

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$.

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$. Postupujme následujícím způsobem:

rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na n částečných intervalů

$\langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \dots, \langle x_n, x_{n+1} \rangle$, kde $a = x_1 < x_2 < \dots, x_n < x_{n+1} = b$. Toto dělení označíme D_n .

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$. Postupujme následujícím způsobem:

rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na n částečných intervalů

$\langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \dots, \langle x_n, x_{n+1} \rangle$, kde $a = x_1 < x_2 < \dots, x_n < x_{n+1} = b$. Toto dělení označíme D_n . Dále zavedeme

$$m_i = \inf_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} f(x) \text{ a } M_i = \sup_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} f(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$. Postupujme následujícím způsobem:

rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na n částečných intervalů

$\langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \dots, \langle x_n, x_{n+1} \rangle$, kde $a = x_1 < x_2 < \dots, x_n < x_{n+1} = b$. Toto dělení označíme D_n . Dále zavedeme

$$m_i = \inf_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} f(x) \text{ a } M_i = \sup_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} f(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Hledaný plošný obsah lze odhadnout pomocí výrazů

$$s(f, D_n) = \sum_{i=1}^n m_i(x_{i+1} - x_i), \text{ resp. } S(f, D_n) = \sum_{i=1}^n M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Tyto výrazy nazýváme **dolním, resp. horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D_n .

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **dolní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(f, D)$$

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **dolní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **horní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_D S(f, D).$$

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **dolní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **horní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_D S(f, D).$$

Definice : Má-li funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ horní i dolní Riemannův integrál a jsou-li stejné, pak klademe $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ a toto číslo nazýváme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$.

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **dolní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **horní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_D S(f, D).$$

Definice : Má-li funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ horní i dolní Riemannův integrál a jsou-li stejné, pak klademe $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ a toto číslo nazýváme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$.

Poznámka : Číslo a nazýváme **dolní mez** integrálu, číslo b nazýváme **horní mez** integrálu. O funkci f říkáme, že je na daném intervalu **integrabilní**.

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **dolní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b \rangle$, pak zde existuje tzv. **horní Riemannův integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_D S(f, D).$$

Definice : Má-li funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ horní i dolní Riemannův integrál a jsou-li stejné, pak klademe $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ a toto číslo nazýváme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$.

Poznámka : Číslo a nazýváme **dolní mez** integrálu, číslo b nazýváme **horní mez** integrálu. O funkci f říkáme, že je na daném intervalu **integrabilní**.

Poznámka : Pro existenci integrálu $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ stačí, aby zde funkce byla spojitá.

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu itegrálu pro případy, kdy není splněna podmínka

$a < b$:

pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,

pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu itegrálu pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:

pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,

pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Věta : Existují-li integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, pak je funkce $f(x)$ integrabilní i na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu integrálu pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:

pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,

pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Věta : Existují-li integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, pak je funkce $f(x)$ integrabilní i na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Věta : Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na $\langle a, b \rangle$ a platí-li pro $\forall x \in \langle a, b \rangle : f(x) \geq g(x)$, pak také platí $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu itegrálu pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:

pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,

pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Věta : Existují-li integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, pak je funkce $f(x)$ integrabilní i na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Věta : Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na $\langle a, b \rangle$ a platí-li pro $\forall x \in \langle a, b \rangle : f(x) \geq g(x)$, pak také platí $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Věta : Pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ a libovolné konstanty α, β je integrovatelná i funkce $\alpha f(x) + \beta g(x)$ a platí:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1$, $a = 1$, $b = 3$.

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1$, $a = 1$, $b = 3$.

Řešení: $\int_1^3 (x + 1)dx = [x^2/2 + x]_1^3 = 9/2 + 3 - (1/2 + 1) = 6$.

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1$, $a = 1$, $b = 3$.

Řešení: $\int_1^3 (x + 1)dx = [x^2/2 + x]_1^3 = 9/2 + 3 - (1/2 + 1) = 6$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$, $b = 1$

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1$, $a = 1$, $b = 3$.

Řešení: $\int_1^3 (x + 1)dx = [x^2/2 + x]_1^3 = 9/2 + 3 - (1/2 + 1) = 6$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$, $b = 1$

Řešení: $\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx = [3x^{4/3}/4]_0^1 = 3/4$.

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Příklad : $\int_0^1 x \ln(x+1) dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x & v = \ln(x+1) \\ u = x^2/2 & v' = 1/(x+1) \end{array} \right| = [\frac{x^2}{2} \ln(x+1)]_0^1 -$
 $\int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - 0 - \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x-1 + \frac{1}{(x+1)} \right) dx =$
 $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} [\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - 0 = \frac{1}{4}$

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Příklad : $\int_0^1 x \ln(x+1) dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x & v = \ln(x+1) \\ u = x^2/2 & v' = 1/(x+1) \end{array} \right| = [\frac{x^2}{2} \ln(x+1)]_0^1 -$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - 0 - \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx =$$
$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - 0 = \frac{1}{4}$$

Substituce v určitém integrálu

Jestliže $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na $\langle a, b \rangle$ a je-li $f(u)$ spojitá na $\varphi(\langle a, b \rangle)$,

pak platí $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Příklad : $\int_0^1 x \ln(x+1) dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x & v = \ln(x+1) \\ u = x^2/2 & v' = 1/(x+1) \end{array} \right| = [\frac{x^2}{2} \ln(x+1)]_0^1 -$
 $\int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - 0 - \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx =$
 $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} [\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - 0 = \frac{1}{4}$

Substituce v určitém integrálu

Jestliže $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na $\langle a, b \rangle$ a je-li $f(u)$ spojitá na $\varphi(\langle a, b \rangle)$,

pak platí $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$

Příklad :

$$\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 2x + 3 \\ du = (2x + 2) dx \\ u(-1) = 2, u(0) = 3 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{u} dx =$$

 $\frac{1}{2} [\ln(u)]_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$, pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky

definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$.

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$, pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky

definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$.

Příklad :

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$, pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$.

Příklad :

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ nazveme **konvergentním**, pokud pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály $\int_{-\infty}^c f(x)dx$, $\int_c^\infty f(x)dx$, potom definujeme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$, pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$.

Příklad :

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ nazveme **konvergentním**, pokud pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály $\int_{-\infty}^c f(x)dx$, $\int_c^\infty f(x)dx$, potom definujeme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Příklad : $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-2x+5} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x-1)^2+4} dx = \left| \begin{array}{l} 2t = x - 1 \\ 2dt = dx \end{array} \right| =$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4t^2+4} 2dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2+1} dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1} dt =$$
$$\frac{1}{2} [\arctg(t)]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2} [\arctg(t)]_0^\infty = \frac{1}{2} (0 - \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{2}$$

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t \rangle$ pro

libovolné $t \in \langle a, b \rangle$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$, pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro

funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$.

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t \rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b \rangle$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$, pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro

funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$.

Příklad : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [5x^{4/5}/4]_t^1 =$
 $\lim_{t \rightarrow 0^+} (5/4 - 5\sqrt[5]{t^4}/4) = 5/4 - 0 = 5/4.$

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t \rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b \rangle$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$, pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro

funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$.

Příklad : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [5x^{4/5}/4]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (5/4 - 5\sqrt[5]{t^4}/4) = 5/4 - 0 = 5/4$.

Poznámka : Je-li funkce $f(x)$ je neomezená v bodě $c \in (a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, pokud oba integrály na pravé straně existují.

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t \rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b \rangle$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$, pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro

funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$.

Příklad : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [5x^{4/5}/4]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (5/4 - 5\sqrt[5]{t^4}/4) = 5/4 - 0 = 5/4$.

Poznámka : Je-li funkce $f(x)$ je neomezená v bodě $c \in (a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, pokud oba integrály na pravé straně existují.

Příklad : Spočtete: $\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$.

Špatný postup: $\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx = [\ln|x-1|]_0^2 = \ln 1 - \ln 1 = 0$

Správně: funkce není definována v bodě 1, tedy

$\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} [\ln|x-1|]_0^t + \lim_{t \rightarrow 1^-} [\ln|x-1|]_t^2 = \infty - \ln 1 + \ln 1 - \infty$, integrál diverguje.