Teorie portfolia

Více-indexové modely a APT (model arbitrážního oceňování)

Téma přednášky

- více-indexové modely
- charakteristika APT
- APT a CAPM

Více-indexové modely

- jedno-indexový (jedno-faktorový) model předpokládal, že ceny (výnosnosti) akcií se pohybují pouze v závislosti na pohybu trhu (tržního portfolia, indexu)
- existují další přístupy, které se snaží vysvětlit a odhadnout korelační strukturu výnosností cenných papírů
- jedním z takovýchto přístupů jsou více-indexové (více-faktorové) modely

Více-indexové modely

- snaží se zachytit některé netržní vlivy způsobující pohyb akcií
- hledání netržních vlivů je hledání sady ekonomických faktorů nebo strukturálních skupin (průmyslových odvětví), které jsou považovány za faktory, které ovlivňují pohyb cen cenných papírů (mimo trhu samotného)

Více-indexové modely

- v roce 1966 prokázal Benjamine King, že existuje vliv průmyslu na ceny akcií
- byly navrhnuty dva různé modely, které se snaží vysvětlit tento vliv
- první je nazýván více-indexový model
- druhý je nazýván model průmyslového indexu

Více-indexové modely

- více-faktorové modely mohou být charakterizovány následující rovnicí
$$r_i = \alpha_i + \beta_{i1} \cdot I_1 + \beta_{i2} \cdot I_2 + \cdots + \beta_{iL} \cdot I_L + \varepsilon_i$$
- I_j představuje skutečnou hodnotu konkrétního faktoru, β_{ij} je mírou závislosti cenného papíru na daném faktoru

Více-indexové modely

- stejně jako v jedno-faktorovém modelu i ve více-faktorovém modelu je složka výnosnosti cenného papíru, která nezávisí na faktorech, rozložena na dvě části – na skutečnou hodnotu a náhodnou chybu
- náhodná chyba má nulovou střední hodnotu a rozptyl $\sigma_{\varepsilon_i}^2$

Více-indexové modely

- tento model může být použit přímo
- matematicky by bylo výhodnější, aby faktory byly nekorelované (ortogonální)
- tento požadavek není nutno vyžadovat, protože je možno každé korelované faktory převést na faktory nekorelované
- je vhodné mít i požadavek na nekorelovanost mezi náhodnou chybou a jednotlivými faktory
- na náhodnou chybu platí obdobné požadavky jako v jedno-indexovém modelu

Více-indexové modely

- parametry takovéhoto modelu mohou být odhadnuty pomocí regresní analýzy
- výsledkem potom bude rovnice

$$r_i = a_i + b_{i1} \cdot I_1 + b_{i2} \cdot I_2 + \cdots + b_{iL} \cdot I_L + e_i$$

- kde a je odhad parametru α_i, b jsou odhady parametru β_{ij}

Více-indexové modely

- očekávaná výnosnost

$$\bar{r}_i = a_i + b_{i1} \cdot \bar{I}_1 + b_{i2} \cdot \bar{I}_2 + \cdots + b_{iL} \cdot \bar{I}_L$$

- rozptyl

$$\sigma_i^2 = b_{i1}^2 \cdot \sigma_{I1}^2 + b_{i2}^2 \cdot \sigma_{I2}^2 + \cdots + b_{iL}^2 \cdot \sigma_{IL}^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

- kovariance mezi cennými papíry i a j

$$\sigma_{ij} = b_{i1} \cdot b_{j1} \cdot \sigma_{I1}^2 + b_{i2} \cdot b_{j2} \cdot \sigma_{I2}^2 + \cdots + b_{iL} \cdot b_{jL} \cdot \sigma_{IL}^2$$

Charakteristika APT

- APT je založen na zákonu jedné ceny (tj. dva stejné statky nemohou být prodávány při odlišných cenách)
- APT předpokládá, že výnosnost cenných papírů je dána „procesem generujícím výnosnost“
- to znamená, že výnosnost každé akcie je v lineárním vztahu k množině faktorů (charakterizovaných faktorovým indexem)

Charakteristika APT

- můžeme tedy psát

$$r_i = a_i + b_{i_1} \cdot I_1 + b_{i_2} \cdot I_2 + \cdots + b_{i_j} \cdot I_j + e_i$$

- kde a_i je očekávaná výše výnosnosti akcie i, pokud všechny faktory (indexy faktorů) jsou rovny 0
- I_j je hodnota j-tého faktoru (indexu) ovlivňujícího výnosnost i-té akcie

Charakteristika APT

- b_{i_j} je citlivost výnosnosti i-té akcie na j-tý faktor (index)
- e_i je náhodná chyba s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma_{e_i}^2$
- dále předpokládáme, že náhodné chyby i-té a j-té akcie i náhodná chyba i-té akcie a j-tý faktor jsou nekorelovány
- dále je vhodné mít nekorelované faktory (dá se řešit i s korelovanými – musí dojít k převodu na nekorelované)

Charakteristika APT

- toto byly charakteristiky více-indexového (více-faktorového) modelu
- APT je popis očekávané výnosnosti za předpokladu, že výnosnosti akcií jsou dány (generovány) jedno- nebo více-indexovým modelem
- APT je rovnovážným modelem

Charakteristika APT

- odvodíme APT za předpokladu, že výnosnosti akcií jsou generovány pomocí dvou faktorů, tj. za předpokladu dvou-faktorového (-indexového) modelu
- pro i-tou akcii tedy platí

$$r_i = a_i + b_{i_1} \cdot I_1 + b_{i_2} \cdot I_2 + e_i$$

$$E\left(e_i e_j\right) \approx 0$$

Charakteristika APT

- pokud investor drží dobře diverzifikované portfolio (tj. má v portfoliu dostatečný počet cenných papírů), nesystematické riziko se blíží k nule a význam má pouze systematické riziko
- v předchozí rovnici nás tedy zajímají pouze hodnoty „b“

Charakteristika APT

- protože předpokládáme, že investora zajímá očekávaná výnosnost a riziko, může se zaměřit pouze na tři hodnoty: $\bar{r}_p \quad b_{p_1} \quad b_{p_2}$
- budeme-li mít tři dobře diverzifikovaná portfolia, pak nám tyto určují rovinu, na které leží všechna portfolia, která jsou konstruována z těchto tří portfolií, za předpokladu, že součet vah jednotlivých portfolií, ze kterých konstruujeme nové portfolio, je roven jedné

Charakteristika APT

- pokud by nějaké portfolio neleželo v dané rovině, existovala by možnost arbitráže
- arbitráž v podstatě znamená, že je možno bez rizika získat výnos
- arbitráže by probíhaly do té doby, než by se portfolio původně neležící v dané rovině svými parametry přizpůsobilo parametrům dané roviny

Charakteristika APT

- díky předpokladu APT (zákon jedné ceny => neexistence arbitráže) není nutné najít všechna riziková aktiva nebo tržní portfolio, abychom mohli testovat APT
- APT je vhodné využít pro hledání modelu chování těch akcií, o které se investor zajímá (nikoliv všech dostupných akcií)

APT a CAPM

- dá se ukázat, že APT je ve shodě s CAPM
- nejjednodušeji se dá toto ukázat, pokud předpokládáme, že výnosnosti jsou generovány jedno-faktorovým modelem (kde oním jediným faktorem je tržní portfolio, tj. $r_i = a_i + b_i \cdot r_M + e_i$) a existuje bezriziková investice
- potom se dá ukázat, že platí (CAPM)

$$\bar{r}_i = r_f + \left(\bar{r}_M - r_f\right) \cdot \beta_i$$

APT a CAPM

- platnost můžeme prokázat i v případě, že by se jednalo o více-faktorový model

$$r_i = a_i + b_{i_1} \cdot I_1 + b_{i_2} \cdot I_2 + e_i$$

- rovnovážný model APT pro takovýto proces generující výnosnosti a bezrizikovou investici je

$$\bar{r}_i = r_f + b_{i_1} \cdot \lambda_1 + b_{i_2} \cdot \lambda_2$$

- kde λ_j je nadměrná výnosnost portfolia s $b_{i_j} = 1$ pro jeden faktor a $b_{i_j} = 0$ pro ostatní faktory

APT a CAPM

- tedy rovnovážná výnosnost λ_j je dána modelem CAPM jako

$$\lambda_1 = \left(\bar{r}_M - r_f\right) \cdot \beta_{\lambda_1}$$

$$\lambda_2 = \left(\bar{r}_M - r_f\right) \cdot \beta_{\lambda_2}$$

- pokud dosadíme do původní rovnice, obdržíme

$$\bar{r}_i = r_f + \left(\bar{r}_M - r_f\right) \cdot b_{i_1} \cdot \beta_{\lambda_1} + \left(\bar{r}_M - r_f\right) \cdot b_{i_2} \cdot \beta_{\lambda_2}$$

- a po úpravě

$$\bar{r}_i = r_f + \left(b_{i_1} \cdot \beta_{\lambda_1} + b_{i_2} \cdot \beta_{\lambda_2}\right) \cdot \left(\bar{r}_M - r_f\right)$$

APT a CAPM

- vrátíme-li se k modelu CAPM ($\bar{r}_i = r_f + (\bar{r}_M - r_f) \cdot \beta_i$), vidíme, že

$$\beta_i = \left(b_{i_1} \cdot \beta_{\lambda_1} + b_{i_2} \cdot \beta_{\lambda_2}\right)$$

- β_{λ_j} se nazývá faktorové beta
- b_{i_j} jsou citlivosti cenného papíru na j-tý faktor

APT a CAPM

- výnosnost $$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{p_k} \cdot \overline{F}_k$$
- riziko (rozptyl) $$\sigma_p^2 = \sum_{k=1}^{K} b_{p_k}^2 \cdot \sigma_{F_k}^2 + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_i}^2$$
- kovariance $$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{K} b_{i_k} \cdot b_{j_k} \cdot \sigma_{F_k}^2$$