturační úrovni dané hodnotou parametru β_2 , přičemž v blízkosti 0 by hodnoty mohly být i záporné (záleží na součtu parametrů $\beta_0 + \beta_2$).

1G) výpočet parametrů logistického trendu

Tento opět **tříparametrický trend je popsán schématem**

(71) $$Tr_t^{lg} = \frac{\beta_2}{1 + \beta_0 \beta_1^{\,t}} \quad , \quad t = 1,2,3,\ldots,n \quad \text{při} \quad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$$

Logistický trend má inflexi (tj. **bod, ve kterém přechází konvexní průběh trendu v konkávní,** příp. naopak**) v bodě** $t^* = -\frac{\ln \beta_0}{\ln \beta_1}$ **a je asymptoticky omezen** (se saturační úrovní β_2)**.**

Jeho zderivováním podle časové proměnné t (tu považujeme za spojitou) **, dostaneme** [4]

(72) $$\frac{dTr_t^{lg}}{dt} = -\frac{\ln \beta_1}{\beta_2} Tr_t (\beta_2 - Tr_t) \quad , \text{ což je}$$

další důležitý ukazatel růstu trendové křivky (tato první derivace trendové křivky se v tomto kontextu **nazývá** ***růstová funkce*****). Je zřejmé, že rychlost růstu logistického trendu závisí přímo úměrně na dosažené úrovni** Tr_t **a na vzdálenosti hodnoty trendu od saturační úrovně** β_2**, tj.** $\beta_2 - Tr_t$ **. Derivace je přitom symetrická kolem bodu inflexe** $t^* = -\ln \beta_0 / \ln \beta_1$ **. Z toho, co bylo řečeno, plyne, že logistickou křivku lze přiřadit k tzv.** ***S-křivkám symetrickým kolem inflexního bodu*** **.**

Pokud jde o **odhad parametrů logistického trendu, lze použití několik** odlišných **metod:**

a) protože ***logistický trend*** **lze považovat za** ***reciprokou podobu modifikovaného exponenciálního trendu*****, lze aplikovat výše popsanou odhadovou proceduru pro odhad modifikovaného exp. trendu** na časovou řadu s reciprokými hodnotami $1 / y_t$.

b) Použijeme ***diferenčního parametrického odhadu, kdy se místo s původní časovou řadou pracuje s řadou prvních diferencí*** $y_{t+1} - y_t$ ***. Přitom se postupuje takto:***

V derivační formulaci trendu (72) se aproximuje trendová složka Tr_t **skutečnými pozorováními** y_t **, takže se dostane:**

(73) $$\frac{dy_t}{dt} = -\frac{\ln \beta_1}{\beta_2} y_t (\beta_2 - y_t)$$

Jestliže dále přijmeme aproximaci (derivace pomocí diference)

(74) $$\frac{dy_t}{dt} \approx \frac{y_{t+1} - y_t}{t + 1 - t} = y_{t+1} - y_t = \Delta y_t \quad , \quad \text{v níž}$$

Δ_t **označuje řadu prvních diferencí, pak ze (73) snadnou úpravou dostaneme**

(75) $$\frac{\Delta y_t}{y_t} = -\ln \beta_1 + \frac{\ln \beta_1}{\beta_2} . y_t$$

---

4 $$\frac{\partial Tr_t^{lg}}{\partial t} = \frac{\partial \beta_2 . \left(1 + \beta_0 \beta_1^{\,t}\right)^{-1}}{\partial t} = -\beta_2 \frac{\beta_0 \beta_1^{\,t} . \ln \beta_1}{\left(1 + \beta_0 \beta_1^{\,t}\right)^2} = -\frac{\beta_2 \ln \beta_1}{1 + \beta_0 \beta_1^{\,t}} . \frac{\beta_0 \beta_1^{\,t}}{1 + \beta_0 \beta_1^{\,t}} =$$
$$-\frac{\beta_2 \ln \beta_1}{1 + \beta_0 \beta_1^{\,t}} \left(1 - \frac{1}{1 + \beta_0 \beta_1^{\,t}}\right) = -\frac{\ln \beta_1}{\beta_2} \frac{\beta_2}{1 + \beta_0 \beta_1^{\,t}} \left(\beta_2 - \frac{\beta_2}{1 + \beta_0 \beta_1^{\,t}}\right) = -\frac{\ln \beta_1}{\beta_2} Tr_t^{lg} \left(\beta_2 - Tr_t^{lg}\right)$$

Pomocí *metody nejmenších čtverců* pak získáme v *lineárním regresním modelu* (modelu s jediným regresorem), **tzn.ve stochastické formulaci (75)**

(75*) $$\frac{\Delta y_t}{y_t} = -\ln \beta_1 + \frac{\ln \beta_1}{\beta_2} y_t + \varepsilon_t$$

(75)** $$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = \alpha_1 + \alpha_2 y_t + \varepsilon_t$$ **, kde** $\alpha_1 = -\ln \beta_1 \quad \alpha_2 = \ln \beta_1 / \beta_2$

odhady $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ **pro** α_1, α_2 **a odtud následně odhady parametrů** β_1, β_2 **jako**

(76) $$b_1 = \hat{\beta}_1 = exp(-\alpha_1)$$ **a pro** $$b_2 = \hat{\beta}_2 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2}$$

Abychom získali odhad pro poslední **parametr** β_0**, aproximujeme ve vztahu (71) trendovou složku** Tr_t **skutečnými pozorováními** y_t **a upravíme tento vztah do tvaru**

(77) $$\beta_0 \beta_1^t \approx \frac{\beta_2}{y_t} - 1$$ (protože $Tr_t \approx y_t = \frac{\beta_2}{1 + \beta_0 \beta_1^t}$)

Po zlogaritmování $\ln \beta_0 + t.\ln \beta_1 = \ln\left(\frac{\beta_2}{y_t} - 1\right)$ **a sečtení přes těchto vztahů přes** $t = 1,2,\dots,n$ [5]

dostaneme nakonec **vztah**

(78) $$\ln \beta_0 = -\frac{(n+1)\ln \beta_1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \ln\left(\frac{\beta_2}{y_t} - 1\right)$$

který se nazývá ***Rhodesův vzorec.***

Z něho se už snadno vypočte odhad parametru β_0 **„vyexponováním„.**

Ověření toho, že *logistický trend* je reciproké vyjádření *modifikovaného exponenciálního trendu* je velmi jednoduché:

stačí (71) $$Tr_t^{lg} = \frac{\beta^*_2}{1 + \beta_0^* \beta_1^{*t}}$$ **zapsat** v reciproké podobě $$\frac{1}{Tr_t^{lg}} = \frac{1 + \beta_0^* \beta_1^{*t}}{\beta^*_2}$$ **a hned vidíme,**

že výraz odpovídá zápisu modifikovaného exponenciálního trendu (61) $Tr_t^{mex} = \beta_2 + \beta_0 . \beta_1^t$ **,**

pokud vyjádříme parametry tohoto trendu jako $$\beta_2 = \frac{1}{\beta_2^*}, \beta_2 = \frac{\beta_0^*}{\beta_2^*}, \beta_1 = \beta_1^*$$

Ověření lokalizace inflexního bodu u logistické křivky

---

[5] Z $\sum_{t=1}^{n} (\ln \beta_0 + t.\ln \beta_1) = \sum_{t=1}^{n} \ln\left(\frac{\beta_2}{y_t} - 1\right)$ dostaneme $n \ln \beta_0 + \ln \beta_1 \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{t=1}^{n} \ln\left(\frac{\beta_2}{y_t} - 1\right)$ a dělíme n

Vzhledem k tomu, že inflexe je místem, kde konvexnost přechází v konkávnost (nebo vice versa) **musíme spočíst druhou derivaci (podle času *t*). trendové křivky. Postupně dostaneme:**

(79A) $$\frac{dy_t}{dt} = -\beta_2.\left(1+\beta_0\beta_1{}^t\right)^{-2}.\beta_0\beta_1{}^t \ln\beta_1 = -\beta_2\frac{\beta_0\beta_1{}^t.\ln\beta_1}{\left(1+\beta_0\beta_1{}^t\right)^2}$$ **a následně**

$$\frac{d^2y_t}{dt^2} = -\beta_2.\frac{\left(1+\beta_0\beta_1{}^t\right)^2.\left[\beta_0\beta_1{}^t\ln^2\beta_1\right]-\left[\beta_0\beta_1{}^t\ln\beta_1\right]^2.2\left(1+\beta_0\beta_1{}^t\right)}{\left(1+\beta_0\beta_1{}^t\right)^4}$$ **neboli**

(79B) $$\frac{d^2y_t}{dt^2} = -\beta_2.\left(1+\beta_0\beta_1{}^t\right)\left[\beta_0\beta_1{}^t\ln\beta_1\right]\frac{\ln\beta_1-\beta_0\beta_1{}^t\ln\beta_1}{\left(1+\beta_0\beta_1{}^t\right)^4}$$

Nulovou hodnotu může druhá derivace nabýt jen tam, kde je obsah čitatele zlomku nulový, protože při daných omezeních na parametry $\beta_0>0,\beta_1>0$ **nemůže pro žádné reálné** t **platit** $1+\beta_0\beta_1{}^t=0$**. Pro nulový čitatel vyplývá tedy** navazující **podmínka**

$$\frac{d^2y_t}{dt^2}=0 \Rightarrow \ln\beta_1-\beta_0\beta_1{}^t\ln\beta_1=0\text{, resp. }\ln\beta_1\left(1-\beta_0\beta_1{}^t\right)=0$$

a vzhledem k nenulovosti $\ln\beta_1$ **pro** $\beta_1\neq 1$ **může mít tento součin hodnotu 0 jen tam, kde platí** $1-\beta_0.\beta_1{}^t=0$ **neboli** $\beta_0.\beta_1{}^t=1$ **a tedy** $\beta_1{}^t=\frac{1}{\beta_0}$**. Hodnotu** t^* **lokalizující inflexi pak už snadno získáme zlogaritmováním:** $t.\ln\beta_1=\ln 1-\ln\beta_0=-\ln\beta_0$ **, odkud odvodíme polohu inflexního bodu** $t^*=\frac{-\ln\beta_0}{\ln\beta_1}$ □ **.**

__ověření indikace přítomnosti logistického trendu__:

podíly sousedních **1. diferencí reciprokých hodnot** $(1/y_{t+2}-1/y_{t+1})/(1/y_{t+1}-1/y_t)$ **jsou zhruba konstantní.**

Protože platí $\frac{1}{y_{t+2}}=\frac{1+\beta_0\beta_1{}^{t+2}}{\beta_2}$ $\frac{1}{y_{t+1}}=\frac{1+\beta_0\beta_1{}^{t+1}}{\beta_2}$ $\frac{1}{y_t}=\frac{1+\beta_0\beta_1{}^t}{\beta_2}$ **vyplývá odtud pro**

Diference $y_{t+2}{}^{-1}-y_{t+1}{}^{-1}=\beta_2{}^{-1}\beta_0.\beta_1{}^{t+1}(\beta_1-1)$ $y_{t+1}{}^{-1}-y_t{}^{-1}=\beta_2{}^{-1}\beta_0.\beta_1{}^t(\beta_1-1)$ **a tedy opravdu platí** $(1/y_{t+2}-1/y_{t+1})/(1/y_{t+1}-1/y_t)=\beta_1$ □ **.**

Konstantnost tedy představuje stejně jako u modifikovaného exponenciálního trendu **parametr** β_1 **.**

1H) Gompertzův trend a výpočet jeho parametrů

Trend ve tvaru této křivky vzniká (ostatně stejně jako logistický trend) **transformací *modifikovaného exponenciálního trendu*.**

(81) $ln\, Tr_t = \beta_3 + \beta_1.\beta_2{}^t$ **resp. ekvivalentně** $Tr_t = exp\left(\beta_3 + \beta_1.\beta_2{}^t\right)$

při $[\beta_2 > 0]$ $t = 1,2,...., n$

Obvykle – pro dosažení charakteristického tvaru křivky – **přijímáme:** $\beta_1 < -1, 0 < \beta_2 < 1$

Pro hodnoty parametrů z tohoto intervalu má *Gompertzův trend* inflexi v bodě

(82)
$$t^* = -\frac{ln(-\beta_1)}{ln(\beta_2)}$$

První derivace této křivky (tzv. *růstová funkce*) ale tentokrát **není symetrická kolem inflexního bodu, ale *je sešikmená* (protáhlejší) doprava. Z tohoto důvodu se Gompertzův trend řadí mezi tzv. *S-křivky nesymetrické kolem inflexního bodu*.**

Odhad parametrů $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ se provede způsobem obdobným jako v případě modifikovaného exponenciálního trendu, místo původní řady se ale použije logaritmovaná původní řada (s hodnotami $ln\, y_t$ [6])

Ověření lokalizace inflexního bodu u Gompertzovy křivky

Vzhledem k tomu, že inflexe je místem, kde konvexnost přechází v konkávnost (nebo vice versa) **musíme spočíst druhou derivaci (podle času *t*). trendové křivky. Postupně dostaneme:**

(83)
$$\frac{dy_t}{dt} = exp\left(\beta_3 + \beta_1.\beta_2{}^t\right)\frac{d\left(\beta_3 + \beta_1.\beta_2{}^t\right)}{dt} = exp\left(\beta_3 + \beta_1.\beta_2{}^t\right)\beta_1.\beta_2{}^t.ln\,\beta_2$$

a následně
$$\frac{d^2 y_t}{dt^2} = exp\left(\beta_3 + \beta_1.\beta_2{}^t\right)\left(\beta_1.\beta_2{}^t.ln\,\beta_2\right)^2 + exp\left(\beta_3 + \beta_1.\beta_2{}^t\right)\beta_1.\beta_2{}^t.ln^2(\beta_2)$$

Vytkneme-li z obou členů (nenulový) výraz s exponenciálou, obdržíme

(84)
$$\frac{d^2 y_t}{dt^2} = exp\left(\beta_3 + \beta_1.\beta_2{}^t\right)\left[\left(\beta_1.\beta_2{}^t.ln\,\beta_2\right)^2 + \beta_1.\beta_2{}^t.ln^2\,\beta_2\right]$$

Nulovou hodnotu může druhá derivace nabýt jen tam, kde je obsah hranaté závorky nulový, tedy v bodě splňujícím podmínku $\frac{d^2 y_t}{dt^2} = 0 \Rightarrow \beta_1{}^2.\beta_2{}^{2t}.ln^2\,\beta_2 + \beta_1.\beta_2{}^t.ln^2\,\beta_2 = 0$ **, po vytknutí tedy** $ln^2(\beta_2)\beta_1\beta_2{}^t\left[\beta_1.\beta_2{}^t + 1\right] = 0$ **přičemž vzhledem k nenulovosti součinu před závorkou může tento výraz nabýt nulovou hodnotu je tam, kde je obsah hranaté závorky nulový, tj. tam, co platí** $\beta_1.\beta_2{}^t + 1 = 0$ **neboli** $\beta_1.\beta_2{}^t = -1$ **a tedy** $\beta_2{}^t = \frac{1}{-\beta_1}$**. Hodnotu** t^* **lokalizující inflexi pak už snadno získáme zlogaritmováním:**

$t.ln\,\beta_2 = ln(1) - ln(-\beta_1) = -ln(-\beta_1)$ **,odkud máme polohu inflexe** $t^* = \frac{-ln(-\beta_1)}{ln\,\beta_2}$ □ .

ověření indikace přítomnosti Gompertzova trendu:

[6] Je tímto zřejmé, že postup nelze uplatnit na ekonomickou časovou řadu s některými hodnotami zápornými.

indikace přítomnosti: **podíly prvních logaritmovaných diferencí** $(\ln y_{t+2} - \ln y_{t+1})/(\ln y_{t+1} - \ln y_t)$ **jsou přibližně konstantní**

Z *logaritmického vyjádření Gompertzova trendu* (81) dostaneme pro $t+1, t+2$

$\ln y_{t+1} = \beta_3 + \beta_1.\beta_2^{t+1}$ $\ln y_{t+2} = \beta_3 + \beta_1.\beta_2^{t+2}$, **a následně tedy pro první dvě logaritmované diference:**

$$\ln y_{t+2} - \ln y_{t+1} = \beta_1.\beta_2^{t+2} - \beta_1.\beta_2^{t+1} = \beta_1.\beta_2^{t+1}(\beta_2 - 1)$$

$\ln y_{t+1} - \ln y_t = \beta_1.\beta_2^{t+1} - \beta_1.\beta_2^{t} = \beta_1.\beta_2^{t}(\beta_2 - 1)$. **Odtud máme pro jejich podíl**

$\dfrac{\ln y_{t+2} - \ln y_{t+1}}{\ln y_{t+1} - \ln y_t} = \dfrac{\beta_1.\beta_2^{t+1}(\beta_2 - 1)}{\beta_1.\beta_2^{t}(\beta_2 - 1)} = \beta_2$, **takže** ona **přibližná konstanta je parametr** β_2 .

1J) výpočet parametrů odmocninného trendu $y_t = \beta_0 + \beta_1.\sqrt{t}$

Aplikuje-li standardní *OLS – odhadové schéma* pro tento **model, který je lineární v parametrech, dostaneme**

(91)
$$\begin{pmatrix} \hat\beta_0 \\ \hat\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} \sqrt{t} \\ \sum_{t=1}^{n} \sqrt{t} & \sum_{t=1}^{n} t \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} \sqrt{t}.y_t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat\beta_0 \\ \hat\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} \sqrt{t} \\ \sum_{t=1}^{n} \sqrt{t} & \sum_{t=1}^{n} t \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t\sqrt{t} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{n^2(n+1)}{2} - \left(\sum_{t=1}^{n}\sqrt{t}\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & -\sum_{t=1}^{n}\sqrt{t} \\ -\sum_{t=1}^{n}\sqrt{t} & n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t\sqrt{t} \end{pmatrix},$$

takže pro parametrické odhady (budou konzistentní a nestranné) **máme**

$$b_0 = \hat\beta_0 = \frac{\frac{n(n+1)}{2}\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\right) - \left(\sum_{t=1}^{n}\sqrt{t}\right)\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\sqrt{t}\right)}{\frac{n^2(n+1)}{2} - \left(\sum_{t=1}^{n}\sqrt{t}\right)^2}, \quad b_1 = \hat\beta_1 = \frac{n.\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\sqrt{t}\right) - \left(\sum_{t=1}^{n}\sqrt{t}\right)\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\right)}{\frac{n^2(n+1)}{2} - \left(\sum_{t=1}^{n}\sqrt{t}\right)^2},$$

V případech, kdy je levostranná regresní proměnná transformací původní veličiny časové řady y_t, **lze aplikovat metodu nejmenších čtverců OLS jen s výhradou.**

Minimalizace reziduí prováděná pomocí OLS nebude totiž **založena na kritériu** $Min\ e_t^2$, **nýbrž na kritériu** $Min\ \lfloor f(e_t)\rfloor^2$, **kde** $f(.)$ **je použitá transformující funkce, nejčastěji logaritmická funkce nebo exponenciála. Pro takovéto případy by měla být užita nelineární** (prostá) **metoda nejmenších čtverců NLLS (*Non-Linear Least Squares Method*), jejímž minimalizačním kritériem je právě**

$$Min \sum_{t=1}^{n} [f(y_t) - f(\hat y_t)]^2 \qquad .$$

Výpočet je ale nutné provést některou z *numerických iteračních metod*, protože výsledný vzorec pro odhadnuté parametry nelze vyjádřit explicitně.

Hlavní zásady výběru výstižného trendu

1) Zpravidla **preferujeme trendovou křivku s co nejmenším počtem parametrů** (obvykle do 3)**. Zásadou je úspornost (*parsimony*), která je zde ještě více opodstatněná než v klasické regresní analýze, neboť vodítka pro tvar nelinearity zde** až na ojedinělé výjimky **nemůžeme vyvodit z ekonomické teorie. Jednou z možností, jak otestovat potřebu/nepotřebu nutnosti zařazení další trendové transformace může být výpočet korigovaného koeficientu determinace** $\tilde{R}^2$**. Jinou racionální úvahu lze založit na určení statistické významnosti příslušného trendového parametru** (k tomu lze užít klasické testování pomocí t-testu)**. V trendové analýze není** zdaleka tak osudové **riziko specifikační chyby spočívající ve vynechání některé z relevantních proměnných** jako je tomu v analýze regresní**.**

2) Před první volbou trendové křivky je vhodné se podívat na graf pozorovaných hodnot časové řady, který bývá prvotním vodítkem výchozí trendové specifikace. Z něho lze dost často **vyvodit *řád nestacionarity* např. tím, že vytvoříme řadu prvních nebo druhých diferencí. Pokud ani diference vyšších řádů nevedou ke stacionární řadě a řada vykazuje monotónní akcelerující růst, je to indikací pro volbu *exponenciálního trendu*** (s případným posunem výchozí úrovně. **Určitým indikátorem je pak graf průběhu reziduálních hodnot, z něhož lze často vyvodit alší transformující funkci času, která byla v základní specifikaci opomenuta** (např. mnohočlen 2. nebo 3 stupně)**.**

3) Nesmíme zapomenout na to, že **trendová analýza slouží** především **ke krátkodobým predikcím. Vzhledem k tomu, že polynomy 4. a vyšších řádů se vyznačují značnou citlivostí při predikcích, je to důvodem pro jejich vynechání z oboru možných trendových funkcí. (Ekonomické ukazatele se chování principiálně ustáleněji než např. fyzikální/technické, kde může být účelné nasazení např. *splinových funkcí*).**

4) Pokud ekonomický ukazatel vykazuje evidentně **rozdílný průběh ve sledovaném minulém období, obvykle to velmi komplikuje rozhodnutí o výběru trendu. V takovémto případě –** pokud se nevzdáme pokusu o predikci vůbec **– přistupujeme zpravidla k prolongování chování z údajů posledního období nebo z údajů toho minulého období, o němž lze důvodně předpokládat, že vývoj zde pozorovaný se vyskytne i v nejbližší budoucnosti.**

5) Přítomnost *heteroskedasticity* (standardně testované v regresní analýze) **není v případě trendové analýzy časové řady** zpravidla **vážnějším problémem.**[7] **U testování konvenčními testy nevzniká specifický problém, jen u *Whiteova testu* může být větší než obvykle pravděpodobnost výskytu součinové kombinace dvou elementárních trendových funkcí s některou z dalších zařazených** (vznikla by dokonalá multikolinearita)**. U *Goldfeld-Quandtova testu* se** zřejmě **nemůžeme opřít o obsahovou vazbu variability reziduí s proměnlivostí některé z vysvětlujících proměnných, takže jeho nasazení ztrácí původní význam.** V testování převažují prvky technické nad věcnými.

[7] Pracujeme s časovou řadou, jejíž hodnoty – aspoň v nedlouhém časovém období – jsou zpravidla dosti vzájemně blízké a rozptyl náhodných složek obvykle významněji nekolísá.

6) Naopak, **důležitým prvkem trendové analýzy je vyšetřování síly a stupně *autokorelace náhodných složek* sledované časové řady. Náhodné složce časové řady je vůbec věnována značná pozornost. Proto také obvykle první pohled na výsledky směřuje k vyšetření reziduálních hodnot, přičemž základní představu o jejich případné autokorelovanosti poskytne *Durbin-Watsonův koefiecient autokorelace 1.řádu.***

7) **Další z průvodních problémů standardní lineární regrese – *multikolinearita* – se v trendové analýze vyskytnout nemůže: K *dokonalé multikolinearitě* nemůže vést žádná lineární kombinace elementárních trendových komponent** (jsou-li tyto rozdílné) **a eventualita výskytu *přibližné multikolinearity* nemůže pocházet ze *stochastičností* „vysvětlujících proměnných„** (jsou-li elementární trendové komponenty svou povahou nestochastické).

8) Případný přínos apriorní informace: Je poměrně skromný počet případů, kdy lze k výběru nejvhodnější trendové funkce uplatnit poznatky plynoucí z externí ekonomické reality. Přece však některé existují: Ve vývoji průměrné mzdy jako nejcharakterističtějším případ lze pozorovat tendenci pravidelného každoročního procentního nárůstu (který ovšem nemusí být každoročně stejný). Je to přímým důsledkem „zvyklostí“, které jsou zažité při mzdovém vyjednávání odborářů (a od nichž se sekundárně odvíjí i mzdový nárůst pracovníků ve státních podnicích a státní správě). Obdobně, pokud by valorizace důchodů probíhala tak, že bude každoročně přidávána konstantní hodnota v Kč, bylo by to indikací lineárního trendu. Pokud by se přidávalo „o zhruba stejné procento“ (jako je to zvykem u mezd) , signalizovalo by to průběh vyjádřený exponenciální křivkou.

Kritéria posuzování přesnosti předpovědí

Střední chyba odhadu [mean error] ME

$$MSE = \frac{\sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - \hat{y}_t)}{h} \qquad MSE = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \hat{Tr}_t\right)}{n}$$

Jde o obvykle velmi malou hodnou (řádů 10^{-8} a níže) indikující „míru nelinearity" při výpočtu. Pro posouzení vlastní míry přesnosti predikční výpovědi žádný smysl nemá.

Součet čtvercových chyb odhadu [sum of squared errors] SSE

$$SSE = \sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum_{t=n+1}^{n+h} e_t^2 \qquad SSE = \sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \hat{Tr}_t\right)^2 = e_t^2$$

Je to stejné kritérium, jako kritérium nejmenších čtverců v regresním modelu (lineárním i nelineárním). Lze ho rozumně použít jen při srovnání uvažované s jinak specifikovanou trendovou funkcí (pro shodný počet pozorování). Měrovou jednotkou této míry je zde „čtverec„ původní měrné jednotky.

Střední čtvercová chyba odhadu [mean squared error] MSE

$$MSE = \frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - \hat{y}_t)^2 = \frac{1}{h} \cdot \sum_{t=n+1}^{n+h} e_t^2 \qquad MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \hat{Tr}_t\right)^2$$

se uplatňuje často coby ***kvadratická ztrátová*** („loss„) *funkce*. Lze ji dekomponovat na tři složky takto:

$$MSE = \frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - \hat{y}_t)^2 = \left(\bar{\hat{y}} - \bar{y}\right)^2 + \left(s_{\hat{y}} - s_y\right)^2 + 2\left(1 - r_{y\hat{y}}\right) s_{\hat{y}} s_y$$

, kde na pravé straně je

proporční vychýlení $\dfrac{\left(\bar{\hat{y}} - \bar{y}\right)^2}{\frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - \hat{y}_t)^2}$ **vzdálenost průměru předpovědí od průměru předpovídaných hodnot**

proporční rozptyl $\dfrac{\left(s_{\hat{y}} - s_y\right)^2}{\frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - \hat{y}_t)^2}$ **vzdálenost rozptylu předpovědí od rozptylu předpovídaných hodnot**

proporční kovariance $\dfrac{2(1 - r_{y\hat{y}}) s_{\hat{y}} s_y}{\frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - \hat{y}_t)^2}$ pokrývá zbývající nesystematickou část předpovědní chyby.

U dobré předpovědní techniky jsou první dvě složky relativně malé a výrazně převládá nesystematická složka. Součet všech tří z jich je 1. Odvození se získá z rozkladu

$$\frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - \hat{y}_t)^2 = \frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} \left(y_t - \bar{y} + \bar{y} + \hat{y}_t - \bar{\hat{y}} + \bar{\hat{y}}\right)^2 = \frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} \left(\bar{\hat{y}} - \bar{y} + \hat{y}_t - \bar{\hat{y}} + y_t - \bar{y}\right)^2$$

Odmocninová střední čtvercová chyba [root mean squared error] RMSE

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - \hat{y}_t)^2} = \sqrt{\frac{1}{h} \cdot \sum_{t=n+1}^{n+h} e_t^2} \qquad RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \hat{Tr}_t\right)^2}$$

Výhodou oproti *MSE* je vyjádření ve stejných jednotkách jako mají původní data.

Střední absolutní chyba odhadu [mean absolute error] MAE

$$MAE = \frac{\sum_{t=n+1}^{n+h} |y_t - \hat{y}_t|}{h} \qquad MAE = \frac{\sum_{t=1}^{n} |y_t - \hat{Tr}_t|}{n}$$

Její předností je – zejména v datových souborech s výraznými odchylkami některých pozorování od „standardních“ (tzv.***outliers***) - že nepenalizuje tak silně jako ***MSE*** či ***RMSE*** tyto „extrémní“ odchylky.

Dále uváděné míry již na měřítku hodnot předpovídané proměnné nezávisejí:

Střední absolutní procentuální chyba odhadu [mean absolute percentage error] MPE

$$MAPE = \frac{100}{h} \cdot \sum_{t=n+1}^{n+h} \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t} \qquad MAPE = \frac{100}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{|y_t - \hat{Tr}_t|}{y_t}$$

Zpravidla nabývá hodnot mezi 0-100%, přičemž výsledek menší/lepší než 100% říká, že daný předpovědní model je lepší než model náhodné procházky s předpověďmi trvale na nulové úrovni, tj. trvale s MAPE=100%. Kritérium je však problematicky použitelné, pokud hodnoty časové řady jsou příliš malé (oscilují kolem 0).

Korigovaná střední absolutní procentuální chyba odhadu [adjusted mean absolute percentage error] AMAPE

$$AMAPE = \frac{100}{h} \cdot \sum_{t=n+1}^{n+h} \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{(y_t + \hat{y}_t)/2} \right| \qquad AMAPE = \frac{100}{h} \cdot \sum_{t=1}^{n} \left| \frac{y_t - \hat{Tr}_t}{\left(y_t + \hat{Tr}_t\right)/2} \right|$$

Koriguje asymetrii předchozího kritéria *MAPE*: dává totiž stejný výsledek i při prohození skutečných a předpovídaných hodnot v tomto smyslu: Skutečná hodnota 0,6 a předpověď 0,8 přispějí do součtu v *AMAPE* stejně jako skutečná hodnota 0,8 a předpověď 0,6.

Střední procentní chyba odhadu [mean percentage error] MPE

$$MPE = \frac{100}{n} \cdot \sum_{t=n+1}^{n+h} \left(\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right) \qquad MPE = \frac{100}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{y_t - \hat{Tr}_t}{y_t} \right)$$

Je víceméně **doplňkovým kritériem k *ME***, kdy v součtu vystupují relativní odchylky místo absolutních.

Theilův koeficient nesouladu [Theil's U-coefficient] ThU[8]

$$ThU = \frac{\sqrt{\sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - \hat{y}_t)^2}}{\sqrt{\sum_{t=n+1}^{n+h} y_t^2} + \sqrt{\sum_{t=n+1}^{n+h} \hat{y}_t^2}}$$ **, kde**

***n*…….... délka původní časové řady** (užité pro odhad modelu)

---

[8] Henri Theil **byl významný nizozemský ekonometr a matematický ekonom [1924-2000], následník** Jana Tinbergena **na *Erasmus University v Rotterdamu*, později působil na universitě v *Chicagu* a na *University of Florida*.**

h……..... **délka předpovídaného období [h>0]**

n + h **.... délka původní časové řady prodloužená o předpovídané období.**

Někdy je ovšem toto kritérium formulováno obecněji, přičemž odchylky jsou brány vůči nějakému jednoduchému či naivnímu modelu- tzv. *benchmark*. Hodnota U leží vždy **mezi 0 a 1, přičemž hodnota 0 značí perfektní shodu** předpovědí se skutečností.

Publikace Hindls R., Hronová S, Novák, I.: Metody statistické analýzy pro ekonomy uvádí jinou verzi *Theilova koeficientu* *(zde označenou ThC)*

***Theilův koeficient nesouladu* [Theil's C-coefficient] ThC**

$$ThC = \frac{\sum_{t=n+1}^{n+h} \left(y_t - \hat{P}_t\right)^2}{\sum_{t=n+1}^{n+h} y^2{}_t}$$ **, kde**

n…….. **délka původní časové řady** (užité pro odhad modelu)

h…….. **délka časové řady po zkrácení [h>0] o** q pozorovaných hodnot

n + h **.... délka původní časové řady prodloužená o předpovídané období.**

$\hat{P}_i$ **extrapolovaná hodnota na i období dopředu, a to modelem odhadnutým na základě prvních r pozorování časové řady .**

Pokud se hodnota ThC **nachází v rozmezí 3-5%, lze mluvit o velmi uspokojivém výsledku. Model lze** s velkou pravděpodobností **považovat za použitelný k předpovědím.**

Pokud se hodnota ThC **nachází v rozmezí 5-10%, lze mluvit o jakžtakž uspokojivém výsledku. Model lze s mírnou nadějí považovat za použitelný k předpovědím**

Pokud se hodnota ThC **nachází nad úrovní 10%, nelze mluvit o uspokojivém výsledku. Model lze téměř s jistotou zavrhnout z hlediska použitelnosti k předpovědím.**

K předchozím kritériím lze přidat ještě dvě další míry, u nichž se omezujeme na posouzení toho, jak model předpovídá znaménka budoucích hodnot (tj. zda tyto hodnoty budou kladné nebo záporné) nebo změny ve směru vývoje budoucích hodnot (zda růst přejde v pokles apod.) **Někdy –** při strategických úvahách **– jde o důležitější aspekty než číselné co nejpřesnější vyjádření předpovídaných hodnot.**

***Procento správných předpovědí znaménka* PCPS**

$$PCPS = \frac{100}{h} . \sum_{t=n+1}^{n+h} z_i$$ **, kde** $z_i = 1 \quad pro \quad y_t . \hat{y}_t > 0$

$z_i = 0 \quad pro \quad y_t . \hat{y}_t \le 0$

Charakteristika (zřejmě v rozmezí 0% -100%) není nijak moc vypovídající, neboť pouze informuje o tom, zda mají skutečné a predikované hodnoty stejná znaménka. V případě, že se hodnoty analyzované časové řady pohybují ve vysokých kladných číslech (běžná situace u velké části ekonomických ukazatelů) **je prakticky bezcenná (hodnota *PCPS* bude** s velkou pravděpodobností **identicky 100).**

Procento správných (jednokrokových) předpovědí změn směru vývoje PCPD

$$PCPD = \frac{100}{h} . \sum_{t=n+1}^{n+h} z_i$$, **kde** $z_i = 1 \quad pro \quad (y_t - y_{t-1}).(\hat{y}_t - y_{t-1}) > 0$

$$z_i = 0 \quad pro \quad (y_t - y_{t-1}).(\hat{y}_t - y_{t-1}) \leq 0$$

Na rozdíl od předchozího *PCPS* respektuje tento indikátor podstatně více charakter posuzování předpovědí u ekonomických časových řad. Posuzuje poměr stejnosměrnosti vůči protisměrnosti skutečného vývoje a předpovědi (oproti y_{t-1}) v situaci, kdy známe skutečnou hodnotu řady v minulém období $t-1$. Vystižení správného směru vývoje z hodnoty y_{t-1} predikcí (růst /pokles) je někdy důležitější než samotné (přesné) **určení konkrétní hodnoty.**