

Metoda klouzavých průměrů

Patří (spolu s *metodou exponenciálního vyrovnání*) k adaptivním přístupům při analýze trendové složky. Tyto přístupy pracují se systematickými složkami (např. trendem), které v průběhu plynutí času mění svůj globální charakter, což mj. znamená, že pro ně nelze použít žádnou matematickou křivku s neměnnými (v čase konstantními) parametry. Na druhé straně se předpokládá, že takovéto vyrovnání je možné lokálně (v dílčích, krátkých úsecích řady), přičemž parametry tohoto – lokálního - vyrovnání mohou být v jednotlivých úsecích odlišné. V těchto případech se omezujeme pouze na lokální vyrovnávání (či jeho odstranění) trendu.

Nelze –li tedy vyrovnat časovou řadu pomocí paraboly 2.stupně

$$(2.1) \quad Tr_{\tau} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \tau + \beta_2 \cdot \tau^2 \quad \tau = 1, 2, \dots, n ,$$

omezíme se na vyrovnání v krátkých úsecích, pro jejichž středy v časových bodech t lze použít vyrovnání pomocí lokálních trendů

$$(2.2) \quad Tr(t, \tau) = \beta_0(t) + \beta_1(t) \cdot \tau + \beta_2(t) \cdot \tau^2 \quad \tau = t - 2, t - 1, t, t + 1, t + 2 .$$

Proces eliminace trendové složky se tedy adaptuje vůči okamžitému lokálnímu průběhu řady. Stupeň tohoto přizpůsobování lze (za jistých okolností) vědomě řídit.

Další výhodou adaptivních technik je konstrukce předpovědí, které mohou pružně reagovat na časové změny v charakteru řady a někdy také výpočetní nenáročnost.

Název *klouzavý průměr* [moving average] je spojen s lineární kombinací členů původní řady s jednotkových součtem koeficientů/váh , např. typu

$$(2.3) \quad \frac{1}{10} (y_{t-2} + 2y_{t-1} + 4y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2}) ,$$

někdy se zkráceným zápisem (jako operátor) $\frac{1}{10} [1, 2, 4, 2, 1]$

Vytváření takových konečných kombinací hodnot řady je totiž ekvivalentní právě s lokálním vyrovnáváním řady určitými matematickými křivkami.

Jde o postup, který může být využit k identifikaci dvou složek časové řady :

- *trendové složky*
- *sezónní složky*

Obecněji můžeme zapsat *klouzavý průměr* jako

$$(2.4) \quad (w_{t-m}y_{t-m} + w_{t-m+1}y_{t-m+1} \dots + w_t y_t \dots + w_{t+m+1}y_{t+m-1} + w_{t+m}y_{t+m})$$

Číslo m nazveme *poloměrem*, hodnotu $p = 2m + 1$ *délkou klouzavého průměru*. Z hlediska praktických účelů je vhodnější lichý počet členů průměru (lze však pracovat i se sudým počtem členů, pokud se postup doplní centrováním¹).

¹ *Centrování* (sladění polohy výsledného vyhlazení s polohou původních pozorování) lze provést např. tak, že se procedura klouzavých průměrů se sudým počtem členů provede dvakrát (nebo obecně 2k-krát) po sobě.

Předpokládejme např., že hodláme danou časovou řadu vyrovnat polynomem 3. řádu, tzv. **kubickou parabolou**. Pro vyrovnání zvolíme $m=2$, klouzavý průměr tedy sestavíme z $2m+1=5$ hodnot uvažované časové řady, které označíme jako

$$y_{t+\tau}, \text{ pro } \tau = -2, -1, 0, 1, 2.$$

Koeficienty vyrovnávajícího polynomu – s argumenty v τ , tzn. v bodech, ve kterých řadu vyrovnáváme) odhadneme **metodou nejmenších čtverců OLS** standardně tak, že **minimalizujeme výraz**

$$(2.6) \quad Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2 - \beta_3 \cdot \tau^3)^2$$

Derivováním podle jednotlivých koeficientů polynomu a anulováním příslušných derivací pro minimalizaci získáme pro hledané čtyři odhady b_0, b_1, b_2, b_3 koeficientů $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ soustavu čtyř normálních rovnic, které lze obecně zapsat jako

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_0} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2 - \beta_3 \cdot \tau^3) (-1) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2 - \beta_3 \cdot \tau^3) (-\tau) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_2} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2 - \beta_3 \cdot \tau^3) (-\tau^2) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_3} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2 - \beta_3 \cdot \tau^3) (-\tau^3) = 0 \text{ neboli}$$

$$(2.7A) \quad \sum_{\tau=-2}^2 (-y_{t+\tau} + \beta_0 + \beta_1 \cdot \tau + \beta_2 \cdot \tau^2 + \beta_3 \cdot \tau^3) = 0$$

$$(2.7B) \quad \sum_{\tau=-2}^2 (-y_{t+\tau} \tau + \beta_0 \tau + \beta_1 \cdot \tau^2 + \beta_2 \cdot \tau^3 + \beta_3 \cdot \tau^4) = 0$$

$$(2.7C) \quad \sum_{\tau=-2}^2 (-y_{t+\tau} \tau^2 + \beta_0 \tau^2 + \beta_1 \cdot \tau^3 + \beta_2 \cdot \tau^4 + \beta_3 \cdot \tau^5) = 0$$

$$(2.7D) \quad \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} \tau^3 - \beta_0 \tau^3 - \beta_1 \tau^4 + \beta_2 \cdot \tau^5 - \beta_3 \cdot \tau^6) = 0$$

tj. ve standardním tvaru soustavy čtyř normálních rovnic

$$(2.8A) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^0 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^0 + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^1 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3, \quad j=0$$

$$(2.8B) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4, \quad j=1$$

$$(2.8C) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^5, \quad j=2$$

$$(2.8D) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^3 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^5 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^6. \quad j=3,$$

jinak vyjádřitelných v souhrnném zápisu

$$(2.9) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^j - b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^j - b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+1} - b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+2} - b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+3} = 0. \quad j=0,1,2,3$$

Uvedenou soustavu lze dále zjednodušit, protože pro liché j platí $\sum_{\tau=-2}^2 \tau^j = 0$

(zde se uplatňuje výhoda volby lichého počtu členů řady)

$$(2.10A) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^0 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 \quad \text{neboli} \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} = b_0 \cdot 5 + b_2 \cdot 10$$

$$(2.10B) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau = b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \quad \text{neboli} \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau = b_1 \cdot 10 + b_3 \cdot 34$$

$$(2.10C) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \quad \text{neboli} \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 = b_0 \cdot 10 + b_2 \cdot 34$$

$$(2.10D) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^3 = b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^6 \quad \text{neboli} \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^3 = b_1 \cdot 34 + b_3 \cdot 130.$$

V předchozím jsme využili toho, že $\sum_{\tau=-2}^2 j^0 = 5$, $\sum_{\tau=-2}^2 j^2 = 10$, $\sum_{\tau=-2}^2 j^4 = 34$, $\sum_{\tau=-2}^2 j^6 = 130$.

Nás přitom zajímá toliko odhad b_0 , neboť je to hodnota vyrovnávacího polynomu $P(\tau) = b_0 + b_1 \cdot \tau + b_2 \cdot \tau^2 + b_3 \cdot \tau^3$ v bodě $\tau=0$ a v rozvíjené metodě ji budeme brát za hledanou vyrovnanou hodnotu řady ve středu zkoumaného úseku.

K určení odhadu b_0 stačí tedy použít první a třetí rovnici soustavy (2.10A), (2.10C), pomocí nichž dostaneme :

$$(2.10A) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} = 5 \cdot b_0 + 10 \cdot b_2$$

$$(2.10C) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 = 10 \cdot b_0 + 34 \cdot b_2.$$

Z první rovnice (2.10A) získáme

$$\frac{1}{10} \left(\sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} - b_0 \cdot 5 \right) = b_2$$

Ze druhé rovnice (2.10C) pak máme

$$\frac{1}{34} \left(\sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 - b_0 \cdot 10 \right) = b_2$$

Komparací pro b_2 : $34 \left(\sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} - b_0 \cdot 5 \right) = 10 \left(\sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 - b_0 \cdot 10 \right)$ a vydělením 2 :

$$17 \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} - 85b_0 = 5 \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 - 50b_0$$

(2.11)

$$17 \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} - 5 \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 = 35b_0$$

s rozvedením

$17(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}) - 5(4y_{t-2} + y_{t-1} + 0 \cdot y_t + y_{t+1} + 4y_{t+2}) = 35b_0$, takže odhadnutá trendová složka b_0 a současně vyrovnaná hodnota řady v čase t je rovna

$$(2.12) \quad b_0 = \frac{1}{35} \left(17 \sum_{\tau} y_{t+\tau} - 5 \sum_{\tau} \tau^2 y_{t+\tau} \right) = \frac{1}{35} (-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2}), \text{ resp.}$$

$$(2.12A) \quad b_0 = \hat{y}_t = \frac{1}{35} (-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2}).$$

Ve zkráceném symbolickém zápisu můžeme výsledek zapsat jako

$$(2.12B) \quad \hat{y}_t = \frac{1}{35} (-3; 12; 17; 12; -3).$$

Obecně můžeme vyrovnávat úsek o délce $p = 2m + 1$ polynomem r -tého řádu a tak obdržet klouzavé průměry délky $2m + 1$ a řádu r .

Vyrovnaná hodnota \hat{y}_t v bodě t je lineární kombinace výrazů $\sum_{\tau=-m}^m \tau^j y_{t+j}$ se sudými $j, j \leq r$, což lze odvodit zobecněním soustavy (2.12). Po algebraické úpravě je to lineární kombinace hodnot $y_{t-m}, \dots, y_t, \dots, y_{t+m}$ s pevně určenými koeficienty, které se nazývají **váhy klouzavého průměru**.

Ilustrace:

Uplatňme předchozí pravidlo pro aproximaci hodnot paraboly 3.stupně

Vyjádřeme třetí mocniny přirozených čísel od 1 do 10 :

$t =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_t =$	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

a použijeme vzorec (2.12A) pro výpočet vyrovnané hodnoty této řady v bodě $t = 3$

$$b_0 = \hat{y}_t = \frac{1}{35} (-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2}).$$

v konkretizaci

$$\hat{y}_3 = \frac{1}{35} (-3 \cdot 1^3 + 12 \cdot 2^3 + 17 \cdot 3^3 + 12 \cdot 4^3 - 3 \cdot 5^3), \text{ tzn.}$$

ve vyčíslení

$$\hat{y}_3 = \frac{1}{35} (-3 \cdot 1 + 12 \cdot 8 + 17 \cdot 27 + 12 \cdot 64 - 3 \cdot 125) = 27 = (\bar{y}_3).$$

Podobně dostaneme:

$$\hat{y}_4 = \frac{1}{35} (-3 \cdot 2^3 + 12 \cdot 3^3 + 17 \cdot 4^3 + 12 \cdot 5^3 - 3 \cdot 6^3).$$

$$\hat{y}_4 = \frac{1}{35} (-3 \cdot 8 + 12 \cdot 27 + 17 \cdot 64 + 12 \cdot 125 - 3 \cdot 216).$$

$$\hat{y}_4 = \frac{1}{35} (-24 + 324 + 1088 + 1500 - 648) = \frac{2240}{35} = 64.$$

Vyrovnávali jsme zde kubickou řadu polynomem 3.stupně (shodný výsledek bychom též dostali, pokud bychom vyrovnávali polynomem řádu vyšším než 3, což ukážeme na dalším příkladě).

Příklad1 Modifikace pro polynomickou křivku 4.stupně se stejnou délkou průměru:

$$(2.14) \quad Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2 - \beta_3 \cdot \tau^3 - \beta_4 \cdot \tau^4)^2$$

Derivováním podle jednotlivých koeficientů polynomu a anulováním příslušných derivací pro minimalizaci získáme pro hledané čtyři odhady b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 koeficientů $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ soustavu pěti normálních rovnic, které lze obecně zapsat jako

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)}{\partial \beta_0} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2 - \beta_3 \cdot \tau^3 - \beta_4 \cdot \tau^4) (-1) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2 - \beta_3 \cdot \tau^3 - \beta_4 \cdot \tau^4) (-\tau) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)}{\partial \beta_2} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2 - \beta_3 \cdot \tau^3 - \beta_4 \cdot \tau^4) (-\tau^2) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)}{\partial \beta_3} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2 - \beta_3 \cdot \tau^3 - \beta_4 \cdot \tau^4) (-\tau^3) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)}{\partial \beta_4} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2 - \beta_3 \cdot \tau^3 - \beta_4 \cdot \tau^4) (-\tau^4) = 0$$

neboli

$$\sum_{\tau=-2}^2 (-y_{t+\tau} + \beta_0 + \beta_1 \cdot \tau + \beta_2 \cdot \tau^2 + \beta_3 \cdot \tau^3 + \beta_4 \cdot \tau^4) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^2 (-y_{t+\tau} \tau + \beta_0 \tau + \beta_1 \cdot \tau^2 + \beta_2 \cdot \tau^3 + \beta_3 \cdot \tau^4 + \beta_4 \cdot \tau^5) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^2 (-y_{t+\tau} \tau^2 + \beta_0 \tau^2 + \beta_1 \cdot \tau^3 + \beta_2 \cdot \tau^4 + \beta_3 \cdot \tau^5 + \beta_4 \cdot \tau^6) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} \tau^3 - \beta_0 \tau^3 - \beta_1 \tau^4 + \beta_2 \cdot \tau^5 + \beta_3 \cdot \tau^6 + \beta_4 \cdot \tau^7) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} \tau^3 - \beta_0 \tau^4 - \beta_1 \tau^5 + \beta_2 \cdot \tau^6 + \beta_3 \cdot \tau^7 + \beta_4 \cdot \tau^8) = 0$$

tj. ve standardním tvaru soustavy pěti normálních rovnic:

$$(2.15A) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^0 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^0 + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^1 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 + b_4 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \quad j=0$$

$$(2.15B) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 + b_4 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^5 \quad j=1$$

$$(2.15C) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^5 + b_4 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^6 \quad j=2$$

$$(2.15D) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^3 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^5 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^6 + b_4 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^7 \quad j=3$$

$$(2.15E) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^4 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^5 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^6 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^7 + b_4 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^8 \quad j=4$$

jinak vyjádřitelných v souhrnném zápisu

$$(2.16) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^j - b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^j - b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+1} - b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+2} - b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+3} - b_4 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+4} = 0 \quad j = 0, 1, 2, 3, 4$$

S ohledem na nulovost členů s lichými mocninami u τ dostaneme dále:

$$(2.17A) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^0 = b_0 \cdot 5 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_4 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \quad j = 0$$

$$(2.17B) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau = b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \quad j = 1$$

$$(2.17C) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 + b_4 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^6 \quad j = 2$$

$$(2.17D) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^3 = b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 + b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^6 \quad j = 3 ,$$

$$(2.17E) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^4 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^6 + b_4 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^8 \quad j = 4 ,$$

Po vyčíslení členů se sudými mocninami τ máme zjednodušení:

$$(2.18A) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} = 5b_0 + 10b_2 + 34b_4 \quad j = 0$$

$$(2.18B) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau = 5b_1 + 34b_3 \quad j = 1$$

$$(2.18C) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 = 10b_0 + 34b_2 + 130b_4 \quad j = 2$$

$$(2.18D) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^3 = 34b_1 + 130b_3 \quad j = 3$$

$$(2.18E) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^4 = 34b_0 + 130b_2 + 514b_4 \quad j = 4 ,$$

K určení parametrů b_0, b_2 máme nyní k použití 3 rovnice: (2.18A), (2.18C), (2.18E), které lze souhrnně zapsat maticově

$$(2.19) \quad \begin{pmatrix} 5 & 10 & 34 \\ 10 & 34 & 130 \\ 34 & 130 & 514 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 \cdot y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \cdot y_{t+\tau} \end{pmatrix}, \text{ tedy } \begin{pmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 34 \\ 10 & 34 & 130 \\ 34 & 130 & 514 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 \cdot y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \cdot y_{t+\tau} \end{pmatrix}$$

Pomocí těchto tří rovnic lze vypočítat všechny parametry b_0, b_2, b_4 , zatímco k určení zbývajících dvou parametrů lze uplatnit vztahy vyjádřené rovnicemi (2.17B), (2.17D). Jak patrně, obě (rekursivní) „podsoustavy“, zahrnují disjunktní množiny parametrů.

Inverzi matice v (2.19) získáme následovně:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 34 \\ 10 & 34 & 130 \\ 34 & 130 & 514 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 34 \cdot 514 + 2 \cdot 10 \cdot 130 \cdot 34 - 34^3 - 5 \cdot 130^2 - 514 \cdot 10^2} \begin{pmatrix} 576 & -720 & 144 \\ -720 & 1414 & -310 \\ 144 & -310 & 70 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 34 \\ 10 & 34 & 130 \\ 34 & 130 & 514 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{87380 + 88400 - 39304 - 84500 - 51400} \begin{pmatrix} 576 & -720 & 144 \\ -720 & 1414 & -310 \\ 144 & -310 & 70 \end{pmatrix}$$

$$(2.20) \quad \begin{pmatrix} 5 & 10 & 34 \\ 10 & 34 & 130 \\ 34 & 130 & 514 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{576} \begin{pmatrix} 576 & -720 & 144 \\ -720 & 1414 & -310 \\ 144 & -310 & 70 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{576} \begin{pmatrix} 576 & -720 & 144 \\ -720 & 1414 & -310 \\ 144 & -310 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 \cdot y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \cdot y_{t+\tau} \end{pmatrix}, \text{ odtud máme}$$

$$(2.21A) \quad b_0 = \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} - 1,25 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 \cdot y_{t+\tau} + 0,25 \cdot \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \cdot y_{t+\tau}, \text{ po rozepsání}$$

$$b_0 = y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} - 1,25(4y_{t-2} + y_{t-1} + y_{t+1} + 4y_{t+2}) + 0,25(16y_{t-2} + y_{t-1} + y_{t+1} + 16y_{t+2})$$

$$b_0 = y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} - 5y_{t-2} - 1,25y_{t-1} - 1,25y_{t+1} - 5y_{t+2} + 4y_{t-2} + 0,25y_{t-1} + 0,25y_{t+1} + 4y_{t+2}$$

$$b_0 = y_{t-1} + y_t + y_{t+1} - 1,25y_{t-1} - 1,25y_{t+1} + 0,25y_{t-1} + 0,25y_{t+1} \text{ a odtud } b_0 = y_t$$

Váhový vektor pro b_0 má tedy tvar $b_0 = y_t [0,0,1,0,0]$.

Podobně pro b_2 dostaneme

$$b_2 = -\frac{720}{576} \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} + \frac{1414}{576} \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 \cdot y_{t+\tau} - \frac{310}{576} \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \cdot y_{t+\tau}$$

$$(2.21C) \quad b_2 = -1,25 \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} + \frac{707}{288} \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 \cdot y_{t+\tau} - \frac{155}{288} \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \cdot y_{t+\tau}$$

Konečně pro b_4 dostaneme

$$b_4 = -\frac{144}{576} \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} - \frac{310}{576} \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 \cdot y_{t+\tau} + \frac{70}{576} \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \cdot y_{t+\tau}$$

$$(2.21E) \quad b_4 = -0,25 \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} - \frac{155}{288} \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 \cdot y_{t+\tau} + \frac{35}{288} \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \cdot y_{t+\tau}$$

Analogicky pro podsoustavu dvou rovnic (2.18B), (2.18D), ze které můžeme odvodit parametry b_1 , b_3 , obdržíme maticové vyjádření

$$(2.19) \quad \begin{pmatrix} 5 & 34 \\ 34 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^2 \tau \cdot y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 \cdot y_{t+\tau} \end{pmatrix}, \text{ tedy } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 34 \\ 34 & 130 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^2 \tau \cdot y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 \cdot y_{t+\tau} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{506} \begin{pmatrix} 130 & -34 \\ -34 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-2}^2 \tau \cdot y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 \cdot y_{t+\tau} \end{pmatrix}$$

$$(2.21A) \quad b_1 = \frac{130}{506} \sum_{\tau=-2}^2 \tau \cdot y_{t+\tau} - \frac{34}{506} \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 \cdot y_{t+\tau}$$

$$(2.21A) \quad b_3 = \frac{-34}{506} \sum_{\tau=-2}^2 \tau \cdot y_{t+\tau} + \frac{5}{506} \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 \cdot y_{t+\tau}$$

Příklad2 Modifikace pro polynomickou křivku 2.stupně se stejnou délkou průměru:

$$(2.31) \quad Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2)^2$$

Derivováním podle tří parametrů polynomu a anulováním příslušných derivací získáme pro odhady b_0, b_1, b_2 koeficientů $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ soustavu tří normálních rovnic, které lze obecně zapsat

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_0} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2) (-1) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2) (-\tau) = 0$$

$$\frac{\partial Z(y, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} = 2 \sum_{\tau=-2}^2 (y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1 \cdot \tau - \beta_2 \cdot \tau^2) (-\tau^2) = 0$$

Po snadné úpravě

$$\sum_{\tau=-2}^2 (-y_{t+\tau} + \beta_0 + \beta_1 \cdot \tau + \beta_2 \cdot \tau^2) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^2 (-y_{t+\tau} \tau + \beta_0 \tau + \beta_1 \cdot \tau^2 + \beta_2 \cdot \tau^3) = 0$$

$$\sum_{\tau=-2}^2 (-y_{t+\tau} \tau^2 + \beta_0 \tau^2 + \beta_1 \cdot \tau^3 + \beta_2 \cdot \tau^4) = 0$$

tj. ve standardním tvaru soustavy tří normálních rovnic

$$(2.32A) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^0 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^0 + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^1 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 \quad j=0$$

$$(2.32B) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 \quad j=1$$

$$(2.32C) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 \quad j=2$$

jinak vyjádřitelných v souhrnném zápisu

$$(2.33) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^j - b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^j - b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+1} - b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+2} = 0 \quad j=0,1,2$$

S ohledem na nulovost členů s lichými mocninami u τ a po vyčíslení členů se sudými mocninami u τ :

$$(2.33A) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} = b_0 \cdot 5 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 = 5b_0 + 10b_2 \quad j=0$$

$$(2.33B) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau = 10b_1 \quad j=1$$

$$(2.33C) \quad \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau^2 = b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 + b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^4 = 10b_0 + 34b_2 \quad j=2$$

Pro výpočet parametrů b_0, b_1, b_2 dostáváme tedy tytéž vzorce jako v (2.10A,C), zatímco výpočet

$$b_1 \text{ je dán vztahem } b_1 = \frac{\sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \tau}{10} \quad b_1 = \frac{1}{10} (-2y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} + 2y_{t-2})$$

Snadno lze dokázat následující vlastnosti těchto klouzavých průměrů:

(1) **Součet vah klouzavého průměru je roven 1:** aplikujeme-li totiž klouzavý průměr na řadu stejných hodnot, pak vyrovnanou hodnotou musí být původní konstanta.

(2) **Váhy jsou symetrické kolem střední hodnoty**, neboť ve výrazech typu

$$(2.37) \quad \sum_{\tau=-m}^m \tau^j y_{t+j}$$

mají pro sudé j členy $y_{t-\tau}, y_{t+\tau}$ symetrické koeficienty.

(3) Je-li r sudé číslo, pak klouzavé průměry řadů r a $r+1$ se stejnou délkou $2m+1$ jsou totožné: prohlédneme-li si pozorně soustavu (2.12), pak pro b_0 dostaneme stejné řešení, ať jsou v soustavě zahrnuty členy s neznámou b_3 nebo nejsou.

Poznámka 1 Vyrovnaním řady pomocí techniky klouzavých průměrů získáme vyrovnané hodnoty pouze pro $t = m+1, \dots, n-m$. Ztratíme tedy m hodnot na začátku a m hodnot na konci řady, které zůstanou nevyrovnané.

Poznámka 2 Pokud bychom chtěli k vyrovnaní používat úseky se sudým počtem $2m$ členů: vyrovnaná hodnota by pak patřila doprostřed časového intervalu mezi okamžiky původních pozorování, což není právě výhodné vzhledem k interpretaci výsledků. Uspokojivé řešení situace bude uvedeno níže.

V následující **tabulce 1** jsou uvedeny váhy klouzavých průměrů až do pátého řádu včetně při různých délkách. Vzhledem k symetrii je uvedena někdy jen první polovina vah včetně střední. Podle dříve uvedené vlastnosti jsou váhy pro druhý a třetí řád stejné, stejně jako jsou stejné pro čtvrtý a pátý řád. Průměry řádu 0 a 1 nejsou uvedeny, protože jde o prosté aritmetické průměry spočtené z $2m+1$ členů řady

$$(2.38) \quad \frac{y_{t-m} + \dots + y_{t+m}}{2m+1}$$

Pro úplnost tabulka obsahuje váhy klouzavých průměrů druhého nebo třetího řádu a délky 3, přestože zde platí $\hat{y}_t = y_t$.

Tabulka 1

délka/ řád	2. a 3.	4. a 5.
3	$[0,1,0]$	$[0,1,0]$
5	$\frac{1}{35}[-3,12,17,12,-3]$	$[0,0,1,0,0]$
7	$\frac{1}{21}[-2,3,6,7,\dots]$	$\frac{1}{231}[5,-30,75,131,\dots]$
9	$\frac{1}{231}[-21,14,39,54,59,\dots]$	$\frac{1}{429}[15,-55,30,135,179,\dots]$
11	$\frac{1}{429}[-36,9,44,69,84,89,\dots]$	$\frac{1}{429}[18,-45,-10,60,120,143,\dots]$
13	$\frac{1}{143}[-11,0,9,16,23,24,25,\dots]$	

Zatím jsme pominuli otázku, **jak určit vyrovnané hodnoty pro prvních m a posledních m pozorování časové řady a jak získat příslušné predikce pro budoucí období.**

V ilustrativním příkladě jsme vyrovnávali kubickou parabolou vždy 5 sousedních hodnot řady. Necht' je těmito hodnotami pět posledních hodnot řady

$$y_{n-4}, y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$$

Na rozdíl od předchozího nás budou nyní zajímat i ty dříve ignorované hodnoty kubické paraboly vyrovnávající tento úsek pro $\tau = 1, \tau = 2$. K tomu ale potřebujeme znát i odhady koeficientů $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ této křivky. (dříve nám stačil koeficient β_0). Ze soustavy (2.12A-D) se zjistí, že příslušné odhady budou mít tvar

$$(2.39B) \quad b_1 = \hat{\beta}_1 = \frac{1}{72} \left(65 \cdot \sum_{\tau=-2}^2 \tau \cdot y_{t+\tau} - 17 \cdot \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 y_{t+\tau} \right)$$

$$(2.39C) \quad b_2 = \hat{\beta}_2 = \frac{1}{14} \left(\sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 y_{t+\tau} - 2 \cdot \sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} \right)$$

$$(2.39D) \quad b_3 = \hat{\beta}_3 = \frac{1}{72} \left(5 \cdot \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 y_{t+\tau} - 17 \cdot \sum_{\tau=-2}^2 \tau y_{t+\tau} \right)$$

Ověření např. pro b_2 : z předchozího víme, že $\frac{1}{10} \left(\sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} - b_0 \cdot 5 \right) = b_2$, přičemž

$$b_0 = \frac{1}{35} (-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2})$$

Proto máme

$$b_2 = \frac{1}{10} \left(\sum_{\tau=-2}^2 y_{t+\tau} - \frac{1}{7} (-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2}) \right)$$

neboli

$$b_2 = \frac{1}{10} \left(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + \left(\frac{3}{7}y_{t-2} - \frac{12}{7}y_{t-1} - \frac{17}{7}y_t - \frac{12}{7}y_{t+1} + \frac{3}{7}y_{t+2} \right) \right)$$

Po sdružení členů $b_2 = \frac{1}{10} \left(\frac{10}{7}y_{t-2} - \frac{5}{7}y_{t-1} - \frac{10}{7}y_t - \frac{5}{7}y_{t+1} + \frac{10}{7}y_{t+2} \right)$

závěrem dospějeme k $b_2 = \left(\frac{1}{7}y_{t-2} - \frac{1}{14}y_{t-1} - \frac{1}{7}y_t - \frac{1}{14}y_{t+1} + \frac{1}{7}y_{t+2} \right)$.

Výsledek (2.39C) po rozvedení dává :

$$b_2 = \frac{1}{14} (4y_{t-2} + y_{t-1} + y_{t+1} + 4y_{t+2} - 2y_{t-2} - 2y_{t-1} - 2y_t - 2y_{t+1} - 2y_{t+2})$$

Tedy platí

$$b_2 = \frac{1}{14} (2y_{t-2} - y_{t-1} - 2y_t - y_{t+1} + 2y_{t+2})$$

□.

$$(2.39B) \quad b_1 = \frac{1}{72} (65 \cdot [-2y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} - 2y_{t+2}] - 17 \cdot [-8y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} - 8y_{t+2}])$$

$$(2.39D) \quad b_3 = \frac{1}{72} (5 \cdot [-8y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} + 8y_{t+2}] - 17 \cdot [-2y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} + 2y_{t+2}])$$

(2.39B)

$$b_1 = \frac{1}{72} ([-130y_{t-2} - 65y_{t-1} + 65y_{t+1} - 130y_{t+2}] + [136y_{t-2} + 17y_{t-1} - 17y_{t+1} + 136y_{t+2}])$$

$$b_1 = \frac{1}{72} (6y_{t-2} - 48y_{t-1} + 48y_{t+1} + 6y_{t+2}) = \frac{1}{12} [y_{t-2} - 8y_{t-1} + 8y_{t+1} + y_{t+2}] \quad \text{O.K.}$$

$$(2.39D) \quad b_3 = \frac{1}{72} (5[-8 \cdot y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} + 8y_{t+2}] - 17[-2 \cdot y_{t-2} - y_{t-1} + y_{t+1} + 2y_{t+2}]).$$

$$(2.39D) \quad b_3 = \frac{1}{72} (-40 \cdot y_{t-2} - 5y_{t-1} + 5y_{t+1} + 40y_{t+2} + 34y_{t-2} + 17y_{t-1} - 17y_{t+1} - 34y_{t+2}).$$

$$(2.39D) \quad b_3 = \frac{1}{72} (-6y_{t-2} + 12y_{t-1} - 12y_{t+1} + 6y_{t+2}) = \frac{1}{12} [-y_{t-2} + 2y_{t-1} - 2y_{t+1} + y_{t+2}]. \quad \text{O.K.}$$

Získání odhadů koeficientů (kromě b_0) pro b_1, b_2, b_3 (2.39B-2.39D) spolu s (2.36A) pro b_0 umožní získat pro poslední dvě pozorování y_{n-1}, y_n jejich vyrovnané hodnoty.

Dostaneme je dosazením nalezených odhadů do obecného predikčního schématu

$$(2.40) \quad \begin{aligned} \bar{y}_{n-2+k} &= b_0 + b_1 \cdot k + b_2 \cdot k^2 + b_3 \cdot k^3 = \frac{1}{35} [-3, 12, 17, 12, -3] y_{n-2} + \frac{k}{12} [1, -8, 0, 8, -1] y_{n-2} \\ &+ \frac{k^2}{14} [2, -1, -2, -1, 2] y_{n-2} + \frac{k^3}{12} [-1, 2, 0, -2, 1] y_{n-2} \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

Po dosazení $k = 1$ a $k = 2$ získáme tyto vyrovnané koncové hodnoty :

Při dosazení $k = 1$:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n-2+1} &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = \frac{1}{35} [-3, 12, 17, 12, -3] y_{n-2} + \frac{1}{12} [1, -8, 0, 8, -1] y_{n-2} \\ &+ \frac{1}{14} [2, -1, -2, -1, 2] y_{n-2} + \frac{1}{12} [-1, 2, 0, -2, 1] y_{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n-1} &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = \left(\frac{-3}{35} + \frac{1}{12} + \frac{2}{14} - \frac{1}{12} \right) y_{n-4} + \left(\frac{12}{35} - \frac{8}{12} - \frac{1}{14} + \frac{2}{12} \right) y_{n-3} + \left(\frac{17}{35} + \frac{0}{12} - \frac{2}{14} + \frac{0}{12} \right) y_{n-2} \\ &+ \left(\frac{12}{35} + \frac{8}{12} - \frac{1}{14} - \frac{2}{12} \right) y_{n-1} + \left(\frac{-3}{35} - \frac{1}{12} + \frac{2}{14} + \frac{1}{12} \right) y_n \end{aligned}$$

$$\bar{y}_{n-1} = \left(\frac{-3}{35} + \frac{1}{7} \right) y_{n-4} + \left(\frac{12}{35} - \frac{1}{2} - \frac{1}{14} \right) y_{n-3} + \left(\frac{17}{35} - \frac{1}{7} \right) y_{n-2} + \left(\frac{12}{35} + \frac{1}{2} - \frac{1}{14} \right) y_{n-1} + \left(\frac{-3}{35} + \frac{1}{7} \right) y_n$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n-1} &= \left(\frac{-3}{35} + \frac{5}{35} \right) y_{n-4} + \left(\frac{12}{35} - \frac{4}{7} \right) y_{n-3} + \left(\frac{17}{35} - \frac{5}{35} \right) y_{n-2} \\ &+ \left(\frac{12}{35} + \frac{3}{7} \right) y_{n-1} + \left(\frac{-3}{35} + \frac{5}{35} \right) y_n \end{aligned}$$

$$(2.41A) \quad \hat{y}_{n-1} = \frac{1}{35} [2, -8, 12, 27, 2] y_{n-2}, \text{ neboli}$$

vyrovnanou hodnotu pro y_n získáme jako vážený průměr této pětice hodnot:

$$\bar{y}_{n-1} = \frac{2}{35} y_{n-4} - \frac{8}{35} y_{n-3} + \frac{12}{35} y_{n-2} + \frac{27}{35} y_{n-1} + \frac{2}{35} y_n \quad (\text{se součtem vah 1})$$

Podobně při dosazení pro $k = 2$ dostaneme z (2.40) :

$$\bar{y}_{n-2+2} = b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 = \frac{1}{35}[-3, 12, 17, 12, -3]y_{n-2} + \frac{2}{12}[1, -8, 0, 8, -1]y_{n-2} \\ + \frac{2^2}{14}[2, -1, -2, -1, 2]y_{n-2} + \frac{2^3}{12}[-1, 2, 0, -2, 1]y_{n-2}$$

$$\bar{y}_n = \left(\frac{-3}{35} + \frac{2}{12} + \frac{8}{14} - \frac{8}{12}\right)y_{n-4} + \left(\frac{12}{35} - \frac{16}{12} - \frac{4}{14} + \frac{16}{12}\right)y_{n-3} + \left(\frac{17}{35} + \frac{0}{12} - \frac{8}{14} + \frac{0}{12}\right)y_{n-2} \\ + \left(\frac{12}{35} + \frac{16}{12} - \frac{4}{14} - \frac{16}{12}\right)y_{n-1} + \left(\frac{-3}{35} - \frac{2}{12} + \frac{8}{14} + \frac{8}{12}\right)y_n$$

$$\bar{y}_n = \left(\frac{-3}{35} - \frac{1}{2} + \frac{4}{7}\right)y_{n-4} + \left(\frac{12}{35} - \frac{2}{7}\right)y_{n-3} + \left(\frac{17}{35} - \frac{4}{7}\right)y_{n-2} \\ + \left(\frac{12}{35} - \frac{2}{7}\right)y_{n-1} + \left(\frac{-3}{35} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right)y_n$$

$$\bar{y}_n = \left(\frac{17}{35} - \frac{1}{2}\right)y_{n-4} + \left(\frac{12}{35} - \frac{10}{35}\right)y_{n-3} + \left(\frac{17}{35} - \frac{20}{35}\right)y_{n-2} \\ + \left(\frac{12}{35} - \frac{10}{35}\right)y_{n-1} + \left(\frac{17}{35} + \frac{1}{2}\right)y_n$$

$$\bar{y}_n = -\frac{1}{70}y_{n-4} + \frac{4}{70}y_{n-3} - \frac{6}{70}y_{n-2} + \frac{4}{70}y_{n-1} + \frac{69}{70}y_n$$

(2.41B)

$$\hat{y}_n = \frac{1}{70}[-1, 4, -6, 4, 69]y_{n-2}, \text{ tzn.}$$

$$\bar{y}_n = \frac{-1}{70}y_{n-4} + \frac{4}{70}y_{n-3} - \frac{6}{70}y_{n-2} + \frac{4}{70}y_{n-1} + \frac{69}{70}y_n \text{ (se součtem vah 1)}$$

Vzhledem ke zřejmé symetrii také podobně dostaneme vyrovnanou první a druhou hodnotu ze začátku řady jako

(2.41C)

$$\hat{y}_2 = \frac{1}{35}[2, 27, 12, -8, 2]y_3, \text{ neboli}$$

$$\bar{y}_{n-1} = \frac{2}{35}y_1 + \frac{27}{35}y_2 + \frac{12}{35}y_3 + \frac{-8}{35}y_4 + \frac{2}{35}y_5 \text{ (se součtem vah 1)}$$

(2.41D)

$$\hat{y}_1 = \frac{1}{70}[69, 4, -6, 4, -1]y_3, \text{ tzn.}$$

$$\bar{y}_n = \frac{69}{70}y_1 + \frac{4}{70}y_2 - \frac{6}{70}y_3 + \frac{4}{70}y_4 + \frac{-1}{70}y_5 \text{ (se součtem vah 1)}$$

Uvedený postup navíc dokonce umožňuje konstruovat předpovědi v dané řadě: např. předpověď hodnoty y_{n+1} získáme tak, že do (2.40) dosadíme $k=3$.

Dostaneme:

(2.42)

$$\hat{y}_{n+1}(n) = \frac{1}{5}[-4, 11, -4, -14, 16]y_{n-2}.$$

ověření:

$$\bar{y}_n = \left(\frac{-3}{35} + \frac{3}{12} + \frac{18}{14} - \frac{27}{12}\right)y_{n-4} + \left(\frac{12}{35} - \frac{24}{12} - \frac{9}{14} + \frac{54}{12}\right)y_{n-3} + \left(\frac{17}{35} + \frac{0}{12} - \frac{18}{14} + \frac{0}{12}\right)y_{n-2} \\ + \left(\frac{12}{35} + \frac{24}{12} - \frac{9}{14} - \frac{54}{12}\right)y_{n-1} + \left(\frac{-3}{35} - \frac{3}{12} + \frac{18}{14} + \frac{27}{12}\right)y_n$$

$$\bar{y}_n = \left(\frac{-3}{35} + \frac{9}{7} - \frac{24}{12}\right)y_{n-4} + \left(\frac{12}{35} - \frac{9}{14} + \frac{30}{12}\right)y_{n-3} + \left(\frac{17}{35} - \frac{9}{7}\right)y_{n-2} + \left(\frac{12}{35} - \frac{9}{14} - \frac{30}{12}\right)y_{n-1} + \left(\frac{-3}{35} + \frac{9}{7} + \frac{24}{12}\right)y_n$$

$$\bar{y}_n = \left(\frac{42}{35} - 2\right)y_{n-4} + \left(\frac{24}{70} - \frac{45}{70} + \frac{5}{2}\right)y_{n-3} + \left(\frac{-28}{35}\right)y_{n-2} + \left(\frac{24}{70} - \frac{45}{70} - \frac{5}{2}\right)y_{n-1} + \left(\frac{42}{35} + 2\right)y_n$$

$$\bar{y}_n = -\frac{28}{35}y_{n-4} + \left(-\frac{21}{70} + \frac{175}{70}\right)y_{n-3} - \frac{4}{5}y_{n-2} + \left(-\frac{21}{70} - \frac{175}{70}\right)y_{n-1} + \left(\frac{112}{35}\right)y_n$$

$$\bar{y}_n = -\frac{4}{5}y_{n-4} + \frac{154}{70}y_{n-3} - \frac{4}{5}y_{n-2} - \frac{196}{70}y_{n-1} + \frac{16}{5}y_n = -\frac{4}{5}y_{n-4} + \frac{11}{5}y_{n-3} - \frac{4}{5}y_{n-2} - \frac{14}{5}y_{n-1} + \frac{16}{5}y_n$$

Uvedený postup lze ale použít jen pro konstrukci krátkodobý předpovědí – čím je předpovídaná hodnota vzdálenější od časového bodu předpovědi $t = n$ (tj. čím delší je horizont předpovědi), tím lze očekávat přirozeně menší spolehlivost predikce.

Poznámka: Při výpočtech vah v klouzavých průměrech se uplatňuje znalost těchto dvou vztahů

Při $p = 2m + 1$: $\sum_{k=-m}^m k^2 = \frac{p(p^2 - 1)}{12}$, $\sum_{k=-m}^m k^4 = \frac{p(p^2 - 1)(3p^2 - 7)}{240}$.

Klouzavé průměry, které jsme takto popsali, se nazývají **počáteční, koncové a předpovědní**, podle toho, zda vyrovnáváme počáteční hodnoty řady, koncové hodnoty řady nebo pomocí nich předpovídáme. **Poznamenejme**, že tyto klouzavé průměry již nemají tak výhodné vlastnosti jako klouzavé průměry pro vyrovnání středních členů řady: jejich váhy nejsou obecně symetrické kolem prostřední hodnoty a váhy klouzavých průměrů např. druhého a třetího řádu již nejsou totožné.

Avšak i pro klouzavé průměry tohoto typu jsou příslušné váhy v literatuře tabelovány.

Např. předpověď o jeden krok dopředu při použití klouzavých průměrů prvního řádu a délky 3 má podle prvního řádku tabulky tvar

$$(2.43) \quad \hat{y}_{n+1}^*(n) = \frac{1}{3}(-2y_{n-2} + y_{n-1} + 4y_n).$$

Pro metodu klouzavých průměrů musíme řešit otázku, **jaký řád a jakou délku klouzavých průměrů pro analyzovanou časovou řadu zvolit.**

Obvykle se rozhodujeme na základě subjektivního posouzení charakteru dat s tím, že preferujeme jednoduché průměry co nejnižšího řádu a délku volíme podle požadovaného stupně vyhlazení řady: čím je větší délka klouzavého průměru, tím je větší vyhlazení časové řady.

Jednou z důležitých zásad pro volbu délky průměru je, že tato délka by měla odpovídat periodě sezónních nebo cyklických fluktuací, které chceme z řady vyhladit.

Nesprávně: Např. v časové řadě ročních měření budou k vyhlazení cyklické složky s dvouletou periodou užity klouzavé průměry délky 3 a 5.

V prvním případě je výsledkem vyhlazení „inverzní cyklus“: ve skupině tří sousedních hodnot vyrovnávané řady jsou buď dva horní a jeden dolní bod zvratu nebo naopak.

Ve druhém případě nastává opačná situace: vyrovnaná řada následuje původní řadu vzhůru do horních bodů zvratu a dolů do dolních bodů zvratu.

Pokud jde o volbu řádu klouzavých průměrů, lze vyvodit objektivní kritérium:

Předpokládejme, že uvažovaná řada y_t má tvar $y_t = T_t + E_t$, kde T_t je polynom r -tého řádu a E_t je bílý šum s rozptylem σ^2 . Budeme postupně diferencovat, čímž polynom vytvářející řadu y_t bude postupně při každé diferenci snižovat svůj řád o 1, protože např. v rozdílu

$$(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_r t^r) - (\beta_0 + \beta_1(t-1) + \beta_2(t-1)^2 + \dots + \beta_r(t-1)^r).$$

je t^{r-1} nejvyšší mocnina proměnné t s nenulovým koeficientem. Konečně při řádu $t+1$ se tento polynom úplně vynuluje. Při řádu r je diferencí konstanta obvykle různá od nuly. Bílý šum vytvoří při k -té diferenci veličinu

$$(2.44) \quad \Delta^k \varepsilon_t = \varepsilon_t - \binom{k}{1} \varepsilon_{t-1} + \binom{k}{2} \varepsilon_{t-2} - \dots + (-1)^k \varepsilon_{t-k},$$

která má nulovou střední hodnotu a rozptyl roven

$$(2.45) \quad \text{var}(\Delta^k \varepsilon_t) = \sigma^2 \left(1 + \binom{k}{1}^2 + \binom{k}{2}^2 + \dots + 1 \right) = \binom{2k}{k} \sigma^2.$$

Označíme-li tedy $V_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (\Delta^k y_t)^2}{\binom{2k}{k} (n-k)}$, pak pro $k \geq r+1$ je V_k odhadem rozptylu σ^2 bílého šumu.

Metoda vážených klouzavých průměrů

Nevylučuje to ovšem možnost, že pozorování lze vyrovnat **lokálně**, tzn. v různých úsecích časové řady různými křivkami (třeba téhož typu, ale s různými, v čase se měnícími parametry).

K pozorované hodnotě y_t konstruujeme vyrovnanou hodnotu \hat{y}_t , již nahrazujeme tuto pozorovanou hodnotu y_t takto :

$$\hat{y}_t = \frac{y_{t-m} + y_{t-m+1} + y_{t-m+2} + \dots + y_t + y_{t+1} + y_{t+m-1} + y_{t+m}}{2m+1}$$

tj. **prostým klouzavým průměrem**, resp.

$$w \hat{y}_t = \frac{w_{t-m} y_{t-m} + w_{t-m+1} y_{t-m+1} + \dots + w_t \cdot y_t + w_{t+1} \cdot y_{t+1} + w_{t+m-1} y_{t+m-1} + w_{t+m} y_{t+m}}{2m+1}$$

tj. **váženým klouzavým průměrem** pro každé $t = 1, 2, \dots, n$
(n je počet pozorování)

Je patrné, že **prostý aritmetický průměr je speciálním případem váženého aritmetického průměru s rovnoměrně rozdělenými vahami** $w_t = \frac{1}{2m+1}$ pro všechna $t = 1, 2, \dots, n$.

Vyrovnaní časové řady pomocí klouzavého průměru závisí na :

a) počtu členů, které zahrneme do průměru; ten tedy může být :

lichý - $p = 2m + 1$: pak hodnotu spočteného průměru přiřadíme prostřednímu členu průměru

sudý - $p = 2m$: provádíme tzv. centrování, kterým hodnotu spočteného průměru přisoudíme okamžiku mezi dvěma prostředními pozorováními časové řady

b) vahách přiřazených pozorovaným hodnotám ekonomického ukazatele

Ty mohou být :

- **symetrické** platí $w_1 = w_{-1}, w_2 = w_{-2}$, atd. $w_j = w_{-j}$

index "0" označuje **prostřední** pozorování, „střed“ průměru

- **nesymetrické**: zpravidla podle speciálního účelu klouzavého průměru

pro hodnoty vah platí podmínky: $\sum_j w_j = 1$ (vždy, dá se zajistit normováním)

$w_j \geq 0$ (obvykle, existují však výjimky)

Tímto způsobem však nelze nahradit pozorované hodnoty v krajních bodech :

- **u lichého počtu členů průměru ztratíme** vždy $m - 1$ krajních členů

(po $(m - 1)/2$ na každé straně)

- **u sudého počtu členů průměru ztratíme** rovněž $m - 1$ krajních členů

(získané hodnoty centrujeme do „meziobdobí“ ležících vždy uprostřed dvou pozorování)

Poznámka: Můžeme ovšem použít některý ze způsobů "dodefinování" hodnot v krajních bodech (nějakým vhodným algoritmem).