Derivace a monotónnost funkce

Věta : Uvažujme funkci $f(x)$, která má na intervalu I derivaci $f'(x)$. Pak platí:

- je-li $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I rostoucí.
- je-li $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I klesající.
- je-li $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I neklesající.
- je-li $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I nerostoucí.

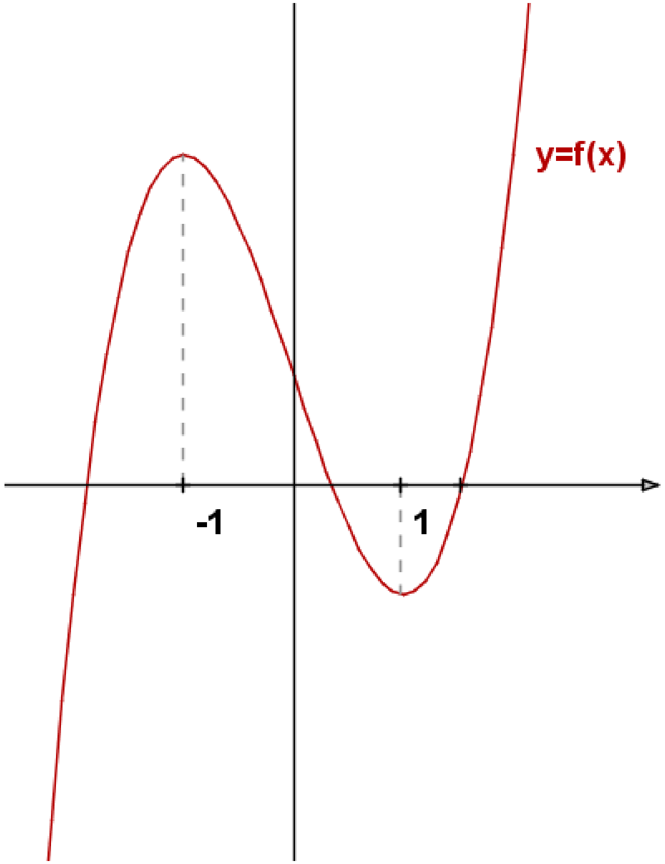
Příklad : Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$
Řešení: Budeme vycházet z funkce $f'(x) = 3x^2 - 3$. Nulové body funkce $f'(x)$ jsou $-1, 1$, ty rozdělí reálnou osu na tři intervaly. Znamení funkce $f'(x)$ je následující :

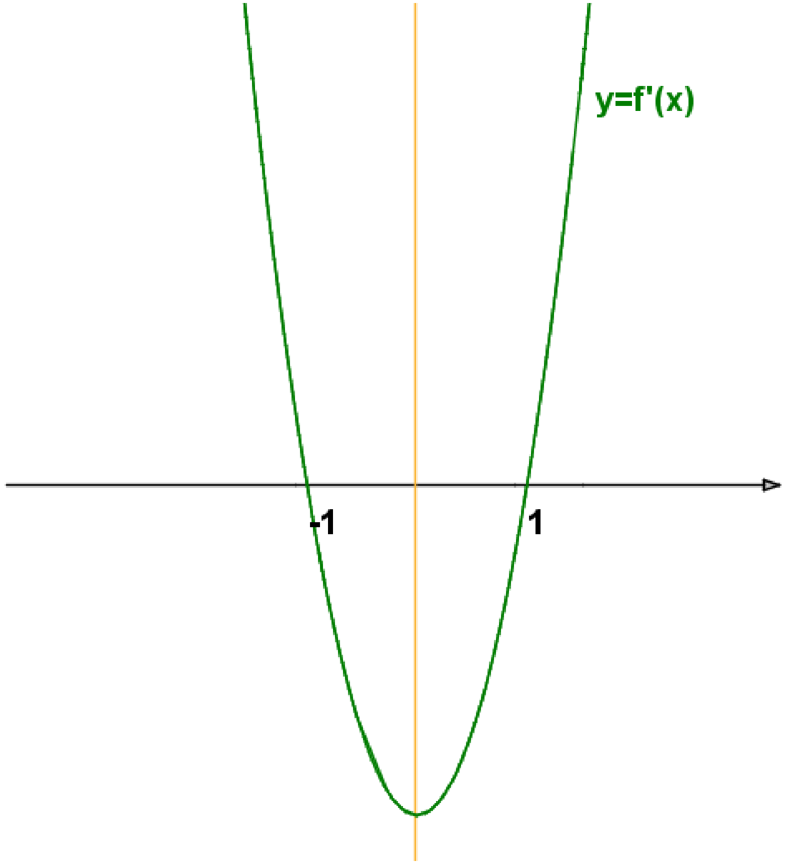
(-∞, -1)	(-1,1)	(1,∞)
+	-	+

Tedy podle předchozí věty je funkce $f(x)$ rostoucí na intervalu $(-\infty, -1)$, klesající na $(-1, 1)$ a opět rostoucí na $(1, \infty)$.

Intervaly monotónnosti funkce - příklad

Znázorněme si graf funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$ a graf její derivace $f'(x) = 3x^2 - 3$.





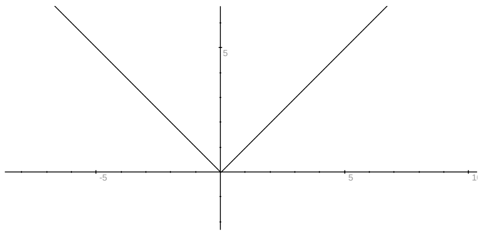
Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální minimum (resp. maximum), jestliže je definována v nějakém okolí bodu x_0 a jestliže pro všechna x z tohoto okolí platí $f(x) \geq f(x_0)$, resp. $f(x) \leq f(x_0)$.

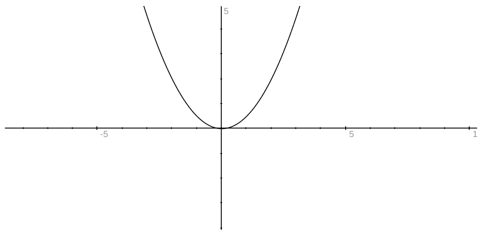
Lokální minima a maxima souhrnně nazýváme lokální extrémy.

Věta : Pokud má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li zde derivace, pak pro tuto derivaci platí $f'(x_0) = 0$. Body s nulovou derivací nazýváme stacionární.

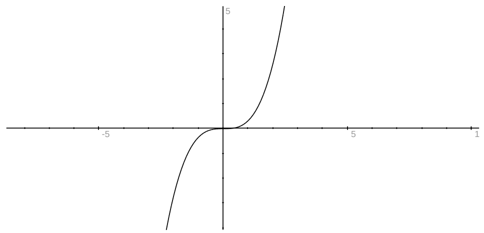
Poznámka : Podmínka $f'(x_0) = 0$ však není ani nutnou ani postačující podmínkou pro existenci extrému, viz funkce $f_1(x)$, která má v bodě $x_0 = 0$ lokální minimum, ale nemá zde derivaci nebo funkce $f_3(x)$, pro kterou platí $f'(0) = 0$, ale nemá žádný lokální extrém.



Obrázek: $f_1(x) = |x|$



Obrázek: $f_2(x) = x^2/2$



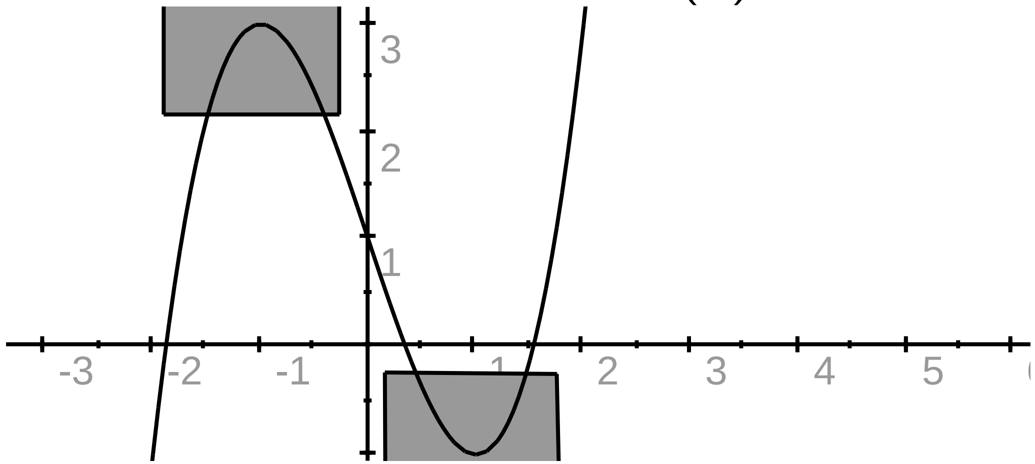
Obrázek: $f_3(x) = x^3/3$

Existence lokálního extrému

Věta : Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci a platí $f'(x_0) = 0$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že:

- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x_0) > 0$ a $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální maximum
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x_0) < 0$ a $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální minimum

Příklad : Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$
Řešení: Již dříve jsme spočetli $f'(x) = 3x^2 - 3$ a našli stacionární body $-1, 1$. Víme, že derivace $f'(x)$ je kladná nalevo od bodu $x_1 = -1$ a napravo od bodu $x_2 = 1$ a záporná mezi nimi. Takže v bodě $x_1 = -1$ nastává lokální maximum, $f(-1) = 3$ a v bodě $x_2 = 1$ lokální minimum, $f(1) = -1$.



Absolutní extrémy

Řekneme, že funkce $f(x)$ má na množině M absolutní minimum (resp. maximum) v bodě x_0, jestliže je funkce definována na M a platí
$\forall x \in M : f(x) \geq f(x_0)$, resp. $\forall x \in M : f(x) \leq f(x_0)$.

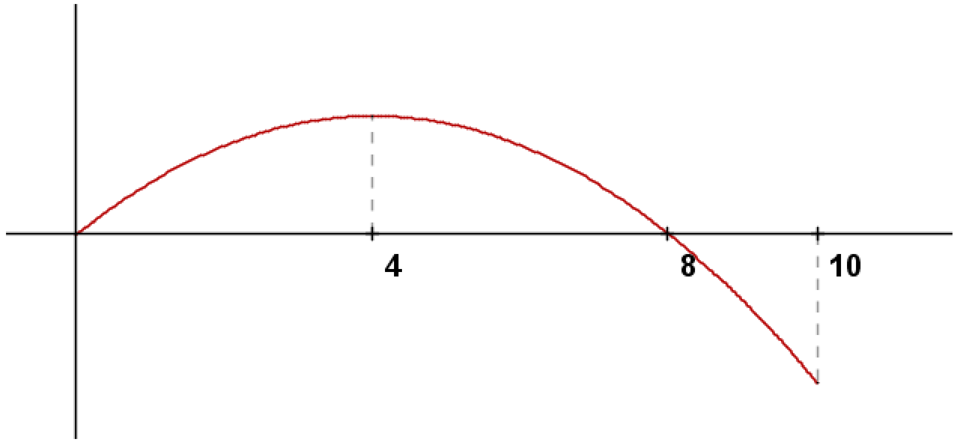
Poznámka : Absolutní minima a maxima nazýváme absolutní extrémy nebo též globální extrémy. Pokud v definici zaměníme neostré nerovnosti za ostré, dostaneme tzv. ostré (či vlastní) extrémy.

Věta : (Weierstrassova) Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak funkce $f(x)$ nabývá na tomto intervalu svého absolutního minima, a to buď v bodě lokálního extrému nebo v některém z krajních bodů a, b. Totéž platí pro absolutní maximum.

Absolutní extrémy - příklad

Příklad : Celkové příjmy (TR) i celkové náklady (TC) jsou funkcí vyrobeného množství, bylo zjištěno, že:
$TR(Q) = Q^3 - 2Q^2 - 2Q$,
$TC(Q) = Q^3 - Q^2 - 10Q$
Optimalizujte zisk $P(Q) = TR(Q) - TC(Q)$, jestliže výrobní kapacita je 10 jednotek produktu.

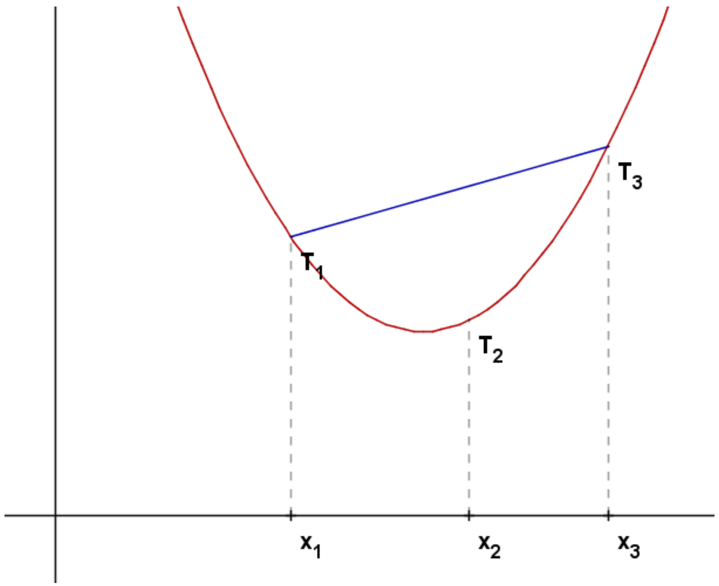
Řešení: Hledáme tedy extrémy funkce $P(Q) = -Q^2 + 8Q$ na intervalu $\langle 0, 10\rangle$.
Spočteme $P'(Q) = -2Q + 8$, stacionární bod je $Q = 4$.
Globální extrémy mohou nastat v bodech $0, 4, 10$. Porovnáme hodnoty $P(0) = 0,\ P(4) = 16,\ P(10) = -20$. Maximálního zisku je tedy dosaženo pro množství $Q = 4$, naopak největší ztrátu způsobí úplné využití výrobních kapacit, $Q = 10$.



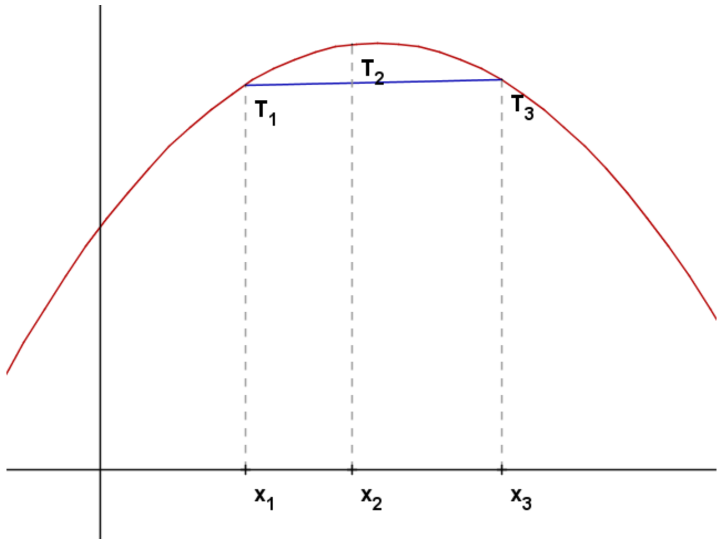
Konvexita a konkávnost funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ je na intervalu I

- ryze konvexní, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ platí: $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$ bod $T_2 = [x_2, f(x_2)]$ leží pod úsečkou spojující body $T_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $T_3 = [x_3, f(x_3)]$. Obdobně o funkci f řekneme, že je na I
- ryze konkávní, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ platí: $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$ bod $T_2 = [x_2, f(x_2)]$ leží nad úsečkou spojující body $T_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $T_3 = [x_3, f(x_3)]$



Obrázek: Konvexní funkce



Obrázek: Konkávní funkce

Konvexita a konkávnost funkce

Poznámka : Připustíme-li v definici, aby bod T_2 ležel i na úsečce $T_1 T_3$, pak vynecháme slůvko "ryze".

Věta : Nechť funkce $f(x)$ má na intervalu I druhou derivaci. Pak platí

- $\forall x \in I : f''(x) \geq 0$, pak je funkce konvexní na I
- $\forall x \in I : f''(x) \leq 0$, pak je funkce konkávní na I

Poznámka : Body, ve kterých "se mění konvexita a konkávnost funkce"nazýváme inflexní body. (Přesná definice je ve skriptech). Funkce může mít inflexní bod pouze v bodech, kde existuje první derivace a druhá derivace buď neexistuje nebo je nulová.

Věta : Jestliže pro funkci f v bodě x_0 platí: $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$ a $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, pak

- je -li n sudé, má funkce f v bodě x_0 inflexní bod
- je -li n liché, má funkce f v bodě x_0 lokální extrém,a to maximum pro $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ a minimum $f^{(n+1)}(x_0) > 0$.

Konvexita a konkávnost funkce - příklad

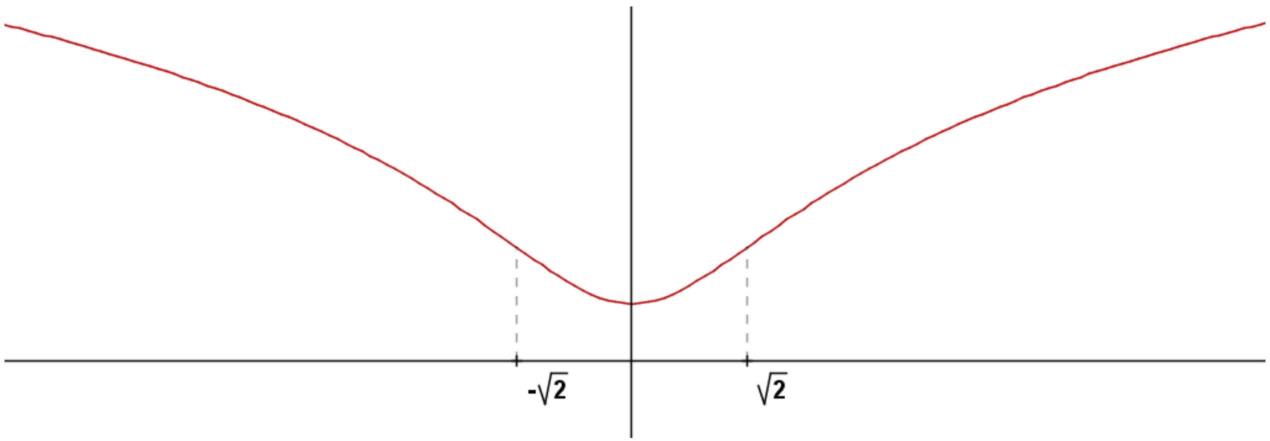
Příklad : Je dána funkce $f(x) = ln(x^2 + 2)$. Určete inflexní body této funkce a zjistěte, kde je konvexní a kde konkávní.

Řešení: Určíme druhou derivaci, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}$, $f''(x) = \frac{2(x^2+2)-2x.2x}{(x^2+2)^2} = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$.

Nulové body druhé derivace jsou $\pm\sqrt{2}$. Určeme znamení funkce $f''(x)$:

(-$\infty, -\sqrt{2}$)	(-$\sqrt{2}, \sqrt{2}$)	($\sqrt{2}, \infty$)
-	+	-

Tedy funkce je konkávní na intervalu $(-\infty, -\sqrt{2})$, konvexní na $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a opět konkávní na $(\sqrt{2}, \infty)$. inflexní body jsou $\pm\sqrt{2}$.



Asymptoty funkce

Asymptoty jsou přímky, ke kterým "se blíží"graf funkce.

Asymptotou bez směrnice nazveme přímku $x = a$, pokud $\lim_a f(x) = \pm\infty$, kde symbol $\lim_a$ označuje některou z limit $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a-}$, $\lim_{x\to a+}$

Příklad : Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ má asymptoty bez směrnice $x = -2$, $x = -3$, neboť

$\lim_{x\to -3-} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to -3+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -2-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -2+} f(x) = \infty$

Přímku $y = Ax + B$ nazveme asymptotou funkce $f(x)$ ve nevlastním bodě ∞, resp. $-\infty$, jestliže $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (Ax + B)] = 0$, resp. $\lim_{x\to -\infty}[f(x) - (Ax + B)] = 0$.

Příklad : Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$ má v nevlastních bodech asymptotu $y = 0$, protože $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{x^2+5x+6} - 0) = 0$.

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax)$, resp.

$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax)$.

Příklad : Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Řešení: Nejprve určíme asymptotu v $+\infty$:

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$

Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 2$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:

$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$

Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 2$.

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme:

1. Df, nulové body a znamení funkce, periodicitu, paritu funkce
2. Intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce
3. Kde je funkce konvexní, konkávní a jaké jsou inflexní body funkce
4. Asymptoty a graf funkce

Příklad : Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Řešení:

1. Funkce je definovaná na $\mathbb{R}$, je všude kladná, není sudá ani lichá ani periodická
2. $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, stacionární bod je -1, funkce je klesající na $(-\infty, -1)$ a rostoucí na $(-1, \infty)$, tedy v bodě -1 nabývá funkce lokálního minima $f(-1) = 1$.
3. $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}$, druhá derivace je všude kladná, tedy funkce je konvexní na $\mathbb{R}$.
4. Funkce nemá svislé asymptoty. Určeme ještě asymptoty funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ v nevlastních bodech.

Průběh funkce - příklad

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = 1,$

$B = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) =$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = 1$

Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 1$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:

$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = -1,$

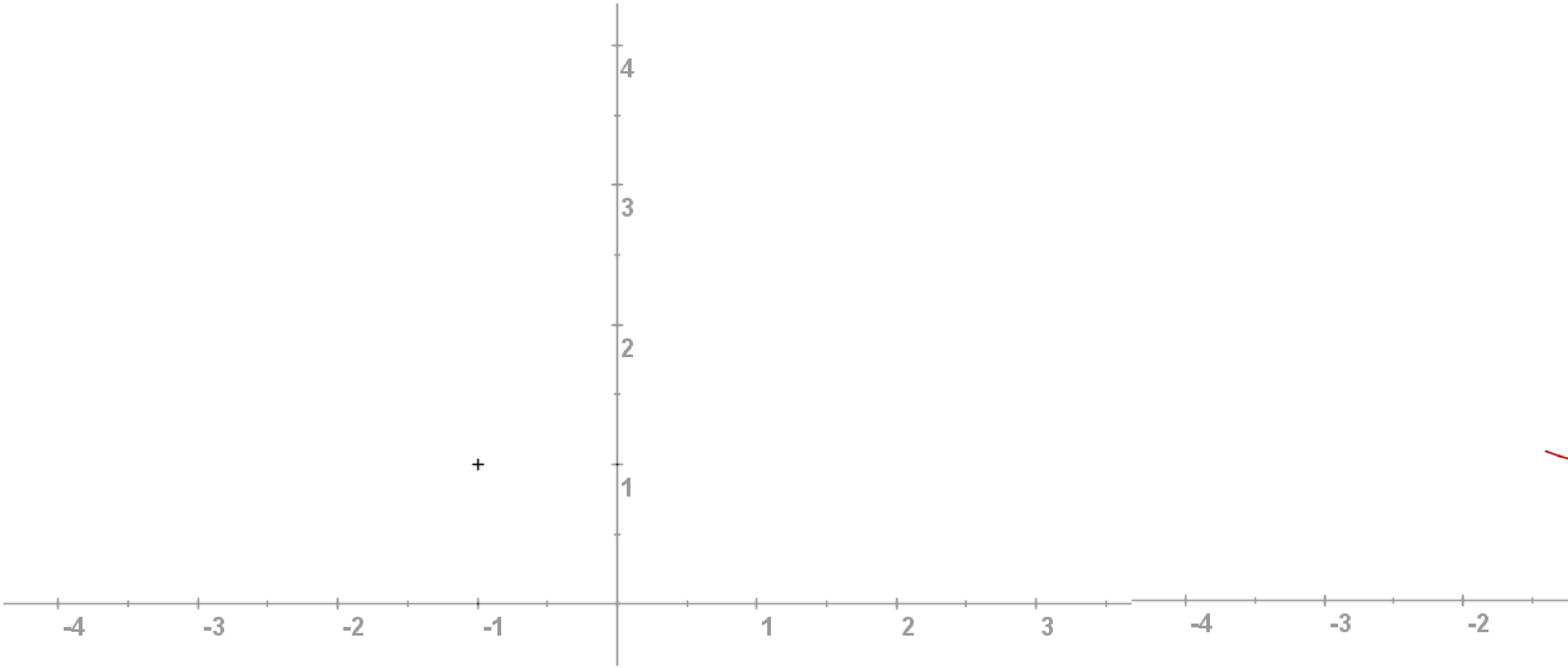
$B = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} + x\right) =$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} + x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-x}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} = -1$

Tedy hledaná asypmtota je: $y = -x - 1$. Nyní již můžeme nakreslit graf funkce.

Průběh funkce - příklad

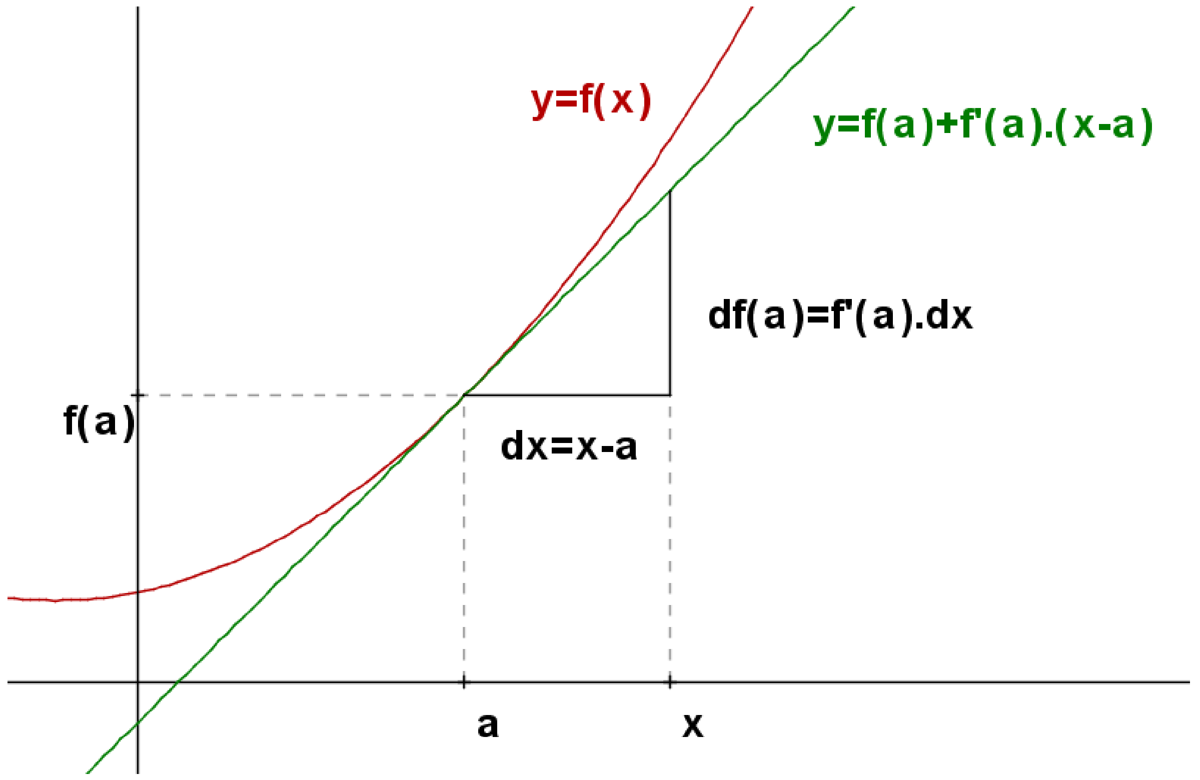
Zjistili jsme, že: funkce má lokální minimum v bodě -1, $f(-1) = 1$ funkce je konvexní funkce má v $+\infty$ asymptotu $y = x + 1$ funkce má v $-\infty$ asymptotu $y = -x - 1$ nyní již můžeme načrtnout graf



Obrázek: Graf funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Diferenciál

Uvažujme funkci $f(x)$, která má v bodě a derivaci $f'(a)$. Sestrojíme - li v bodě a tečnu ke grafu funkce f, $t : y = f(a) + f'(a).(x - a)$, můžeme pro x blízká bodu a odhadnout hodnotu $f(x)$ jako $f(x) \approx f(a) + f'(a).(x - a)$. Výraz $df(a) = f'(a).(x - a)$ nazýváme diferenciálem funkce f v bodě a, píšeme $df(a) = f'(a).dx$.



Obrázek: Diferenciál funkce $f(x)$ v bodě a pro $dx = (x - a)$

Diferenciál - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$.

1. Určete diferenciál funkce f v bodě a
2. Pomocí tohoto diferenciálu odhadněte $\sqrt{5}$.

Řešení:

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$. Tedy $df(4) = \frac{dx}{4}$.
2. $\sqrt{5} = f(5) \approx f(a) + f'(a).(5 - a) = \sqrt{4} + \frac{5-4}{4} = 2,25$

Pozn.: Skutečná hodnota zaokrouhlená na 3 desetinná místa je $\sqrt{5} = 2,236$.

Taylorův polynom

Ještě přesnější odhady můžeme získat pomocí Taylorova polynomu.
Má-li funkce $f(x)$ derivace v bodě a derivace až do n-tého řádu, pak v tomto bodě definujeme Taylorův polynom stupně n:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

Pro "x blízká bodu a"platí $f(x) \approx T_n(x)$, chybu $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ lze vyjádřit v různých tvarech.

Příklad : Pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$

1. Určete Taylorův polynom $T_3(x)$
2. Pomocí tohoto polynomu odhadněte $\sqrt{5}$.

Řešení:

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$.
   Dosadíme: $f'(4) = \frac{1}{4}$, $f''(4) = \frac{-1}{32}$, $f'''(4) = \frac{3}{256}$
   Tedy $T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{32}.(x-4)^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{256}.(x-4)^3$
2. $\sqrt{5} = f(5) \approx 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{32} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{256} = 2,236328125$

Pozn.: Skutečná hodnota zaokrouhlená na 3 desetinná místa je $\sqrt{5} = 2,236$.

Integrální počet - primitivní funkce

Jestliže $F(x)$ a $f(x)$ jsou takové funkce, že pro všechna x z intervalu I platí $f(x) = F'(x)$, pak řekneme, že $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na intervalu I.

Příklad : Funkce $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 5$ je primitivní k $f(x) = 3x^2 + x + 3$ na $\mathbb{R}$, protože $f(x) = F'(x)$.

Poznámka : Je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ na intervalu I, pak funkce $F(x)$ je zde spojitá (dokonce má derivaci). Jaké podmínky musí splňovat $f(x)$? Postačující podmínkou k tomu, aby k $f(x)$ existovala primitivní funkce je spojitost $f(x)$ na I. Je primitivní funkce určena jednoznačně?

Příklad : Funkce $G(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 7$ je též primitivní k funkci $f(x) = 3x^2 + x + 3$ z předchozího příkladu.

Věta : Jsou-li funkce $F(x)$ a $G(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$, taková, že pro $\forall x \in I : F(x) = G(x) + c$

Neurčitý integrál

Množinu všech funkcí primitivních k $f(x)$ na I nazýváme neurčitý integrál $f(x)$ na I a značíme $\int f(x)dx$. Píšeme $\int f(x)dx = F(x) + c$, kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na I, dx je diferenciál x a c tzv. integrační konstanta.

Příklad : Najděte neurčité integrály

1. $\int \sin x dx$
2. $\int x^3 dx$
3. $\int e^{2x} dx$

Řešení:

1. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
2. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$
3. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$

Základní neurčité integrály

$\int 0dx = c,\ x \in (-\infty, \infty)$

$\int e^x dx = e^x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$

$\int \sin x dx = -\cos x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$

$\int \cos x dx = \sin x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + c,\ x \in (-\infty, \infty)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin(x) + c,\ x \in (-1, 1)$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1, x \in (-\infty, \infty)$ pro $n \geq 0$ celé,
$x \in (-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$ pro $n < 0$ celé, $x \in (0, \infty)$ pro n necelé

$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c,\ x \in (0, \infty)$ nebo $x \in (-\infty, 0)$

$\int \frac{dx}{cos^2(x)} = tg(x) + c,$ pro interval, kde $\cos x \neq 0$

$\int \frac{dx}{sin^2(x)} = -cotg(x) + c,$ pro interval, kde $\sin x \neq 0$

Pravidla pro integrování

Integrace lineární kombinace funkcí:

Věta : Jestliže funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ mají na I neurčité integrály, pak pro libovolné konstanty $c_1, c_2, \ldots c_n$ existuje neurčitý integrál funkce $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ a platí:

$$\int f(x)dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \ldots + c_n \int f_n(x)dx$$

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int (e^x + \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x})dx$

Řešení: $\int (e^x + \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x})dx = \int e^x dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx + 3\int \frac{1}{x}dx =$
$e^x + 2arctgx + 3ln|x| + c.$

Metoda per partes:

Věta : Jestliže funkce $u(x),\ v(x)$ mají na otevřeném intervalu I spojité derivace, pak platí: $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$

Metoda per partes - příklady

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x.\sin x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = \sin x$, $v(x) = x$.
Dopočítáme $u(x) = -\cos x$, $v'(x) = 1$ a dosadíme:
$\int x.\sin x dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + c.$

Někdy je nutné použít pravidlo opakovaně.
Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x^2.e^x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = e^x$, $v(x) = x^2$. Dopočítáme $u(x) = e^x$, $v'(x) = 2x$ a dosadíme:
$\int x^2.e^x dx = x^2.e^x - \int 2x.e^x dx$ Per partes zopakujeme pro $u'(x) = e^x$, $v(x) = 2x$, tedy $u(x) = e^x$, $v'(x) = 2$:
$\int x^2.e^x dx = x^2.e^x - [2x.e^x - \int 2e^x dx] = x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x + c.$

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.
- Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\int f(x)dx$.
- Vypočítáme $F(x) = \int f(x)dx$.
- Určíme interval I, na kterém platí $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
- Hledaný integrál je $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c,\ t \in I$.

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Řešení:

$$\int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int sin(2x).2dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} substituce & u = 2x \\ & du = 2dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int sin(u)du = \frac{1}{2}(-cos(u)) + c = \frac{1}{2}(-cos(2x)) + c,\ x \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1} dx$.

Řešení:

$$\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x+1} .3dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} substituce & u = 3x+1 \\ & du = 3dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \int e^{u} .du = \frac{1}{3} e^{u} + c = \frac{1}{3} e^{3x+1} + c, \ x \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} substituce & u = x^2+1 \\ & du = 2xdx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} ln|u| + c = \frac{1}{2} ln|x^2+1| + c, \; x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka : Pro funkci $\varphi(t)$, která je nenulová na intervalu I a má zde derivaci $\varphi'(t)$ platí: $\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = ln|\varphi(t)| + c, \; t \in I : \varphi(t) \neq 0$.

Důkaz:

Ověřte sami.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$ a do daného integrálu dosadíme místo x výraz $\varphi(t)$ a místo dx výraz $\varphi'(t)dt$.
- Určíme $G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.
- Dosadíme do $G(t)$ místo t výraz $\varphi^{-1}(x)$ a dostaneme $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$.
- Zkontrolujeme, zda na intervalu J platí $F'(x) = f(x)$.

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx, \ x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} substituce & x = sin(t) & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ & dx = cos(t)dt & \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1 - sin^2(t)} cos(t)dt = \int cos^2(t)dt =$$

$$= \int \frac{cos(2t)+1}{2}dt = \frac{sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + c, \ x \in (-1,1).$$

Nyní je nutné vrátit se k původní proměnné x. Pro $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ vyjádříme $t = arcsin(x)$ a protože

$$sin(2t) = 2sin(t)cos(t) = 2sin(t)\sqrt{1 - sin^2(t)},$$

dostaneme výsledek $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{arcsin(x)}{2} + c$.