Matematická analýza

Pro pochopení látky jsou nutné znalosti středoškolské matematiky, zejména:

- množiny, množinové operace
- výroky, logické spojky, kvantifikátory
- číselné obory $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- pojmy konstanta, proměnná, interval, okolí bodu, minimum, maximum, absolutní hodnota
- algebraické výrazy a jejich úpravy
- základní elementární funkce a jejich vlastnosti (polynom, racionální lomená funkce, odmocnina, exponenciální a goniometrické funkce, logaritmus)
- pojmy sudá, lichá, periodická funkce
- rovnice a nerovnice

Základní definice

Funkce : Pro $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ nazýváme předpis $f : A \to B$, který každému $x \in A$ přiřadí právě jedno $y \in B$, reálnou funkcí reálné proměnné. Pro $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mluvíme o funkci n proměnných.

Používáme zápis $y = f(x)$, kde y nazýváme závislou a x nezávislou proměnnou. Pro konstantu $x_0 \in A$ čteme zápis $y_0 = f(x_0)$ jako: y_0 je funkční hodnota funkce f v bodě x_0.

Dále množinu A nazýváme definiční obor funkce f a značíme ji Df.

Množinu $\{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$ nazýváme obor hodnot funkce f, značíme Hf.

Poznámka : Funkce většinou definujeme výrazem s proměnnou x, definičním oborem pak rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž má daný výraz smysl.

Příklad : Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: $Df = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

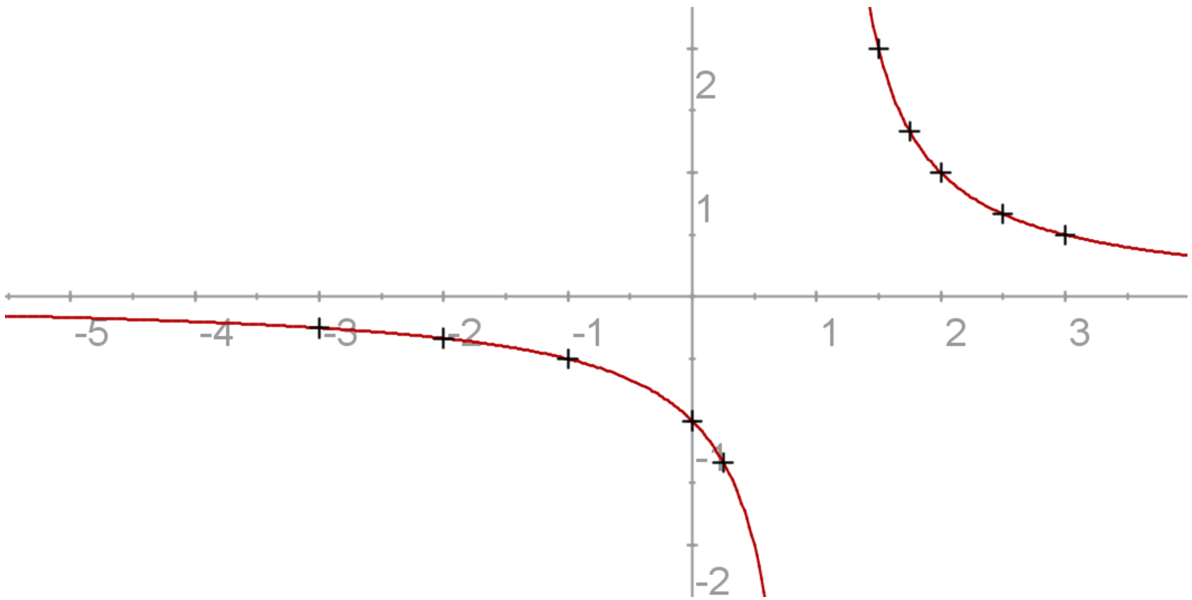
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

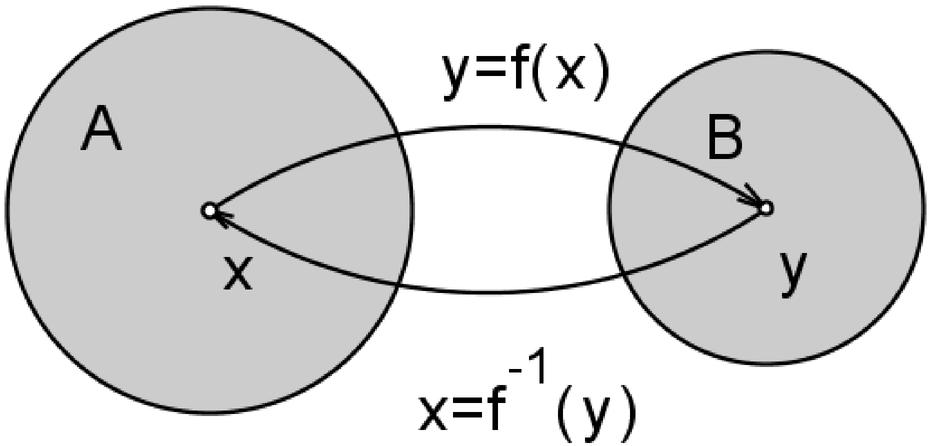
x	-3	-2	-1	0	1/4	3/2	7/4	2	5/2	3
y	-1/4	-1/3	-1/2	-1	-4/3	2	4/3	1	2/3	1/2



Inverzní funkce

Řekneme, že funkce $f : A \to B$ je prostá, jestliže v různých bodech nabývá různých hodnot, tedy $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Jestliže je funkce $f : A \to B$ je prostá a je-li $Hf = B$, pak k ní existuje inverzní funkce $f^{-1} : B \to A$, která každému $y \in B$ přiřadí jeho vzor, tedy $f^{-1}(y) = x$, kde $y = f(x)$.

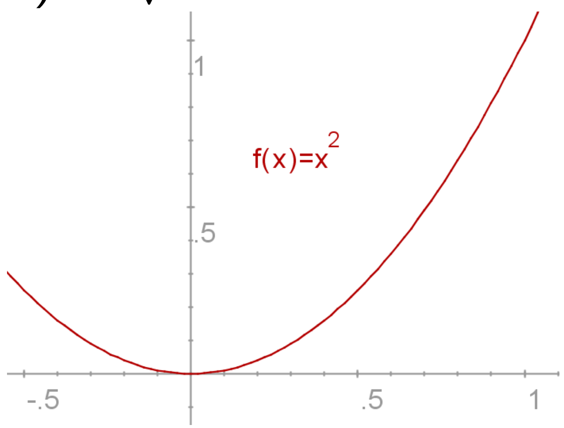


Obrázek: Schéma inverzní funkce

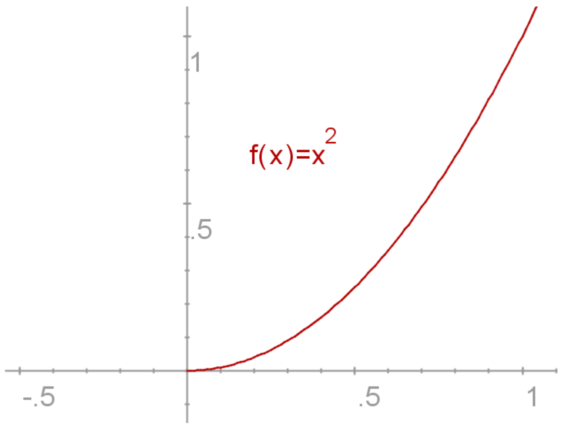
Inverzní funkce

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = 3x + 5$.
Řešení: Jde o prostou funkci z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Z rovnice $y = 3x + 5$ vyjádříme x, tedy: $x = \frac{y-5}{3}$. Proto $f^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$. Jelikož jsme zvyklí používat označení y pro závislou proměnnou, píšeme $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$.

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = x^2$.
Řešení: Funkce $f(x) = x^2$ není na celém definičním oboru prostá, inverze tedy neexistuje. Zúžením definičního oboru na $A = \langle 0, \infty)$ bychom dostali prostou funkci $f : A \to A$. Víme, že k ní inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.



Obrázek: $f : \mathbb{R} \to A$



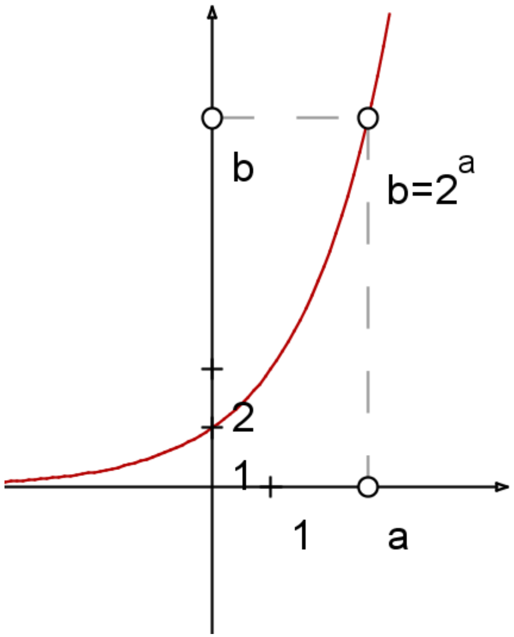
Obrázek: $f : A \to A$

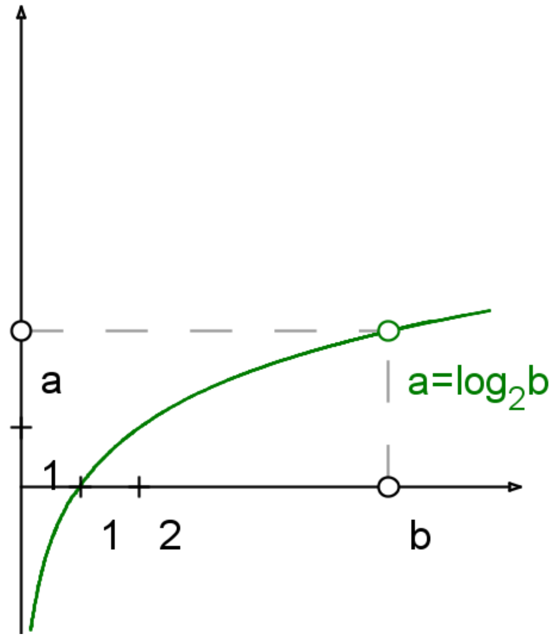
Inverzní funkce

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = 2^x$ a načrtněte jejich grafy. Řešení: Funkce $f(x) = 2^x$ je prostá funkce z $\mathbb{R}$ na $\langle 0, \infty)$. Existuje tedy inverzní funkce, ze střední školy si pamatujeme, že jde o funkci $f^{-1}(x) = \log_2 x$. Před vykreslením grafu ještě určeme několik bodů.

x	-2	-1	0	1	2
2^x	1/4	1/2	1	2	4

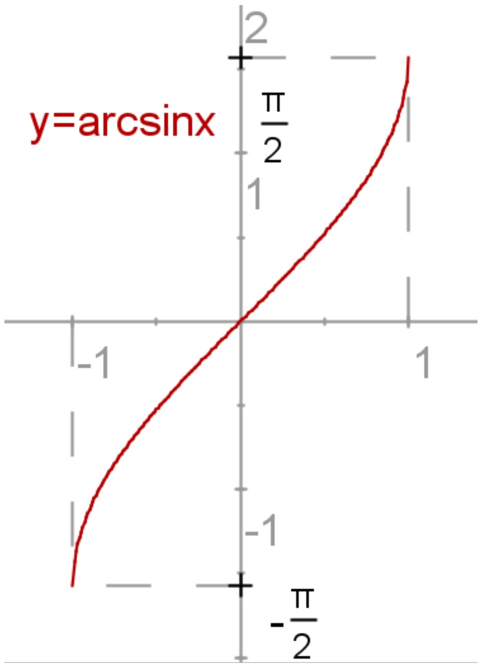
x	1/4	1/2	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2

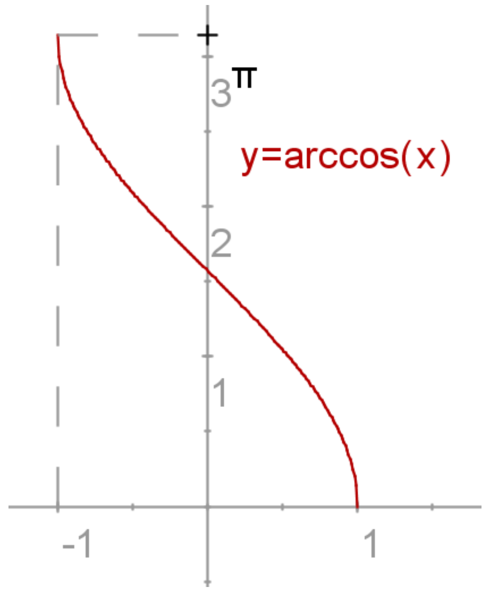




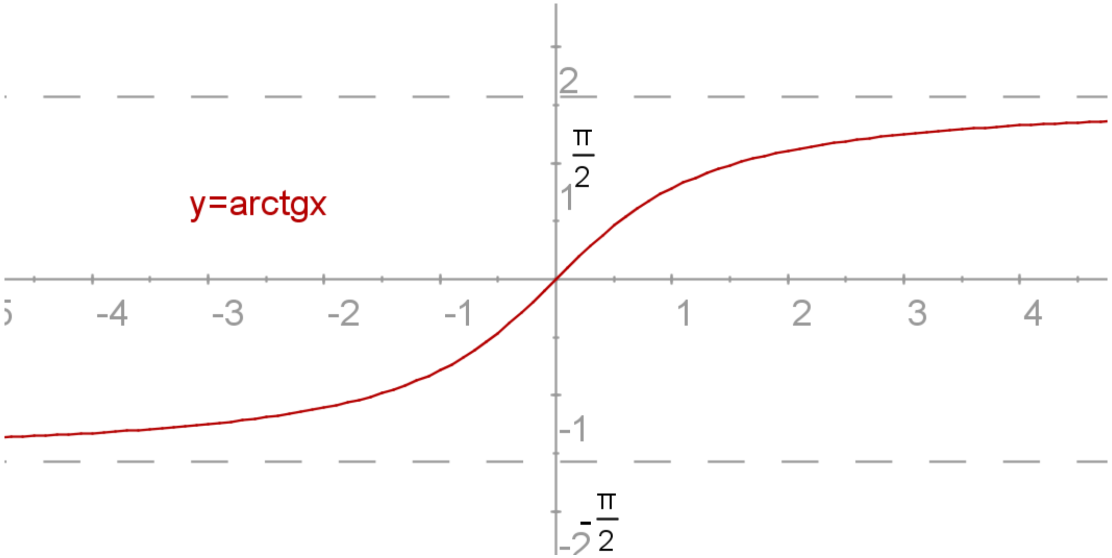
Cyklometrické funkce

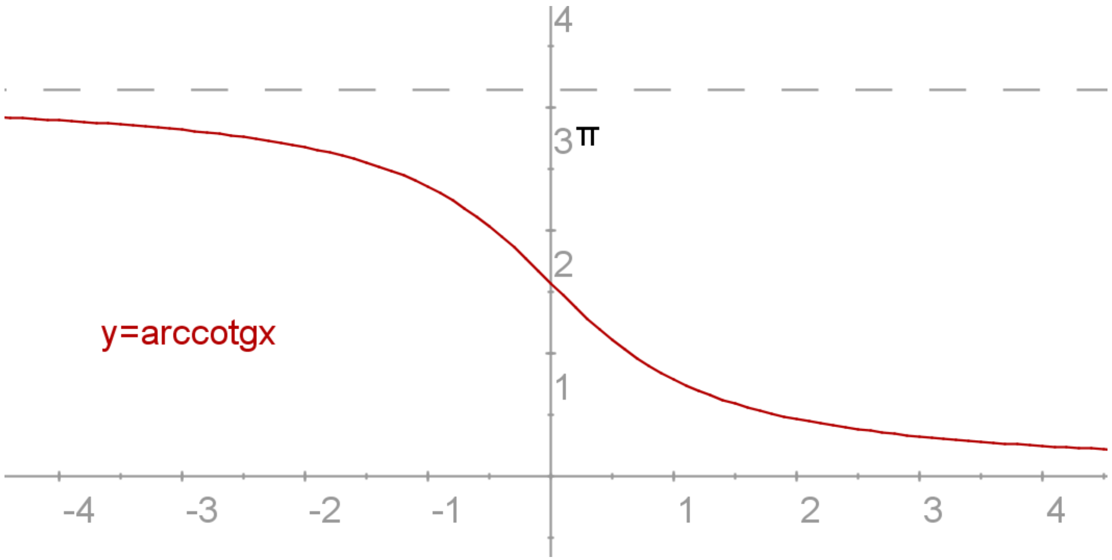
Definujeme je jako inverzní funkce ke goniometrickým funkcím.
Pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ definujeme
$arcsinx := u \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, takové, že $\sin x = u$.
$arccosx := u \in \langle 0, \pi \rangle$, takové, že $\cos x = u$.
Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme
$arctgx := u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, takové, že $tgx = u$.
$arccotgx := u \in (0, \pi)$, takové, že $cotgx = u$.





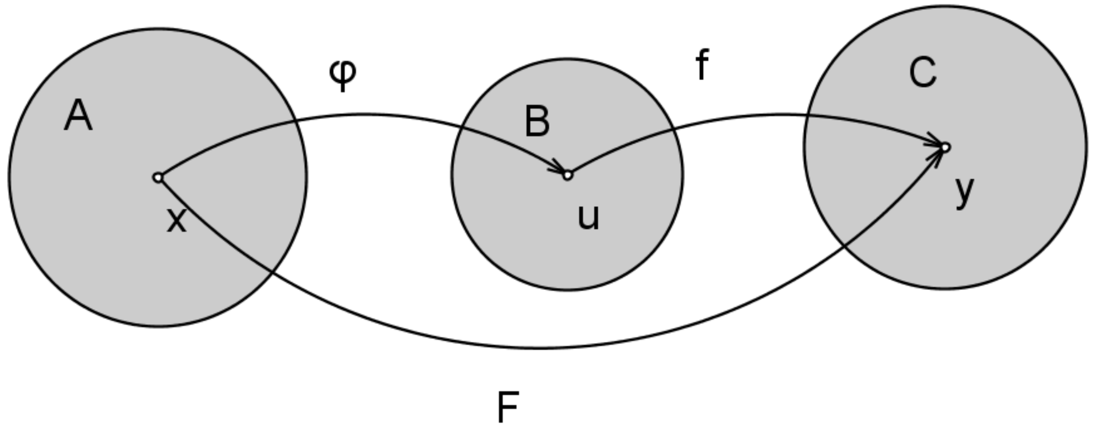
Cyklometrické funkce





Složená funkce

Máme-li funkce $\varphi : A \to B$ a $f : B \to C$, pak můžeme definovat složenou funkci $F : A \to C$ předpisem $\boxed{F(x) = f(\varphi(x))}$. Funkci $u = \varphi(x)$ nazýváme vnitřní složkou a funkci $y = f(u)$ vnější složkou funkce F.



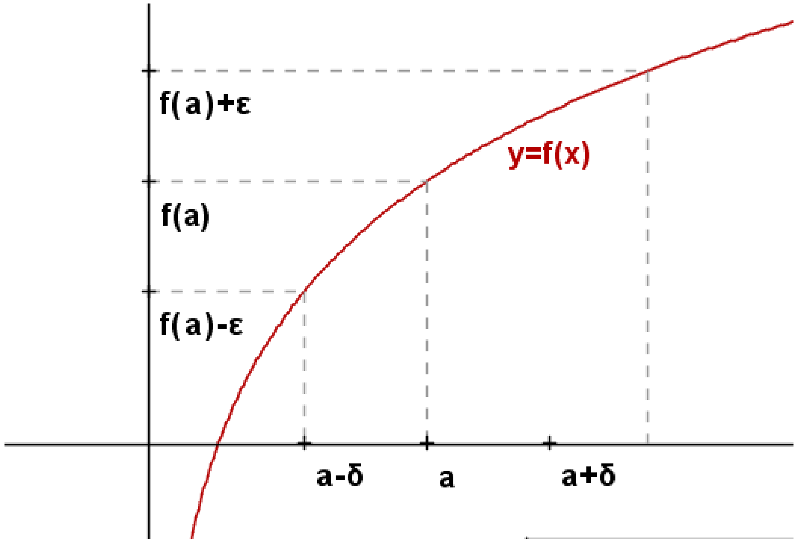
Příklad : Určete základní elementární funkce, ze kterých je složená funkce $F(x) = \frac{1}{\sin\sqrt{x+1}}$.

Řešení: $x \to x + 1 \to \sqrt{x+1} \to \sin\sqrt{x+1} \to \frac{1}{\sin\sqrt{x+1}}$.

Tedy $F(x) = f(g(h(j(x))))$, kde $j(x) = x + 1$, $h(j) = \sqrt{j}$, $g(h) = \sin h$, $f(g) = \frac{1}{g}$.

Spojitá funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, jestliže existuje $f(a)$ a pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje $U_\delta(a)$ ($\delta-$okolí bodu a) takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx f(a)$ (s přesností ε).



Poznámka : Můžeme též definovat spojitost zprava či zleva pro pravé či levé $\delta-$okolí bodu a ($U_\delta^+(a)$, resp. $U_\delta^-(a)$).

Poznámka : Základní elementární funkce jsou spojité ve všech bodech definičního oboru.

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x \to 3} \frac{x+5}{x+1}$.

Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = \frac{8}{4} = 2$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Řešení: $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tedy funkce není v bodě $x_0 = 1$ spojitá.
Určeme si několik hodnot funkce v okolí bodu $x_0 = 1$.

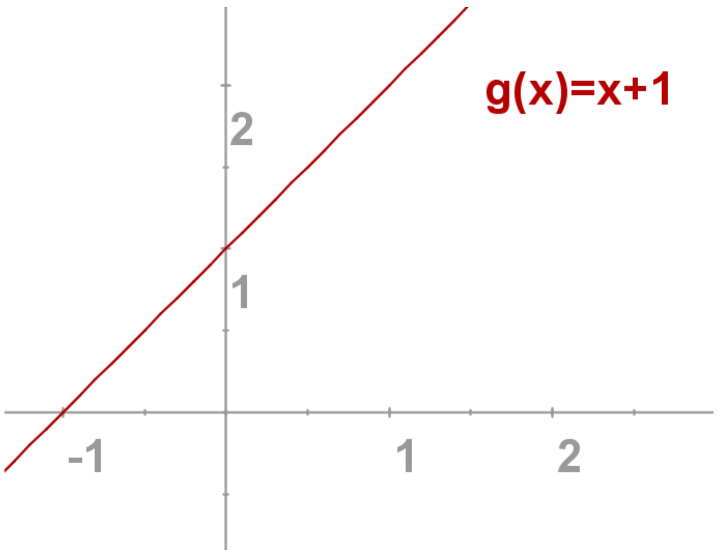
x	1,1	0,9	1,01	0,99	1,001	0,999
$f(x)$	2,1	1,9	2,01	1,99	2,001	1,999

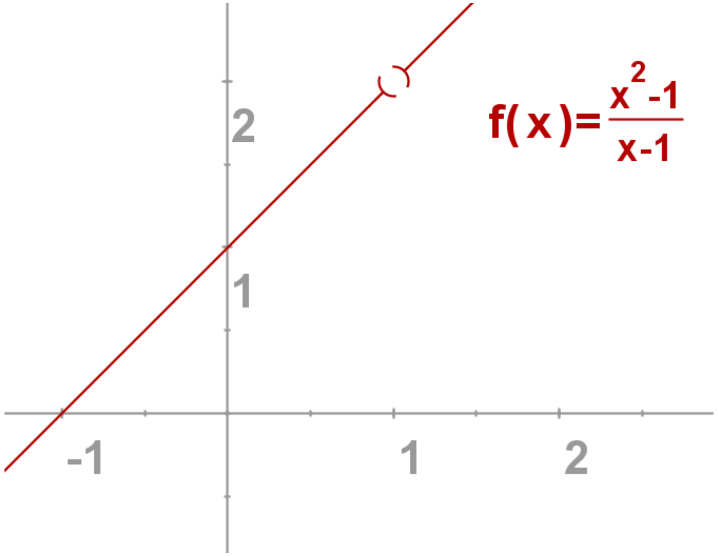
Závěr: Pro x "blížící se k 1"se hodnoty funkce "blíží k číslu 2".

Limita funkce

Věta : Pokud v nějakém okolí bodu x_0 platí: $\forall x \neq x_0 : f(x) = g(x)$, pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu právě tehdy když zde má limitu funkce $g(x)$ a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.
Řešení: Pro všechna $x \neq 1$ platí: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$. Tedy funkce $f(x)$ a $g(x) = x + 1$ splňují předpoklady předchozí věty a proto $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x + 1) = 1 + 1 = 2$.

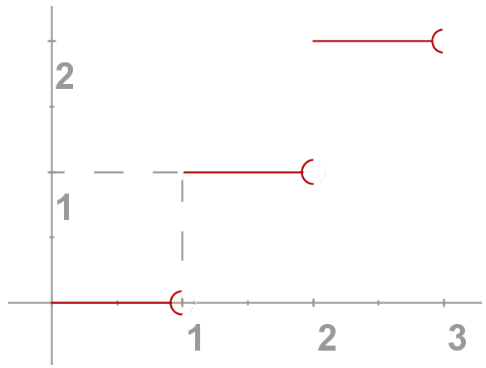




Jednostranná limita

Nahradíme-li v definici limity okolí bodu x_0 pravým okolím $U_\delta^+(a)$, respektive levým okolím $U_\delta^-(a)$, dostaneme definici limity zprava $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, resp. zleva $\lim_{x\to x_0-} f(x)$.

Příklad : Pro funkci "celá část"$f(x) = \lfloor x \rfloor$ definované jako $\lfloor x \rfloor := n \in \mathbb{N} : n \leq x \wedge n+1 > x$, určete její limitu v bodě $x_0 = 1$.
Řešení: Limita neexistuje, pro x "napravo od bodu $x_0 = 1$"platí $\lfloor x \rfloor = 1$, ale "nalevo od bodu $x_0 = 1$"platí $\lfloor x \rfloor = 0$. Existují pouze jednostranné limity $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1-} f(x) = 0$.



Obrázek: Graf funkce "celá část", $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$
- $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
- $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$
- $a \cdot \infty = \pm\infty$ ("+"pro $a > 0$, "-"pro $a < 0$)
- $a \cdot (-\infty) = \pm\infty$ ("-"pro $a > 0$, "+"pro $a < 0$)

Některé operace nejsou definovány, např. $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

Limity v nevlastních bodech

Řekneme, že funkce f má v nekonečnu limitu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká x: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$

Analogicky se definuje limita v nevlastním bodě $-\infty$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5}$

Řešení: dosazujme do funkce "velká x".

x	5	95	995	9995	99995
$f(x)$	0,3	0,03	0,003	0,0003	0,00003

Vidíme, že hodnoty funkce klesají k nule, tedy $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5} = \frac{3}{\infty} = 0$.

Nevlastní limity

Poznámka : U limit $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{a}{\infty}$, kde $a \neq 0$, platí:
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
jinak limita neexistuje.

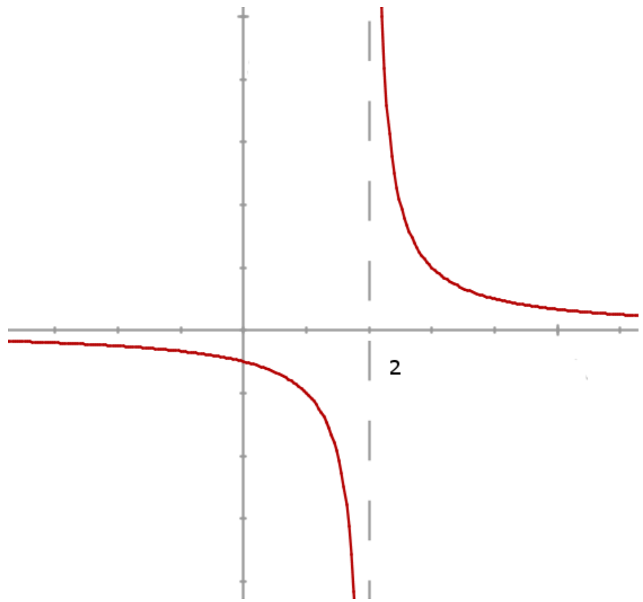
Příklad : Vyšetřete nevlastní limity funkce $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
Řešení: Limity v nevlastních bodech:
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\infty} = 0$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-\infty} = 0$
Protože $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, zkusíme též spočítat limitu funkce v bodě $x_0 = 2$: $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$ neexistuje, neboť $\frac{1}{x-2} > 0$ pro $x > 2$, ale $\frac{1}{x-2} < 0$ pro $x < 2$.
Platí pouze :
$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty$
$\lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

Nevlastní limita a graf

Jestliže $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty$, řekneme, že má funkce v bodě x_0 asymptotu bez směrnice (též svislou asymptotu): graf funkce se v pravém (resp. levém) okolí bodu x_0 blíží k přímce $x = x_0$.

Jestliže $\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$, (resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$) řekneme, že má funkce vodorovnou asymptotu : graf funkce se na pravé (resp. levé) straně blíží k přímce $y = \alpha$.

Příklad : Funkce z předchozího příkladu $f(x) = \frac{1}{x-2}$ má asymptoty $x = 2$ a $y = 0$



Pravidla pro počítání limit

Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ pro $x_0, A, B \in \mathbb{R}^*$, pak:

$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$,

pokud má pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2}$.

Řešení: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} = \frac{\infty}{-\infty}$, výraz není definován. Pro $x \neq 0$ můžeme zlomek upravit: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2}-1} = \frac{2+0+0}{0-1} = -2$

Limita složené funkce

Je-li $F(x) = f(\varphi(x))$ a funkce f je spojitá v bodě a, kde $a = \lim_{x\to x_0} \varphi(x)$, potom $\lim_{x\to x_0} F(x) = f(\lim_{x\to x_0} \varphi(x)) = f(a)$.

Příklad : $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0$

Poznámka : U limit typu $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, apod. se někdy funkce rozšíří vhodným výrazem na podílový tvar.

Příklad :

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \text{"}\infty - \infty \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$

Derivace

Jestliže pro funkci f a bod x_0 existuje číslo

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pak toto číslo nazýváme derivací funkce f v bodě x_0.

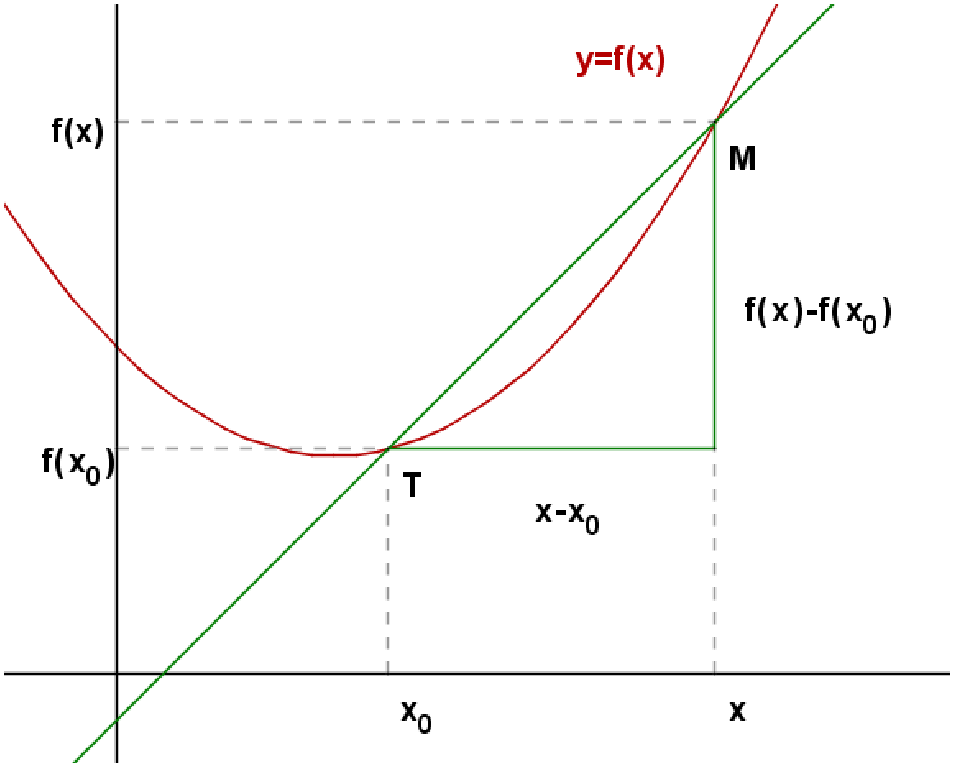
Poznámka : V případě, že existuje jen $\lim_{x \to x_0+}$, mluvíme o derivaci zprava, pro $\lim_{x \to x_0-}$, mluvíme o derivaci zleva

Příklad : Určete $f'(2)$, je-li $f(x) = x^2$.
Řešení: $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4$

Poznámka : Pro $y = f(x)$ píšeme též $y' = \frac{dy}{dx}$, derivace tedy vyjadřuje okamžitý relativní přírůstek neboli tempo růstu závislé proměnné. V ekonomii například veličina TC (celkové náklady) závisí na veličině Q (velikost produkce). Definujeme veličinu $MC = TC' = \frac{dTC}{dQ}$, tuto veličinu nazýváme marginální náklady.

Geometrický význam derivace

Podíl $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je směrnicí přímky jdoucí body $T[x_0, f(x_0)]$, $M[x, f(x)]$:



Limitním přechodem se bod M přibliží k bodu T, číslo $f'(x_0)$ tedy vyjadřuje směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$.

Derivace vyšších řádů

Derivace jako funkce: Má-li funkce f derivaci v každém bodě x_0 intervalu I (případně v krajních bodech intervalu má derivaci zprava, resp. zleva), pak je na tomto intervalu spojitá. Přiřazení $x_0 \to f'(x_0)$ zde definuje funkci f'.

Příklad : Určete funkci f' je-li $f(x) = x^2$.

Řešení:

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$

Závěr: Pro $x \in \mathbb{R}$ platí: $f'(x) = 2x$.

Jestliže na nějakém intervalu $I_1 \subseteq I$ má funkce f' derivaci, pak tuto derivaci značíme f'' a nazýváme druhou derivací. Analogicky můžeme derivovat třetí derivaci a derivace vyšších řádů.

Příklad : Určete druhou derivaci f'' pro funkci $f(x) = x^2$.

Řešení: Jelikož $f'(x) = 2x$, platí: $f''(x) = (2x)' = 2$.

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \ r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x lna, a > 0$
- $(lnx)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x.lna}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(cotgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(arccotgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$

Pravidla pro derivování

Příklad : Určete derivaci f' pro funkci $f(x) = \sqrt{x^7}$.
Řešení: Jelikož $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$, pro $x \geq 0$ platí: $f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

Pro libovolné funkce $f(x),\ g(x)$ a $c \in \mathbb{R}$ platí ve všech bodech, kde mají f a g derivaci a kde jsou násl. výrazy definovány:

- $(c.f(x))' = c.f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Příklad : Určete derivace pro funkce $u(x) = \sin x \cdot e^x$, $v(x) = \frac{arctgx}{x^2}$.
Řešení: $u'(x) = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot (e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x$

$$v'(x) = \frac{(arcgtx)' \cdot x^2 - arctgx \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{x^2}{1+x^2} - (arctgx) \cdot 2x}{x^4}$$

Derivace složené funkce $F(x) = f(\varphi(x))$

Má-li vnitřní složka $u = \varphi(x)$ derivaci v bodě x_0 a vnější složka v bodě $u_0 = \varphi(x_0)$, pak existuje $F'(x_0)$ a platí:

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

Příklad : Určete derivaci funkce $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
Řešení: Jde o složenou funkci, vnitřní složka $u = x^2 + 1$, vnější složka $f(u) = \sqrt{u}$.
Tyto funkce mají derivace $u' = 2x,\ f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$. Tedy
$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$.

Použití derivací

Pomocí derivací lze řešit velmi rozsáhlou skupinu praktických úloh: výpočet složitých limit, hledání extrémů funkce, vyšetřování průběhu funkce, přibližné výpočty, apod.

Příklad : Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = e^{1-x}$ v bodě $T = [1, f(1)]$.

Řešení: Dle definice derivace je směrnice hledané tečny rovna $f'(1)$. Z analytické geometrie víme, že rovnice přímky procházející bodem $T = [1, f(1)]$ se směrnicí $f'(1)$ je: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$.

Nyní zbývá určit čísla $f(1),\ f'(1)$:

$f(1) = e^0 = 1$,

$f'(x) = e^{1-x} \cdot (1 - x)' = -e^{1-x}$. Tedy $f'(1) = -e^0 = -1$.

Rovnice hledané přímky je $y - 1 = -1 \cdot (x - 1)$, tj. $y = -x + 2$.

Výpočet limit pomocí derivací - *L'Hôspitalovo pravidlo*

Uvažujme limitu $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Pak: existuje - li

$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$, existuje i $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$,

přičemž symbol "lim"může představovat libovolnou limitu $x \to a \in \mathbb{R}^*$ nebo i jednostrannou limitu $x \to a+$ nebo $x \to a-$.

Příklad : Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Řešení: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = "\frac{0}{0}"$. Použijeme *L'Hôspitalovo pravidlo*:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Poznámka : Některé limity je nutné před vlastním výpočtem převést do podílového tvaru.

Příklad : Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \mathit{ln} x$.

Řešení: $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \mathit{ln} x = "0 \cdot (-\infty)"$. Limitu zapíšeme jako:

$\lim_{x\to 0+} \frac{\mathit{ln} x}{x^{-\frac{1}{2}}}$. Nyní již jde o limitu typu "$\frac{0}{0}$", použijeme L' H:

$\lim_{x\to 0+} \frac{\mathit{ln} x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0+} -2x^{\frac{1}{2}} = 0.$

Derivace a monotónnost funkce

Věta : Uvažujme funkci $f(x)$, která má na intervalu I derivaci $f'(x)$.
Pak platí:

- je-li $f'(x) > 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I rostoucí.
- je-li $f'(x) < 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I klesající.
- je-li $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I neklesající.
- je-li $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I nerostoucí.

Příklad : Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$
Řešení: Budeme vycházet z funkce $f'(x) = 3x^2 - 3$. Nulové body funkce $f'(x)$ jsou $-1, 1$, ty rozdělí reálnou osu na tři intervaly.
Znamení funkce $f'(x)$ je následující :

(-∞, -1)	(-1,1)	(1,∞)
+	-	+

Tedy podle předchozí věty je funkce $f(x)$ rostoucí na intervalu $(-\infty, -1)$, klesající na $(-1, 1)$ a opět rostoucí na $(1, \infty)$.