Teorie portfolia

Kvantifikace množiny efektivních portfolií II

Téma přednášky

- nalezení portfolia s minimálním rizikem a požadovaným výnosem
- bezriziková investice
- efektivní množina s bezrizikovou investicí
- půjčování a zapůjčování
- nalezení portfolia při existenci bezrizikového aktiva

Nalezení portfolia s minimálním rizikem a požadovaným výnosem

- postup je stejný jako v případě nalezení portfolia s minimálním rizikem
- přidáme podmínku $\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \bar{r}_i$

kde za $\bar{r}_p$ dosadíme požadovanou výnosnost

- máme tedy následující Lagrageovu funkci

$$L(\vec{Y}) = \sigma_p^2 + \lambda_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \bar{r}_i - \bar{r}_p \right)$$

Nalezení portfolia s minimálním rizikem a požadovaným výnosem

- po zderivování podle jednotlivých proměnných obdržíme soustavu n+2 rovnic
- prvních n položíme rovny 0, u předposlední a poslední rovnice převedeme hodnoty bez proměnných na druhou stranu
- dále řešíme některou standardní metodou (nejlépe maticovým počtem)

Bezriziková investice

- za bezrizikové aktivum může být považována státní pokladniční poukázka s dobou splatnosti, která přesně odpovídá době držení portfolia investorem, případně termínovaný vklad
- výnosnost bezrizikového aktiva je jistá – označuje se indexem „f“
- směrodatná odchylka bezrizikového aktiva je nulová, z čehož plyne, že kovariance bezrizikového aktiva s rizikovým portfoliem (aktivem) je nulová

Bezriziková investice

- investor se může rozhodnout, že část svých prostředků vloží do bezrizikové investice a část do rizikového aktiva (portfolia)
- předpokládejme, že investujeme část *X* do rizikového aktiva (A) a zbytek *1-X* do bezrizikového aktiva (f)
- výnosnost takového portfolia bude

$$\bar{r}_p = \left(1 - X\right) \cdot r_f + X \cdot \bar{r}_A$$

Bezriziková investice

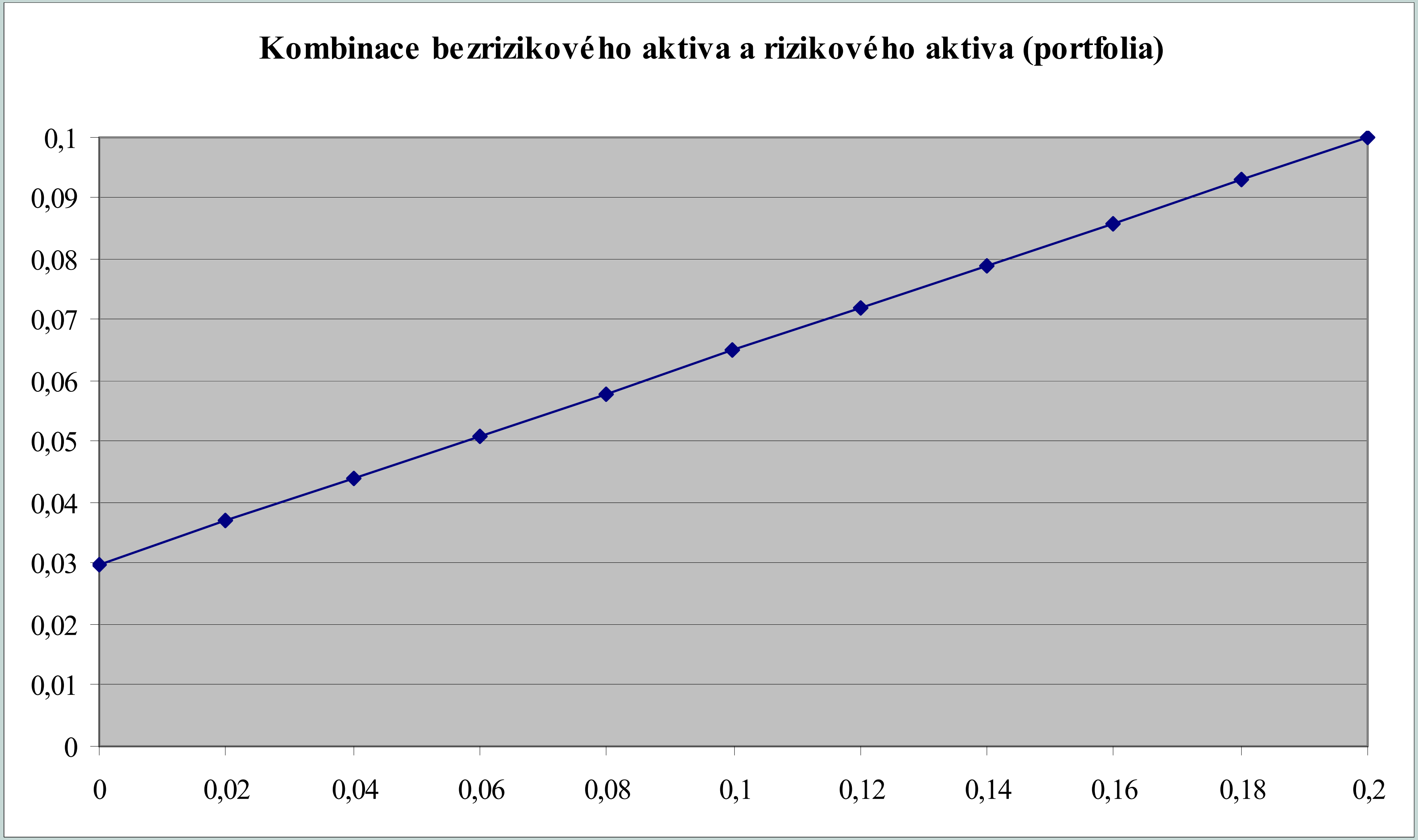
- riziko portfolia bude

$$\sigma_p = \left[(1-X)^2 \cdot \sigma_f^2 + X^2 \cdot \sigma_A^2 + 2 \cdot (1-X) \cdot X \cdot \sigma_f \cdot \sigma_A \cdot \rho_{fA} \right]^{\frac{1}{2}}$$

- protože riziko bezrizikové investice je nulové, můžeme psát

$$\sigma_p = \left[X^2 \cdot \sigma_A^2 \right]^{\frac{1}{2}} = X\sigma_A$$

Bezriziková investice



Bezriziková investice

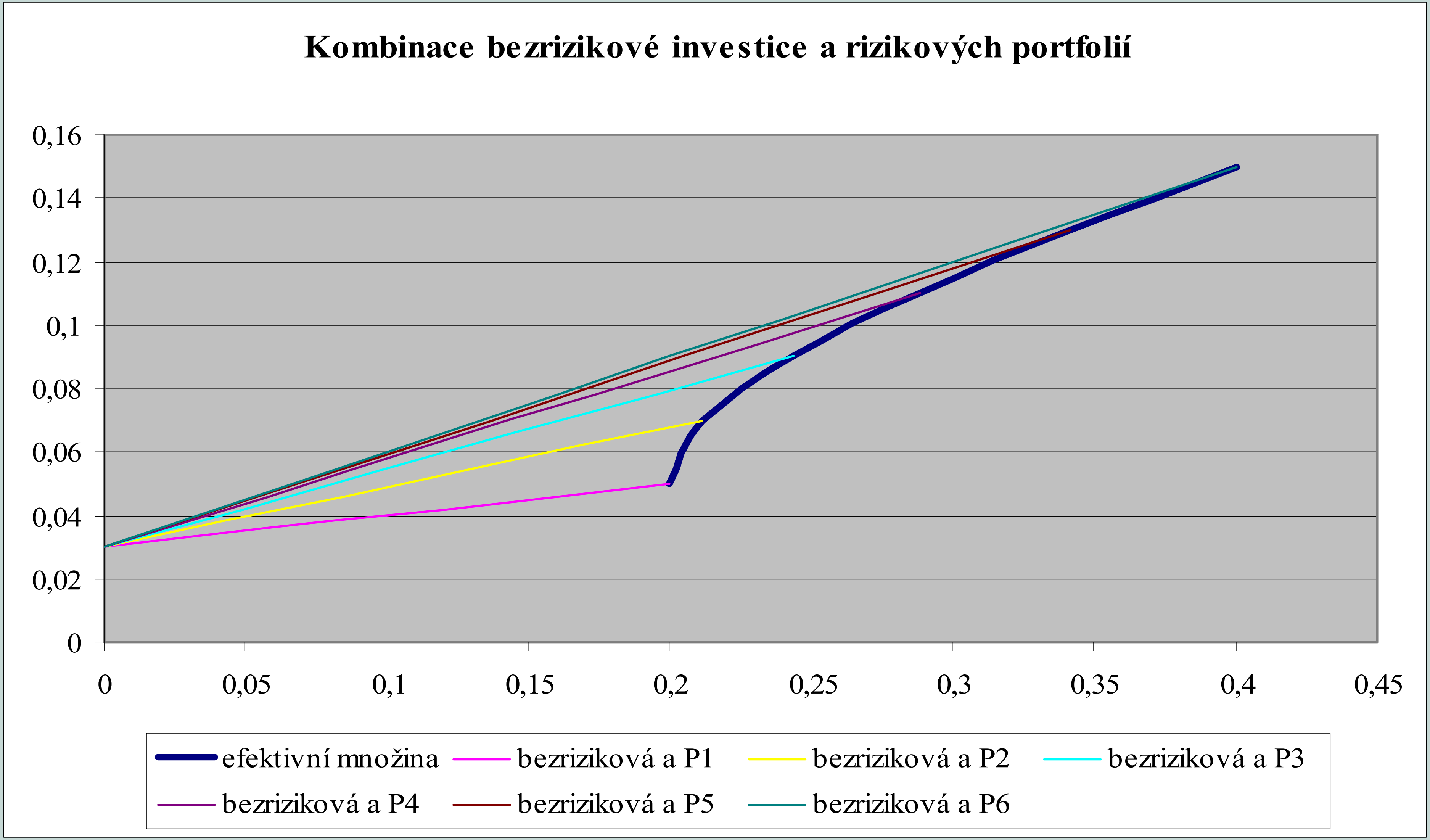
- všechny možné kombinace mezi bezrizikovým aktivem a rizikovým aktivem leží na přímce
- pokud si ze vztahu $\sigma_p = X\sigma_A$ vyjádříme X a dosadíme do vztahu pro výnos portfolia, můžeme psát

$$\bar{r}_p = (1 - X) \cdot r_f + X \cdot \bar{r}_A = \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_A}\right) \cdot r_f + \frac{\sigma_p}{\sigma_A} \cdot \bar{r}_A$$

- což po úpravě dává rovnici přímky ve tvaru

$$\bar{r}_p = r_f + \left(\frac{\bar{r}_A - r_f}{\sigma_A}\right) \cdot \sigma_p$$

Bezriziková investice



Bezriziková investice

- kterou přímku zvolíme?
  - tečnu k efektivní množině
- jak se změní efektivní množina?
  - část od dotykového bodu přímky a původní efektivní množiny směrem k počátku os nahradí část původní efektivní množiny (proč?)

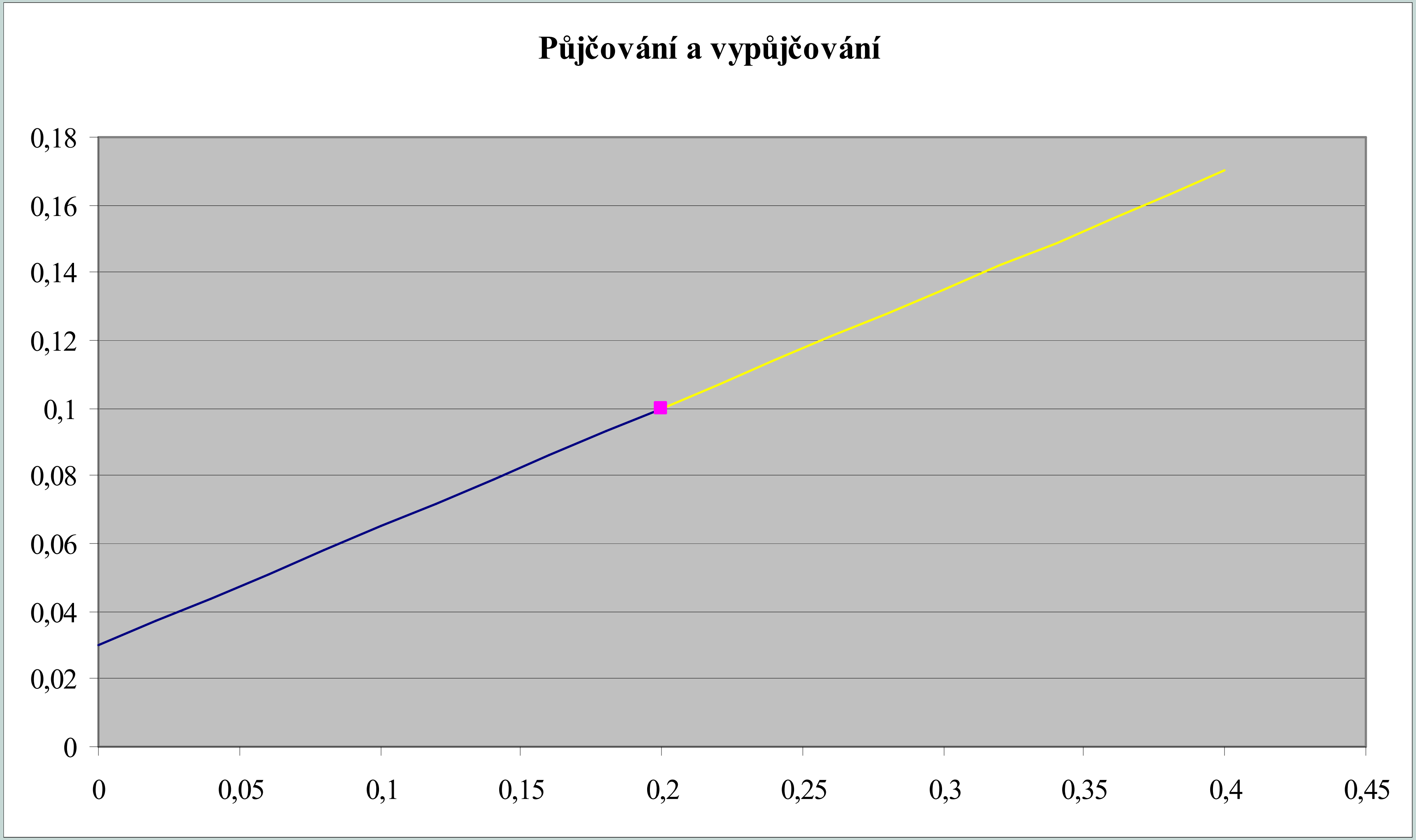
Půjčování versus vypůjčování

- lending x borrowing
- pokud investujeme pouze do rizikového portfolia, investujeme všechny prostředky
- pokud se rozhodneme investovat i do bezrizikového aktiva, rozhodujeme se část prostředků „půjčit“ (lend) „někomu“

Půjčování versus vypůjčování

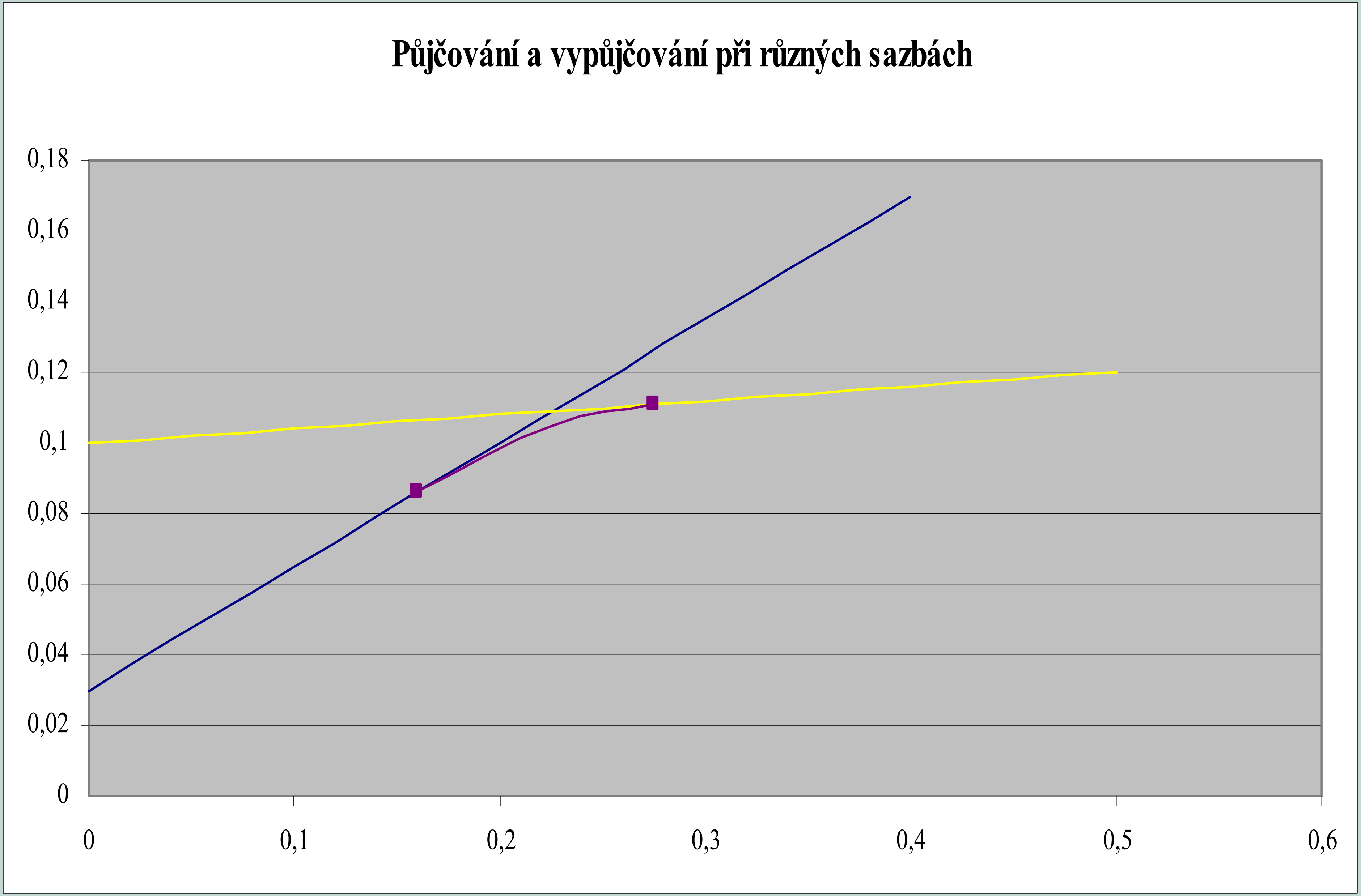
- mohli bychom se rozhodnout, že naše prostředky jsou pro nás nedostačující a že si chceme za bezrizikovou sazbu „vypůjčit“ (borrow) od „někoho“
- pohybujeme-li se po přímce pro bezrizikové aktivum a rizikové portfolio, je dělícím bodem mezi půjčováním a vypůjčováním bod, ve kterém jsou všechny prostředky investovány do rizikového portfolia

Půjčování versus vypůjčování

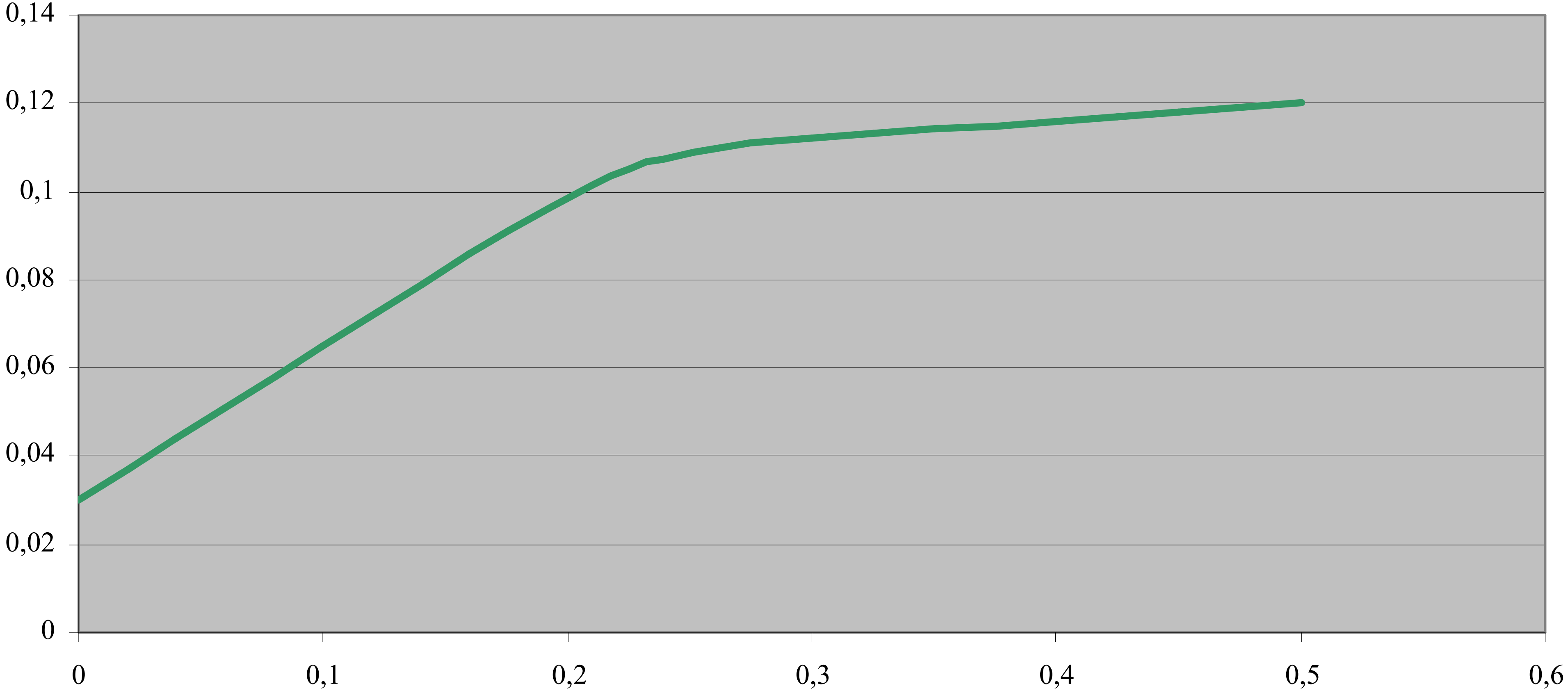


Půjčování versus vypůjčování

- pokud bychom umožnili půjčování i vypůjčování, byla by předchozí přímka efektivní množinou
- na této efektivní množině by ležel pouze jeden bod z původní efektivní množiny – byl by to tečnový bod
- v realitě je ovšem sazba pro vypůjčování (úvěrová sazba) většinou vyšší než sazba pro půjčování (vkladová sazba)
- jak tento fakt změní efektivní množinu?


Půjčování a vypůjčování při různých sazbách
0,18
0,16
0,14
0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6

Půjčování a vypůjčování při různých sazbách - efektivní množina



Nalezení portfolia při existenci bezrizikového aktiva

- mohou nastat 4 situace
  1. prodej nakrátko je povolený a bezrizikové aktivum je možno využít – budeme řešit dále
  2. prodej nakrátko je povolený a bezrizikové aktivum není možno využít – již jsme řešili
  3. prodej nakrátko není povolený a bezrizikové aktivum je možno využít – řešení metodami kvadratického programování (Kuhn-Tucker)
  4. prodej nakrátko není povolený a bezrizikové aktivum není možno využít – řešení metodami kvadratického programování (Kuhn-Tucker)

Řešení situace 1

- jedná se o maximalizační úlohu s omezující podmínkou
- maximalizovanou funkcí je tangens úhlu, který svírá přímka bezrizikového aktiva a tečného bodu na efektivní množině rizikových portfolií
- omezující podmínkou je $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$
- tuto podmínku můžeme vynechat (protože zderivovaná maximalizovaná funkce podle jednotlivých proměnných vytváří systém rovnic, které jsou homogenní stupně 0 – obecně ovšem podmínku vynechat nemůžeme)

Řešení situace 1

- budeme tedy derivovat funkci $f(\vec{X}) = \dfrac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p}$
- protože platí $r_f = 1 \cdot r_f = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) \cdot r_f = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \cdot r_f \right)$
- můžeme derivovanou funkci přepsat na tvar

$$f(\vec{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \left(\bar{r}_i - r_f \right)}{\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Řešení situace 1

$$\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow -\left(\kappa \cdot X_1 \cdot \sigma_{1i} + \kappa \cdot X_2 \cdot \sigma_{2i} + \cdots + \kappa \cdot X_i \cdot \sigma_i^2 + \cdots + \kappa \cdot X_{n-1} \cdot \sigma_{n-1,i} + \kappa \cdot X_n \cdot \sigma_{ni}\right) + \bar{r}_i - r_f = 0$$

kde $\kappa = \dfrac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p^2}$

můžeme zavést pomocnou proměnnou $Z_k = \kappa \cdot X_k$

- získali jsme n rovnic o n neznámých

Řešení situace 1

- abychom získali hledané podíly X_k, stačí vyjít z rovnic

$$X_k = \frac{Z_k}{\kappa} \qquad a \qquad \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} \kappa \cdot X_k = \kappa \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k$$

a

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} Z_k = \kappa \cdot 1$$

- což nám ve výsledku dává rovnici

$$X_k = \frac{Z_k}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}$$