

Přednáška č. 7

Vícekriteriální metody

Jana Soukopová

soukopova@econ.muni.cz

Metoda váženého součtu

angl. Weight Sum Approach - WSA,

- známá též pod názvem metoda vážených dílčích pořadí,
 - vychází z principu maximalizace užitku, ale předpokládá pouze lineární funkci užitku
-

Postup výpočtu

- Vytvoří se normalizovaná kritériální matice $R = (r_{ij})$, jejíž prvky získáme z kritériální matice Y a jejích řádků odpovídajícím ideální (I) a bazální (B) variantě pomocí transformačního vzorce:

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - B_j}{I_j - B_j}$$

- Tato matice již představuje matici hodnot užitku i -té varianty podle j -tého kritéria
-

Normalizovaná kritériální matice

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & & & & r_{2k} \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{nk} \end{pmatrix}$$

Užitek i-té varianty

- Při použití aditivní funkce užitku je potom užitek varianty a_i roven:

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^k v_j r_{ij}, \quad i = 1, \dots, n$$

- Varianta, která dosáhne maximální hodnoty užitku je pak vybrána jako „nejlepší“, nebo jsou projekty jsou seřazeny na základě klesající hodnoty funkce užitku.
-

Příklad metoda váženého součtu

Na základě expertního posudku je třeba zvolit vhodnou lokalitu pro výstavbu vodní elektrárny. Tato lokalita bude vybrána podle šesti kritérií.

- k_1 *Počet pracovních sil, které budou nutné k provozu elektrárny*
 - k_2 *Celkový objem (v MW)*
 - k_3 *Investiční náklady na výstavbu (v mld. Kč)*
 - k_4 *Celkové provozní náklady (v mil Kč)*
 - k_5 *Náklady na ŽP (v mil Kč)*
 - k_6 *Stupeň spolehlivosti provozu dle 10 stupňové stupnice (tedy minimalizace negativních důsledků pro obyvatelstvo)*
-

Kriteriální matice

$$Y = \begin{pmatrix} 65 & 90 & 6 & 5,4 & 8 & 5 \\ 50 & 55 & 2 & 9,7 & 1 & 2 \\ 68 & 58 & 4 & 7,2 & 4 & 7 \\ 35 & 75 & 10 & 7,5 & 7 & 10 \\ 42 & 72 & 6 & 2,0 & 4 & 8 \\ 70 & 95 & 7 & 3,6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Převedení minimalizačních kritérií na maximalizační

$$Y' = \begin{pmatrix} 65 & 90 & 4 & 4,3 & 0 & 5 \\ 50 & 55 & 8 & 0,0 & 7 & 2 \\ 68 & 58 & 6 & 2,5 & 4 & 7 \\ 35 & 75 & 0 & 2,2 & 1 & 10 \\ 42 & 72 & 4 & 7,7 & 4 & 8 \\ 70 & 95 & 3 & 6,1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Stanovení vah

$$w_1 = 0,111$$

$$w_2 = 0,175$$

$$w_3 = 0,286$$

$$w_4 = 0,206$$

$$w_5 = 0,111$$

$$w_6 = 0,1111$$

Ideální a bazální varianta

ideální varianta:

$$I = (70; 95; 8; 7,7; 7; 10)$$

bazální varianta

$$B = (35; 55; 0; 0,0; 0; 2).$$

Normalizovaná kritériální matice

- *Pomocí transformačního vzorce vytvoříme normalizovanou kritériální matici R .*

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - B_j}{I_j - B_j}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,86 & 0,87 & 0,50 & 0,56 & 0,00 & 0,38 \\ 0,43 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,94 & 0,08 & 0,75 & 0,32 & 0,57 & 0,63 \\ 0,00 & 0,50 & 0,00 & 0,29 & 0,14 & 1,00 \\ 0,20 & 0,43 & 0,50 & 1,00 & 0,57 & 0,75 \\ 1,00 & 1,00 & 0,38 & 0,79 & 0,29 & 0,50 \end{pmatrix}$$

Dílčí hodnoty užitku

- *Pomocí vzorce vypočteme dílčí hodnoty funkce užitku jednotlivých variant*

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^k v_j r_{ij},$$

$$u(a_1) = 0,548$$

$$u(a_2) = 0,443$$

$$u(a_3) = 0,532$$

$$u(a_4) = 0,274$$

$$u(a_5) = 0,593$$

$$u(a_6) = 0,645$$

Řešení

- Na základě metody váženého součtu byly vypočteny hodnoty dílčích funkcí užitku.
 - Uspořádáním variant podle hodnot užitku dostáváme pořadí variant:
 - $a_6, a_5, a_1, a_3, a_2, a_4$.
 - Maximální hodnoty užitku dosahuje varianta a_6 a je vybrána jako nejlepší.
-

Metody párového srovnání variant

- Lexikografická metoda
 - Metoda AHP
 - Metody třídy ELECTRE
-

Hlavní rozdíl

- nezískáme číselné celkové ohodnocení jednotlivých variant, ale výsledkem je pouze rozklad souboru hodnocených variant na několik indiferenčních tříd a preferenční uspořádání těchto tříd
 - varianty obsažené v každé indiferenční třídě lze považovat za varianty rovnocenné z hlediska celého souboru kritérií.
-

Společný rys

- základní informace pro stanovení preferenčního uspořádání variant tvoří výsledky párového srovnávání těchto variant vzhledem k jednotlivým kritériím hodnocení.
-

Lexikografická metoda

- Jednodušší metoda vícekriteriální analýzy.
 - Postupně hodnotí varianty podle jednotlivých kritérií v pořadí jejich důležitosti.
-

Postup metody

Krok 1

Uspořádání kritérií podle důležitosti od nejdůležitějšího po nejméně důležité k_1, k_2, \dots, k_k ,

Krok 2

Metoda vybírá z množiny variant A , podmnožinu $A(1)$, jejímiž prvky jsou varianty a_i , které dosahují maximální hodnoty podle nejvýznamnějšího kritéria k_1 .

Krok 3

Dále z množiny variant $A(1)$ následně vybíráme podmnožinu variant $A(2)$, jejímiž prvky jsou varianty a_j , které dosahují maximální hodnoty podle druhého nejvýznamnějšího kritéria k_2 na množině variant $A(1)$, atd.

Výpočet

Proces výběru variant končí:

- když některá podmnožina $A(i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, je jednoprvková, potom je tato varianta považována za optimální.
 - když se projde všemi kritérii k_1, k_2, \dots, k_k , a podmnožina $A(k)$ obsahuje více variant, které jsou z hlediska uvažovaných kritérií rovnocenné. Potom se podle nějakého dodatečného kritéria vybere jedna z nich jako kompromisní varianta.
-

Využití lexikografické metody

- Ve veřejné správě
 - Ministerstva
 - Obecní úřady atd.
-

Zhodnocení lexikografické metody

- často využívaná kvůli své jednoduchosti
 - Řada nevýhod.
 - Hlavní nevýhoda
 - při hodnocení se současně nepřihlíží k dosaženým hodnotám podle dalších kritérií.
 - Aby byla použitelná, nesmí existovat žádná vzájemná závislost mezi různými etapami volby, tedy žádné kritérium nesmí reagovat na utřídění získaná jinými kritérii!!!!
-

Příklad - Lexikografická metoda

- *Na základě expertního posudku je třeba zvolit vhodnou lokalitu pro výstavbu elektrárny na zpracování bioodpadů, které vznikají v zařízeních veřejného stravování (restaurace, hotely, jídelny, menzy, školní kuchyně) a podle nového nařízení EU se nesmí dále zpracovávat na masokostní moučku v kafilériích. Tato lokalita bude vybrána podle šesti kritérií.*
-

Kritéria

- k_1 *Počet pracovních sil, které budou nutné k provozu bioelektrárny*
 - k_2 *Celkový objem (v MW)*
 - k_3 *Investiční náklady na výstavbu (v mld. Kč)*
 - k_4 *Provozní náklady na provoz (v mil Kč)*
 - k_5 *Přepravní náklady na svoz bioodpadů (v mil Kč)*
 - k_6 *Stupeň spolehlivosti provozu dle 10 stupňové stupnice (tedy minimalizace negativních důsledků pro obyvatelstvo)*
-

Kriteriální matice

$$Y = \begin{pmatrix} 60 & 90 & 6 & 5,4 & 8 & 12 \\ 50 & 55 & 8 & 10,6 & 3 & 2 \\ 68 & 58 & 6 & 7,2 & 4 & 7 \\ 35 & 75 & 10 & 7,5 & 7 & 10 \\ 42 & 72 & 9 & 1,8 & 4 & 8 \\ 80 & 100 & 7 & 3,6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Seřazení kritérií podle důležitosti

- k_3 *Investiční náklady na výstavbu (v mld. Kč) – max 7 mld Kč.*
- k_6 *Stupeň spolehlivosti provozu dle 10 stupňové stupnice (tedy minimalizace negativních důsledků pro obyvatelstvo) – min 7*
- k_2 *Celkový objem (v MW) – min 70 MW*
- k_1 *Počet pracovních sil, které budou nutné k provozu bioelektrárny – min 40 osob*
- k_4 *Provozní náklady na provoz (v mil Kč) – max 5 mil.*
- k_5 *Přepravní náklady na svoz bioodpadů (v mil Kč) – max 8 mil. Kč*
-

Množina A1

- Zde je první výběr podle nejdůležitějšího kritéria

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_6\}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 60 & 90 & 6 & 5,4 & 8 & 12 \\ 50 & 55 & 8 & 10,6 & 3 & 2 \\ 68 & 58 & 6 & 7,2 & 4 & 7 \\ 35 & 75 & 10 & 7,5 & 7 & 10 \\ 42 & 72 & 9 & 1,8 & 4 & 8 \\ 80 & 100 & 7 & 3,6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Množina A2 a A3

- Zde je výběr podle druhého nejdůležitějšího kritéria

$$A_2 = \{a_2, a_5, a_6\}$$

- A následně podle třetího nejdůležitějšího kritéria

$$A_3 = \{a_5, a_6\}$$

Další postup a řešení

- Podle dalšího kritéria se nám množina nezmění, tedy

$$A_4 = \{a_5, a_6\}$$

- Podle dalšího kritéria je již množina jednoprvková

$$A_5 = \{ a_5 \}$$

Metoda AHP (Saatyho metoda)

angl. Analytic Hierarchy Process

- Jednoduchá a účinná metoda
 - Vychází z posloupnosti párových srovnání vhodně stanovených částí systému
 - Spolu s bodovací metodou patří mezi nejčastěji používané metody vícekriteriální analýzy.
-

Postup hodnocení

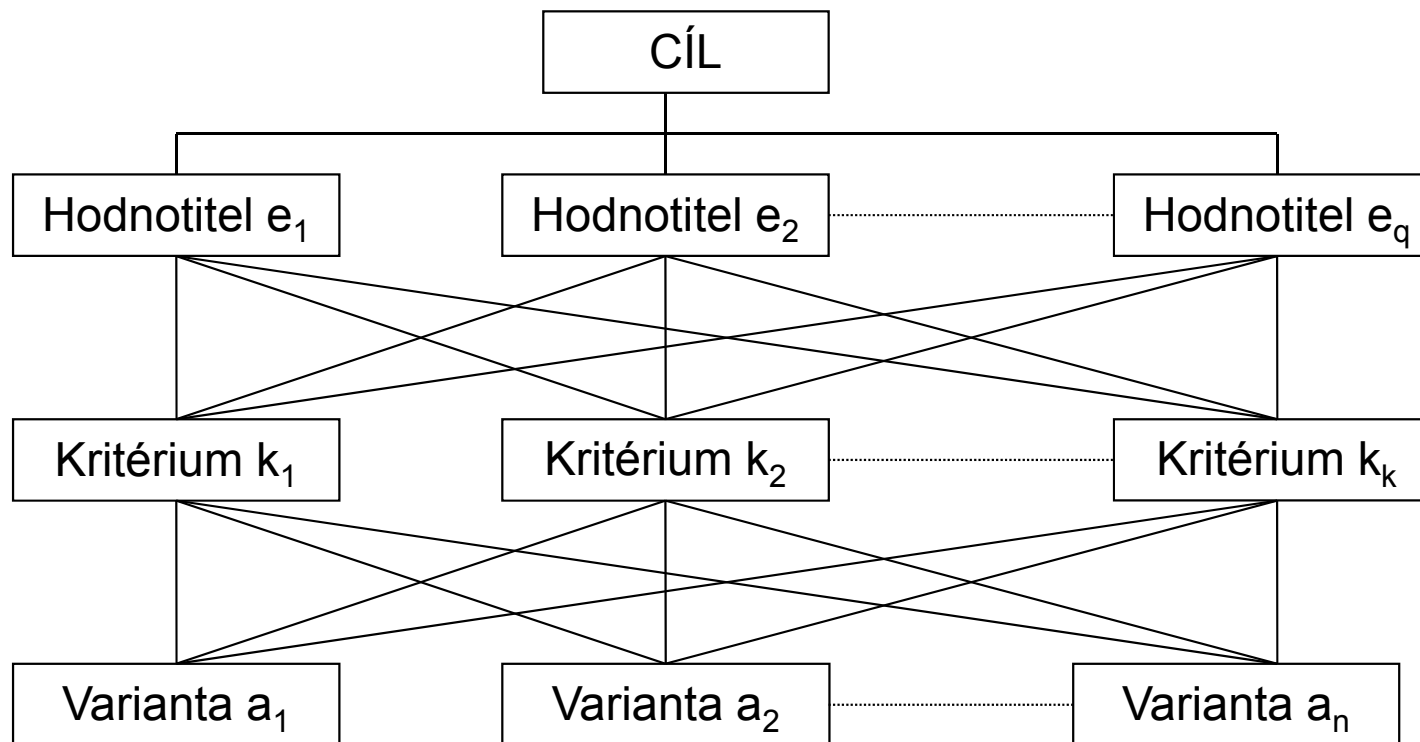
- Základem je párové srovnání

Krok 1 Vytvoření hierarchické struktury cílů, expertů, kritérií a rozhodovacích variant v několika různých úrovních s rostoucí prioritou až po vrcholovou úroveň. Každá úroveň obsahuje části s podobnými vlastnostmi, které umožňují srovnání.

Krok 2 Na každé úrovni hierarchie se provádí párové srovnání části systému. Počínaje vrcholovou úrovní se postupuje dolů a vytváří se matice párových srovnání, na jejímž základě se odhaduje vektor vah jednotlivých částí.

Krok 3 Kombinují se odhadnuté váhy jednotlivých částí systému k získání agregovaných vah a vybere se varianta s největší agregovanou vahou.

Základní hierarchická struktura



Postup výpočtu

- Metoda AHP je metoda pro stanovení priorit, která odvozuje relativní priority na základě párových srovnání prvků na stejné hierarchické úrovni s využitím škály absolutních čísel 1 až 9.
- Absolutní čísla z této škály jsou aproximací poměru vah v_j/v_k , na jejichž základě je možno odvodit hodnoty vah v_j a v_k . Metoda AHP používá pro syntézu vah v hierarchické struktuře vztah

$$u_i = \sum_{j=1}^n v_j w_{ji}$$

Kde

- w_{ji} jsou lokální váhy prvku i v dané úrovni vzhledem k prvku j z předchozí úrovně hierarchické struktury,
 - v_j jsou váhy prvků předchozí úrovně hierarchické struktury,
 - u_i je globální váha prvku i z hlediska všech prvků předchozí úrovně hierarchické struktury.
-

Zhodnocení metody AHP

- AHP je metoda, která je vhodná pro hierarchické struktury systémů.
 - Pro hodnocení veřejných projektů na základní úrovni veřejné volby ji považují za příliš složitou.
 - V oblasti veřejného sektoru se často používá pro hodnocení a porovnání kvality péče o hospitalizované pacienty na různých klinikách.
-