Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$. Postupujme následujícím způsobem:

rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle x_2, x_3\rangle, \ldots,$ $\langle x_n, x_{n+1}\rangle$, kde $a = x_1 < x_2 < \ldots, x_n < x_{n+1} = b$. Toto dělení označíme D_n. Dále zavedeme

$m_i = \inf_{x\in\langle x_i, x_{i+1}\rangle} f(x)$ a $M_i = \sup_{x\in\langle x_i, x_{i+1}\rangle} f(x)$, $i = 1, \ldots, n$.

Hledaný plošný obsah lze odhadnout pomocí výrazů

$s(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i)$, resp. $S(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i)$.

Tyto výrazy nazýváme dolním, resp. horním Riemannovým součtem funkce f pro dělení D_n.

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b\rangle$, pak zde existuje tzv. dolní Riemannův integrál

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b\rangle$, pak zde existuje tzv. horní Riemannův integrál

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_D S(f, D).$$

Definice : Má-li funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ horní i dolní Riemannův integrál a jsou-li stejné, pak klademe $\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ a toto číslo nazýváme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$.

Poznámka : Číslo a nazýváme dolní mez integrálu, číslo b nazýváme horní mez integrálu. O funkci f říkáme, že je na daném intervalu integrabilní.

Poznámka : Pro existenci integrálu $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ stačí, aby zde funkce byla spojitá.

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu itegrálu pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:
pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,
pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Věta : Existují-li integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, pak je funkce $f(x)$ integrabilní i na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Věta : Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na $\langle a, b\rangle$ a platí-li pro $\forall x \in \langle a, b\rangle : f(x) \geq g(x)$, pak také platí $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$

Věta : Pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ a libovolné konstanty α, β je integrovatelná i funkce $\alpha f(x) + \beta g(x)$ a platí:

$$\int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b\rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1,\ a = 1,\ b = 3$.

Řešení: $\int_1^3 (x+1)dx = [x^2/2 + x]_1^3 = 9/2 + 3 - (1/2 + 1) = 6$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 0,\ b = 1$

Řešení: $\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx = [3x^{4/3}/4]_0^1 = 3/4$.

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x),\ v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b\rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Příklad : $\int_0^1 x\ln(x+1)dx = \left| \begin{array}{cc} u' = x & v = \ln(x+1) \\ u = x^2/2 & v' = 1/(x+1) \end{array} \right| = [\frac{x^2}{2}\ln(x+1)]_0^1 -$
$\int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}dx = \frac{1}{2}\ln 2 - 0 - \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{2(x+1)}dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{(x+1)}\right)dx =$
$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - 0 = \frac{1}{4}$

Substituce v určitém integrálu

Jestliže $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$ a je-li $f(u)$ spojitá na $\varphi(\langle a, b\rangle)$,
pak platí $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$

Příklad :

$\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2+2x+3 \\ du = (2x+2)dx \\ u(-1) = 2,\ u(0) = 3 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{u}du =$
$\frac{1}{2}[\ln(u)]_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

Poznámka : Primitivní funkce k $\frac{x+1}{x^2+2x+3}$ je $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)$. Výsledek

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$ pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$

Příklad :

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ nazveme konvergentním, pokud pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály $\int_{-\infty}^c f(x)dx$, $\int_c^\infty f(x)dx$, potom definujeme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Příklad : $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x-1)^2+4}dx = \left| \begin{array}{c} 2t = x-1 \\ 2dt = dx \end{array} \right| =$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4t^2+4}2dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2+1}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$\frac{1}{2}[arctg(t)]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2}[arctg(t)]_0^\infty = \frac{1}{2}(0 - \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{2}$$

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t\rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)dx,$ pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)dx.$

Příklad : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \lim_{t\to 0+}[5x^{4/5}/4]_t^1 =$ $\lim_{t\to 0+}(5/4 - 5\sqrt[5]{t^4}/4) = 5/4 - 0 = 5/4.$

Poznámka : Je-li funkce $f(x)$ je neomezená v bodě $c \in (a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ pokud oba integrály na pravé straně existují.

Příklad : Spočtěte: $\int_0^2 \frac{1}{x-1}dx.$

Špatný postup: $\int_0^2 \frac{1}{x-1}dx = [ln|x-1|]_0^2 = ln1 - ln1 = 0$

Správně: funkce není definována v bodě 1, tedy $\int_0^2 \frac{1}{x-1}dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1}dx = \lim_{t\to 1+}[ln|x-1|]_0^t + \lim_{t\to 1-}[ln|x-1|]_t^2 =$ $\infty - ln1 + ln1 - \infty$, integrál diverguje.

Funkce více proměnných

Nechť $n \in \mathbb{N}$, uvažujme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (prostor uspořádaných n-tic reálných čísel). Zobrazení množiny D do $\mathbb{R}$ nazveme funkcí n proměnných. Píšeme $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka : Metrika v $\mathbb{R}^n$

Budeme požívat euklidovskou metriku (vzdálenost); vzdálenost mezi $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ a $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n] \in \mathbb{R}^n$ je definována jako

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}\,.$$

Obdobně jako u funkce jedné proměnné tedy můžeme definovat okolí bodu $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^n$. Pro $\delta > 0$ nazveme δ - okolím bodu A množinu všech bodů z $\mathbb{R}^n$, jejichž vzdálenost od bodu A je menší než δ;

$$U_\delta(A) = \{X \in \mathbb{R}^n, \rho(X, A) < \delta\}$$

Limita funkce více proměnných

Definice : Říkáme, že funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ limitu rovnu $A \in \mathbb{R}$ a píšeme $\lim_{X \to X^0} f(X) = A$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $f(X)$ je definovaná v ryzím okolí $U_\delta(X^0) \setminus \{X^0\}$ a pro všechna X z tohoto okolí platí: $|f(X) - A| < \varepsilon$. (tj. "pro všechna X blízká X^0 platí $f(X) \approx A$.)

Poznámka : Pro počítání s limitami platí analogická pravidla jako u funkce jedné proměnné. Obdobně se zavádějí i nevlastní limity.

Definice : Řekneme, že funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je spojitá v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$, jestliže má v tomto bodě limitu a platí:
$\lim_{X \to X^0} f(X) = f(X^0)$.

Příklad : Funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ je spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$ kromě bodu $[0, 0]$.

Parciální derivace

Uvažujme nejprve funkci dvou proměnných $f(x,y)$ a položme y rovno konstantě y_0. Dostaneme funkci jedné proměnné, označme ji $g(x)=f(x,y_0)$. Jestliže má tato funkce derivaci v bodě x_0, tj. existuje-li $g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$, nazveme ji parciální derivací funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ podle proměnné x. Označujeme ji $f'_x(x_0,y_0)$ nebo $f_x(x_0,y_0)$ nebo $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$. Analogicky se definuje parciální derivace podle y.

Poznámka : Pro funkci n proměnných se parciální derivace definují obdobně. Derivujeme-li podle x_i, ostatní proměnné považujeme za konstanty. Parciální derivace funkce $f(X)$ v bodě X^0 značíme například $f'_{x_1}(X^0), f'_{x_2}(X^0),\dots,f'_{x_n}(X^0)$.

Příklad : Funkce $f(x,y)=x^2+3y^2+5xy-4x+y-1$ má parciální derivace $f'_x(x,y)=2x+0+5y-4+0$ a $f'_y(x,y)=0+6y+5x-0+1$

Příklad : Funkce $f(x,y,z)=\frac{x}{y+z^2}$ má parciální derivace $f'_x(x,y,z)=\frac{1.(y+z^2)-x.0}{(y+z^2)^2}=\frac{1}{(y+z^2)}$, $f'_y(x,y,z)=\frac{0.(y+z^2)-x.1}{(y+z^2)^2}=\frac{-x}{(y+z^2)^2}$ a $f'_z(x,y,z)=\frac{0.(y+z^2)-x.2z}{(y+z^2)^2}=\frac{-2xz}{(y+z^2)^2}$

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i}. Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j, nazveme ji parciální derivací druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$f_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $f''_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $\dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz$.

$f_x = 6x - yz$, $f_y = 2y - xz$, $f_z = 3z^2 - xy$,

$f_{xx} = 6$, $f_{yy} = 2$, $f_{zz} = 6z$,

$f_{xy} = -z$, $f_{xz} = -y$, $f_{yz} = -x$,

$f_{yx} = -z$, $f_{zx} = -y$, $f_{zy} = -x$.

Věta : Jestliže má funkce f spojité parciální derivace až do řádu k v nějakém okolí $U_\delta(X_0)$ bodu X_0, nezáleží na pořadí, ve kterém derivujeme, tedy např.

$f''_{x_i x_j}(X_0) = f''_{x_j x_i}(X_0)$

Totální diferenciál

Definice : Uvažujme bod $X^0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0] \in \mathbb{R}^n$. Má-li funkce f v okolí $U_\delta(X_0)$ bodu X_0 spojité parciální derivace prvního řádu, definujeme lineární zobrazení $df(dx_1, \ldots, dx_n) = f'_{x_1}(X_0).dx_1 + \ldots f'_{x_n}(X_0).dx_n$ Toto zobrazení nazýváme totálním diferenciálem funkce f v bodě X_0. (místo dx_i píšeme někdy také $x_i - x_i^0$)

Poznámka : Pro $n = 2$ je vztahem
$z = f(x_0, y_0) + df(dx, dy) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
definována tečná rovina ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$.

Příklad : Určete diferenciál funkce $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ v bodě $T = [1, 1]$
Řešení: Funkce má parciální derivace $f'_x(x, y) = e^{x^2-y^2} \cdot 2x$,
$f'_y(x, y) = e^{x^2-y^2} \cdot (-2y)$. Tedy $f'_x(1, 1) = e^0 \cdot 2 = 2$, $f'_y(1, 1) = -2$. Diferenciál funkce v bodě $T = [1, 1]$ je $df(dx,\ dy) = 2dx - 2dy$. Rovnice tečné roviny je $z = e^0 + 2(x - 1) - 2(y - 1) = 1 + 2x - 2y$.

Poznámka : Přidáním dalších členů s derivacemi vyšších řádů bychom dostali Taylorův polynom vyššího stupně.

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f(X)$ má lokální minimum v bodě $X^0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže existuje okolí $U_\delta(X^0)$ takové, že pro všechna $X \in U_\delta(X^0)$ platí: $f(X^0) \leq f(X)$.
Analogicky lokální maximum.
Poznámka : V případě ostrých nerovností mluvíme o ostrých lokálních extrémech.

Věta : Má-li funkce $f(X)$ v bodě X^0 lokální extrém, pak všechny parciální derivace, které zde existují, musí být rovny 0

Poznámka : Body, ve kterých jsou všechny parciální derivace nulové, nazýváme stacionární.

Příklad : Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$.
$f'_x = 3x^2 + 6y$, $f'_y = 6y + 6x$.
Rovnice pro stacionární bod jsou
$3x^2 + 6y = 0$, $6y + 6x = 0$.
Z druhé rovnice dostaneme $y = -x$ a po dosazení do první dostaneme kvadratickou rovnici $3x^2 - 6x = 0$, její kořeny jsou $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Potom $y_1 = 0$, $y_2 = -2$. Našli jsme dva stacionární body $[0, 0]$, $[2, -2]$.

Lokální extrémy

Uvažujme funkci $f(x, y)$ a její stacionární bod $[x_0, y_0]$. Pokud jsou v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu, položíme

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_x(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

V případě, že $\Delta(x_0, y_0) < 0$, není v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém (potom bod $[x_0, y_0]$ nazýváme sedlový bod). Je-li $\Delta(x_0, y_0) > 0$, je v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, a to minimum pro $f''_x(x_0, y_0) > 0$ a maximum pro $f''_x(x_0, y_0) < 0$.

Příklad : Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$ z předchozího příkladu.

Nejprve spočteme parciální derivace druhého řádu, zderivujeme funkce $f'_x = 3x^2 + 6y$ a $f'_y = 6y + 6x$:

$f''_x = 6x$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 6$, $f''_y = 6$.

Sestavíme determinant matice druhých derivací v bodě $[0, 0]$:

$$\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 6.6 = -36 < 0.$$ V bodě $[0, 0]$ je tedy sedlový bod.

Pro $[2, -2]$ dostaneme $\Delta(2, -2) = 12.6 - 6.6 = 36 > 0$, jde tedy o extrém a protože $f''_x(2, -2) = 12 > 0$, je v bodě $[2, -2]$ lokální minimum.