Teorie portfolia

Model oceňování kapitálových aktiv – CAPM

Téma přednášky

- empirické testování modelu rovnováhy
- metoda nejmenších čtverců
- rozptyl výnosnosti cenného papíru
- systematické a nesystematické riziko
- výnosnost a riziko portfolia
- delta cenného papíru - nerovnováha

Empirické testování modelu rovnováhy

- testováním modelu CAPM (a jeho variant) se zabývala řada známých i méně známých jmen
- např. Sharpe, Lintner, Miller, Scholes, Black, Jensen, Fama

Empirické testování modelu rovnováhy

- modely CAPM jsou formulovány na základě očekávání – všechny proměnné jsou vyjádřeny v budoucích hodnotách
- protože neexistují resp. nejsou k dispozici rozsáhlejší systematická data vzhledem k očekáváním, většina testů modelu CAPM vychází z pozorovaných hodnot

Empirické testování modelu rovnováhy

- podle CAPM se budou aktiva nastavovat tak dlouho, dokud nebude dosaženo rovnováhy, při které bude ležet každý CP na SML
- při rovnováze bude očekávaná (rovnovážná) výnosnost CP *i* v době držení dána rovnicí

$$\bar{r}_i^{\,e} = r_f + \left(\bar{r}_M - r_f\right).\,\beta_i$$

Empirické testování modelu rovnováhy

- tato rovnice však není modelem toho, jaká bude skutečná nadměrná výnosnost CP za dobu držení
- charakteristická přímka (SML) je typem procesu, který garantuje skutečnou výnosnost CP a je založen na předcházející rovnici

$$r_i - r_f = \left(r_M - r_f\right).\,\beta_i + \varepsilon_i$$

Empirické testování modelu rovnováhy

- r_i - skutečná výnosnost CP
- r_M - skutečná výnosnost tržního portfolia
- ε_i - náhodná chyba CP
- protože předpokládáme, že vztah mezi rizikem a výnosností je lineární (vyšší riziko přináší vyšší výnos), můžeme testovat model v podobě rovnice

$$r_i = \alpha_i + r_M . \beta_{\mathrm{i}} + \varepsilon_i$$

Empirické testování modelu rovnováhy

- abychom mohli nalézt neznámé parametry alfa a beta, učiníme některé předpoklady o náhodné chybě (viz. klasická lineární regrese)

$$E(\varepsilon_i) = 0 \qquad \operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, r_i) = 0 \qquad \operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \sigma^2_{\varepsilon_i}$$

$$E(\varepsilon_i.(r_M - \bar{r}_M)) = 0$$

- náhodná chyba CP je náhodná veličina s nulovou očekávanou hodnotou (střední hodnotou) a směrodatnou odchylkou σ_{ε_i}

Empirické testování modelu rovnováhy

- předpokládejme, že očekávanou výnosnost *i-tého* aktiva je možné určit rovnicí $r_i = r_f + (r_M - r_f).\beta_i$, kde $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \in R$
- tato rovnice nemusí naprosto přesně vystihnout situaci na trhu s *i-tým* aktivem, může dojít k drobným nepřesnostem působením různých faktorů, které nejsou zahrnuty do naší rovnice

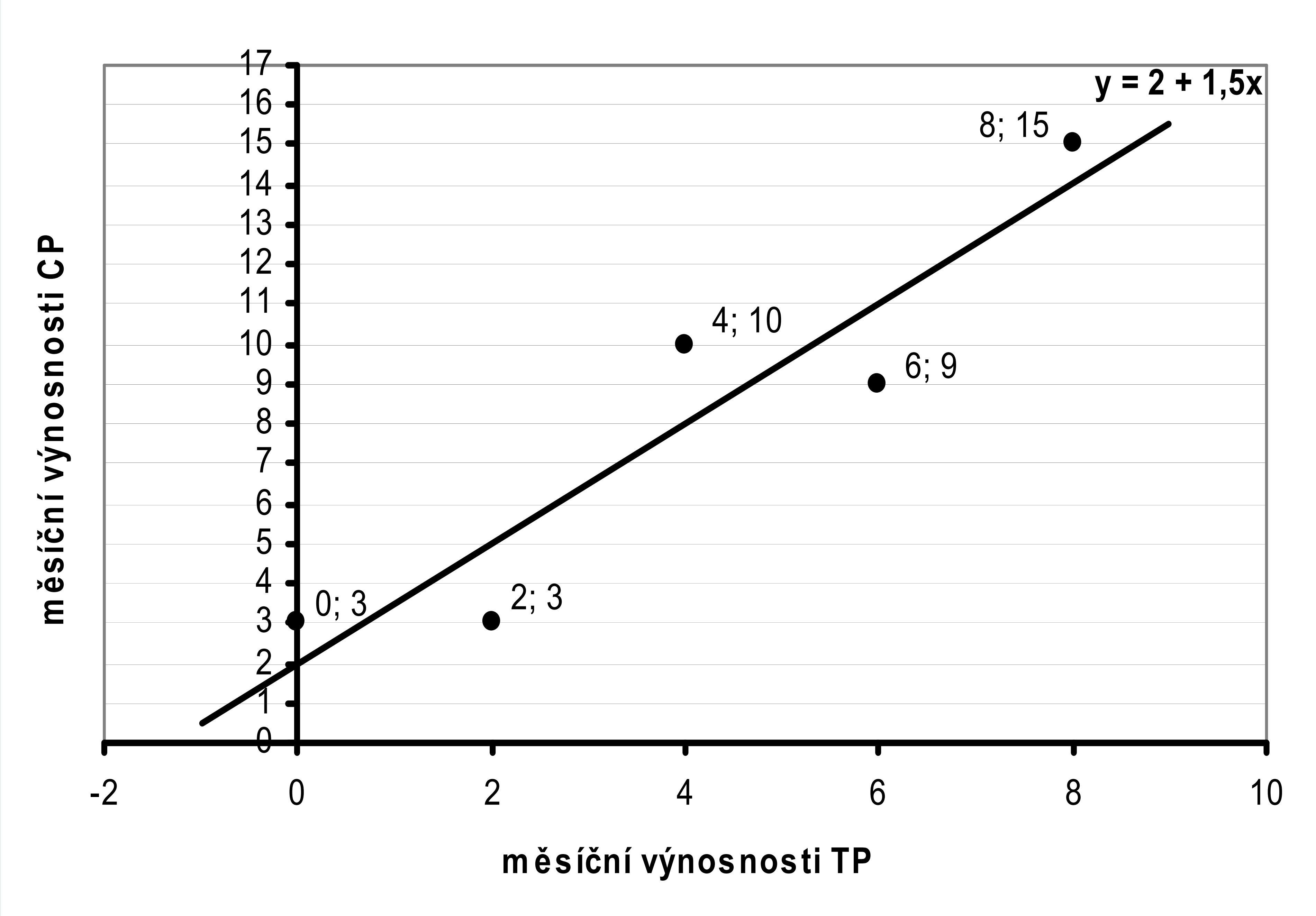
Empirické testování modelu rovnováhy

- proto bývá do rovnice zahrnut i vliv takovýchto blíže nespecifikovaných faktorů ve formě náhodné chyby
- pokud bude použita bezriziková investice můžeme psát $\alpha_i = r_f.(1-\beta_i)$

Empirické testování modelu rovnováhy

- příklad výnosnosti cenného papíru a tržního portfolia (indexu)

Měsíc	*Výnosnost CP v %*	*Výnosnost TP v %*	$r_i = \alpha_i + r_M \cdot \beta_i + \varepsilon_i$
1.	10	4	10 = 2 + 4.1,5 + **2**
2.	3	2	3 = 2 + 2.1,5 **- 2**
3.	15	8	15 = 2 + 8.1,5 **+ 1**
4.	9	6	9 = 2 + 6.1,5 **- 2**
5.	3	0	3 = 2 + 0.1,5 **+ 1**
Součet	**40**	**20**	**40 = 10 + 30 + 0**



y = 2 + 1,5x
8; 15
4; 10
6; 9
2; 3
0; 3
měsíční výnosnosti CP
měsíční výnosnosti TP
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
-2
0
2
4
6
8
10

Empirické testování modelu rovnováhy

- očekávaná výnosnost za těchto pět měsíců bude pro CP 8% a pro index 4%
- předcházející úlohu jsme vyjádřili grafem pomocí regresní funkce, na kterém vidíme, kde leží v jednotlivých měsících výnosnosti cenného papíru i velikost náhodné chyby tohoto aktiva
- pokud chceme získat odhad hodnoty koeficientu beta, potom lze využít historických (minulých) výnosů a vztahu

Empirické testování modelu rovnováhy

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left[\left(r_{i_t} - \bar{r}_i\right).\left(r_{M_t} - \bar{r}_M\right)\right]}{\sum_{t=1}^{T}(\mathrm{r}_{\mathrm{M}_\mathrm{t}} - \bar{r}_M)^2}$$

- tzv. historické (ex-post) beta
- pro výpočet alfa využijeme vztah $\alpha_i = \bar{r}_i - \beta_i . \bar{r}_M$
- parametry alfa a beta můžeme také získat („odhadnout“) z historického přístupu k jejich určení $\bar{r}_i = \widehat{\alpha}_i + \widehat{\beta}_i . \bar{\mathrm{r}}_\mathrm{M}$

Empirické testování modelu rovnováhy

- měli bychom zkoumat nestrannost odhadů, zda tyto odhady jsou „nejlepší“, zda mezi těmito odhady mají nejmenší rozptyl
- „nejlepší“ metodou odhadu je metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců

- mějme *n* dvojic pozorovaných hodnot
- množinu těchto bodů nechť popisuje empirická regresní funkce $\widehat{y} = f(x, a, b) = a + bx$
- $e_i = y_i - \widehat{y}_i$ je tzv. reziduum (reziduální odchylka)
- metoda nejmenších čtverců je založena na minimalizaci součtu čtverců reziduálních odchylek
- hledáme tedy minimum této funkce

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b \cdot x_i)^2 \quad \Rightarrow \text{minimum}$$

Metoda nejmenších čtverců

- spočítáme první parciální derivace podle proměnných „*a*“ a „*b*“ a položíme je rovny 0
- po úpravách dostaneme dvě tzv. normální rovnice

$$n.a + b.\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a.\sum_{i=1}^{n} x_i + b.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i$$

- které vyřešíme nejlépe maticovou metodou

Rozptyl výnosnosti cenného papíru

- rozptyl nadměrné výnosnosti

$$\mathrm{var}\left(r_i - r_f\right) = \mathrm{var}\left(r_i\right) + \mathrm{var}\left(r_f\right) = \sigma_i^2 + 0 = \sigma_i^2$$

- rozptyl pravé strany rovnice

$$\mathrm{var}\left[\left(r_M - r_f\right).\beta_{\mathrm{i}} + \varepsilon_i\right] = \mathrm{var}\left(r_M.\beta_{\mathrm{i}}\right) + \mathrm{var}\left(r_f.\beta_{\mathrm{i}}\right) + \mathrm{var}\left(\varepsilon_{\mathrm{i}}\right) =$$

$$= \beta_i^2.\sigma_{\mathrm{M}}^2 + \underbrace{\beta_i^2.\sigma_{\mathrm{f}}^2}_{0} + \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \beta_i^2.\sigma_{\mathrm{M}}^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

- celou rovnici tedy můžeme zapsat následovně

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2.\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma_i^2 - \beta_i^2.\sigma_M^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\varepsilon_i} = \sqrt{\sigma_i^2 - \beta_i^2.\sigma_M^2}$$

Systematické a nesystematické riziko

- jedinečné riziko (netržní, nesystematické riziko) - $\sigma^2_{\varepsilon_i}$
- tržní riziko (systematické riziko) – $\beta_i^2 . \sigma_M^2$

Systematické a nesystematické riziko

- tržní riziko odráží systematickou míru rozptylu (variability) výnosností a je způsobeno faktory, které ovlivňují ceny všech cenných papírů obchodovaných na burze; je <u>nediverzifikovatelné</u>
- jedinečné riziko je část rizika, která je jedinečná pro daný podnik, obor atd.; je <u>diverzifikovatelné</u> (zvýšením počtu kusů cenných papírů)

Systematické a nesystematické riziko

- podíl systematického rizika na celkovém riziku CP určuje koeficient determinace
- koeficient determinace vyjadřuje schopnost tržního modelu vysvětlit pohyby ve výnosnostech jednotlivých akcií na trhu (kolísání ve vztahu výnosnosti na jednotlivý cenný papír a změn ve výnosnosti trhu)

Systematické a nesystematické riziko

- víme, že $\rho_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_i . \sigma_M} = \frac{\beta_i . \sigma_M^2}{\sigma_i . \sigma_M} = \beta_i \cdot \frac{\sigma_M}{\sigma_i}$

- neboť $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \Rightarrow \sigma_{\mathrm{iM}} = \beta_i . \sigma_M^2$

- koeficient determinace se potom rovná $\beta_i^2 \cdot \frac{\sigma_M^2}{\sigma_i^2}$

Výnosnost a riziko portfolia

- portfolio P je složené z *n* CP s váhami

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

- výnosnost

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} X_i \left[\left(r_M - r_f \right) . \beta_i + \varepsilon_i \right] = \left(r_M - r_f \right) . \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i \beta_i}_{\beta p} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i \varepsilon_i}_{\varepsilon p}$$

$$\bar{r}_p - r_f = \left(r_M - r_f \right) . \beta_p + \varepsilon_p$$

- riziko

$$\operatorname{var}\left(r_p - r_f \right) = \operatorname{var}\left(r_p \right) + \underbrace{\operatorname{var}\left(r_f \right)}_{0} = \sigma_p^2 - 0 = \sigma_p^2$$

$$\sigma_{\varepsilon_p}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

$$\operatorname{var}\left[\left(r_M - r_f \right) . \beta_p + \varepsilon_p \right] = \operatorname{var}\left(\beta_p . r_M \right) + \operatorname{var}\left(\beta_p . r_f \right) + \operatorname{var}\left(\varepsilon_p \right)$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 . \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2$$

Delta cenného papíru - nerovnováha

- mnoho investorů vyhledává CP, které se zdají být nesprávně ohodnoceny
- CP je podhodnocený (příliš levný), je-li jeho očekávaná výnosnost vyšší než předpokládaná - leží nad SML
- CP je nadhodnocený (příliš drahý), je-li jeho očekávaná výnosnost nižší než předpokládaná - leží pod SML

Delta cenného papíru - nerovnováha

- tržní ceny cenných papírů a jejich očekávané výnosnosti jsou buď ve shodě s danou rovnovážnou teorií nebo nejsou
- problém spočívá v tom, že srovnáváme očekávané výnosnosti cenných papírů s rovnovážnou očekávanou výnosností

Delta cenného papíru - nerovnováha

- rovnovážná očekávaná výnosnost cenného papíru je taková, jaká by měla být, kdyby byl cenný papír správně ohodnocen (ležel by na přímce SML)
- delta cenných papírů je rozdíl mezi očekávanou výnosností a příslušnou rovnovážnou očekávanou výnosností

$$\delta_i = r_i - \overline{r}_i^{\,e}$$

Delta cenného papíru - nerovnováha

1. je-li delta>0 , leží CP nad SML a je podhodnocený,
2. je-li delta<0, leží CP pod SML a je nadhodnocený,
3. je-li delta=0, leží CP na přímce SML a je správně ohodnocen

- z toho plyne doporučení, že je nutno nakupovat cenné papíry, které leží nad přímkou SML a prodávat cenné papíry ležící pod přímkou SML, cenné papíry ležící na přímce SML je nutno držet