Teorie portfolia

Durace, konvexita, imunizace dluhopisového portfolia

Téma přednášky

- dluhopisy
- durace
- konvexita
- imunizace dluhopisového portfolia

Dluhopisy

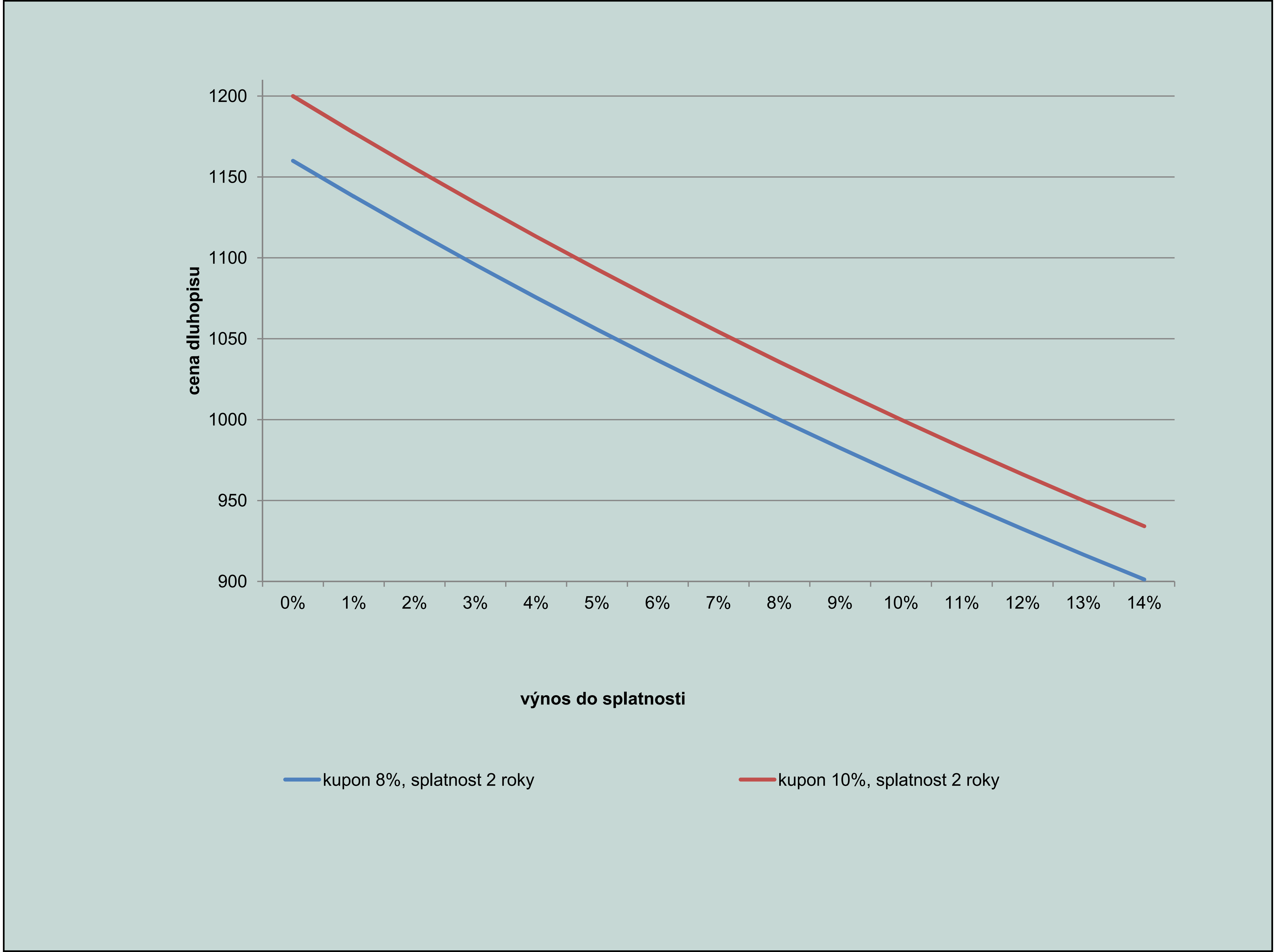
- v případě vysoké volatility úrokových měr se snižuje poptávka po dluhopisech s pevným kuponem a roste poptávka po dluhopisech s proměnlivým kuponem
- při vysokých úrokových sazbách jsou ceny dluhopisů s pevným kuponem nižší než při nízkých úrokových sazbách
- dluhopisy mají především úrokové riziko
- dluhopisy – bezkuponové a kuponové

Měření výnosu z dluhopisu

- nominální výnos (kuponový výnos) – kupon k nominálu
- běžný výnos – kupon k aktuální tržní ceně
- výnos do splatnosti (YTM – yield to maturity) – hlavní indikátor výnosnosti dluhopisů
- výnos do doby výpovědi (YTC)
- očekávaný realizovaný výnos (YTR)

Cenová citlivost dluhopisu

- =míra změny ceny dluhopisu při určité změně výnosu do splatnosti
- většina investorů je averzní vůči riziku – dává přednost dluhopisům s menší cenovou citlivostí
- pokud ale investor očekává, že bude držet dluhopis až do doby splatnosti, potom je cenová citlivost dluhopisu nedůležitá
- cena dluhopisu roste, výnos do splatnosti klesá


1200
1150
1100
1050
1000
950
900
cena dluhopisu
0%
1%
2%
3%
4%
5%
6%
7%
8%
9%
10%
11%
12%
13%
14%
výnos do splatnosti
kupon 8%, splatnost 2 roky
kupon 10%, splatnost 2 roky

Cenová citlivost dluhopisu

- při konstantní kuponové míře a konstantní době splatnosti (jedna křivka) má dluhopis s vyšším výnosem do splatnosti nižší cenovou citlivost (křivka se stává plošší)
- dluhopisy s různou kuponovou mírou a s různou dobou splatnosti (dvě různé křivky) mají různou cenovou citlivost na změnu úrokové míry – jak je porovnat?

Durace

- kvantifikuje cenovou citlivost dluhopisů
- představuje průměrnou dobu, za kterou získáme příjmy z dluhopisu
- slouží ke stanovení nové ceny dluhopisu při změně výnosu do splatnosti
- pro malou změnu ceny dluhopisu platí Taylorův rozvoj:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial^2 r} dr^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 P}{\partial^3 r} dr^3 + \cdots$$

- uvažujme pouze první dva členy na pravé straně rovnice a cenu dluhopisu jako sumu diskontovaných cash flow
- můžeme tedy psát:

$$dP \approx -\frac{1}{(1+r)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{t \cdot C_t}{(1+r)^t} dr + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+r)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{t \cdot (1+r) \cdot C_t}{(1+r)^t} dr^2$$

- (Macaulayovu) duraci D dluhopisu definujeme vztahem:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{t \cdot C_t}{(1+r)^t}}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{t \cdot C_t}{(1+r)^t}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}}$$

Konvexita

- je „zpřesňující člen“ Taylorova rozvoje
- je definována vztahem

$$K = \frac{1}{\left(1+r\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{t \cdot \left(1+r\right) \cdot C_t}{\left(1+r\right)^t} dr^2$$

Změna ceny dluhopisu

- po dosazení durace a konvexity do vzorce pro malou změnu ceny dluhopisu dostáváme:

$$dP \approx -D \cdot \frac{P}{(1+r)} dr + \frac{1}{2} \cdot K dr^2$$

- máme dluhopis s nominální hodnotou 1000 Kč, dvouletou splatností, kuponovou mírou 8% a s výnosem do splatnosti 9%

- cena dluhopisu je $P = \frac{80}{1{,}09} + \frac{1080}{1{,}09^2} = 982{,}41$

- durace dluhopisu je $D = \frac{\frac{1 \cdot 80}{1{,}09} + \frac{2 \cdot 1080}{1{,}09^2}}{P} = \frac{1891{,}41}{982{,}41} = 1{,}925$

- konvexita dluhopisu je $K = \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 80}{1{,}09} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 1080}{1{,}09^2}}{1{,}09^2} = 4714{,}15$

- předpokládejme, že se výnos do splatnosti náhle sníží o 1%
- pokud budeme uvažovat pouze duraci, dojde k růstu ceny o

$$dP = -1{,}925 \cdot \frac{982{,}41}{1{,}09} \cdot \left(-0{,}01\right) = 17{,}35$$

- nová cena dluhopisu tedy bude

$$982{,}41 + 17{,}35 = 999{,}76$$

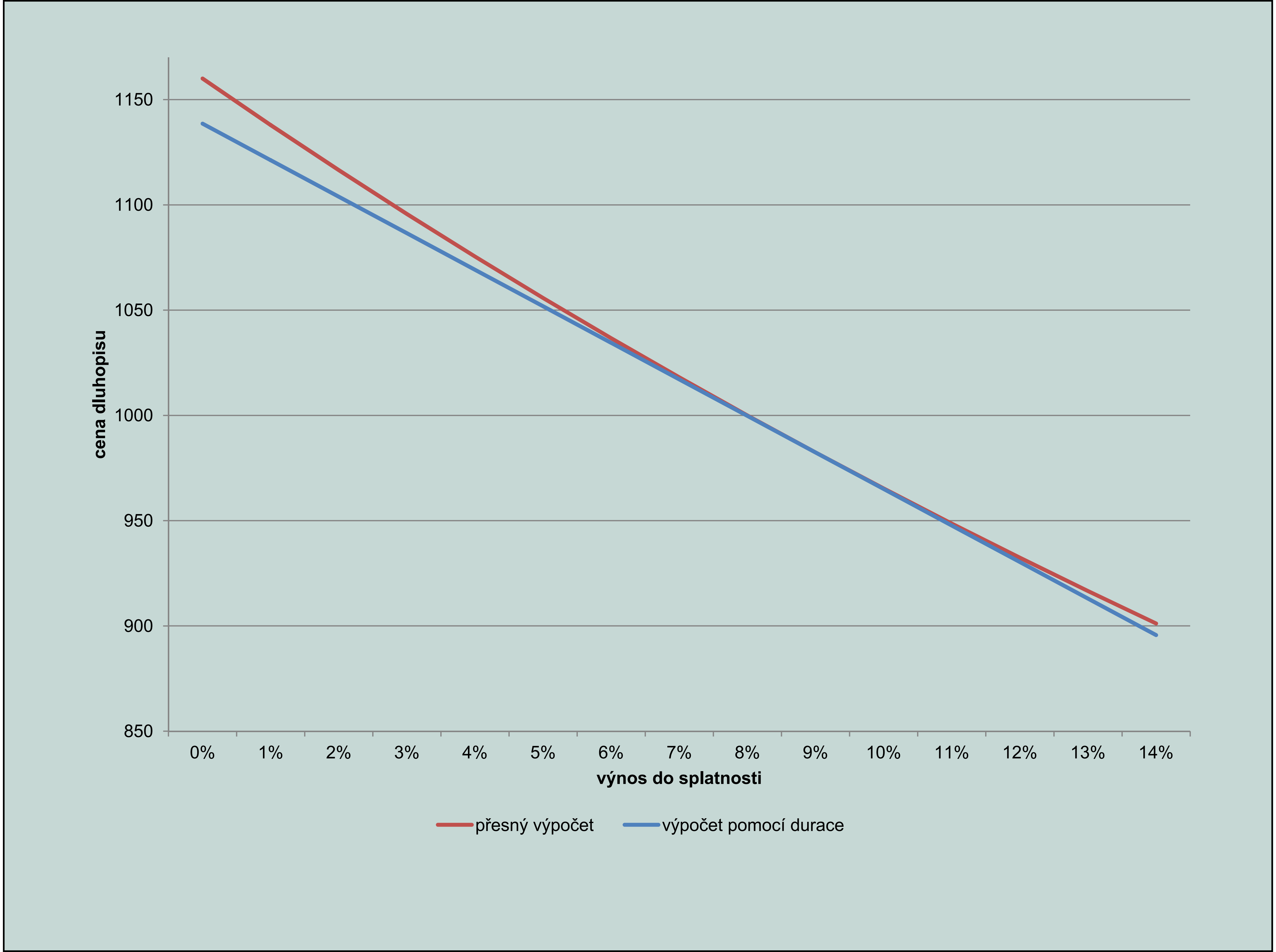
- přesný výpočet by vedl k výsledku 1000 Kč, což je absolutní chyba 0,24 Kč a odpovídající relativní chyba 0,24/982,41=0,02443%

- pokud použijeme i konvexitu, dojde k růstu ceny o

$$dP = -1{,}925 \cdot \frac{982{,}41}{1{,}09} \cdot (-0{,}01) + \frac{1}{2} \cdot 4714{,}15 \cdot 0{,}01^2 = 17{,}35 + 0{,}23 = 17{,}58$$

- nová cena dluhopisu tedy bude

$$982{,}41 + 17{,}58 = 999{,}99$$



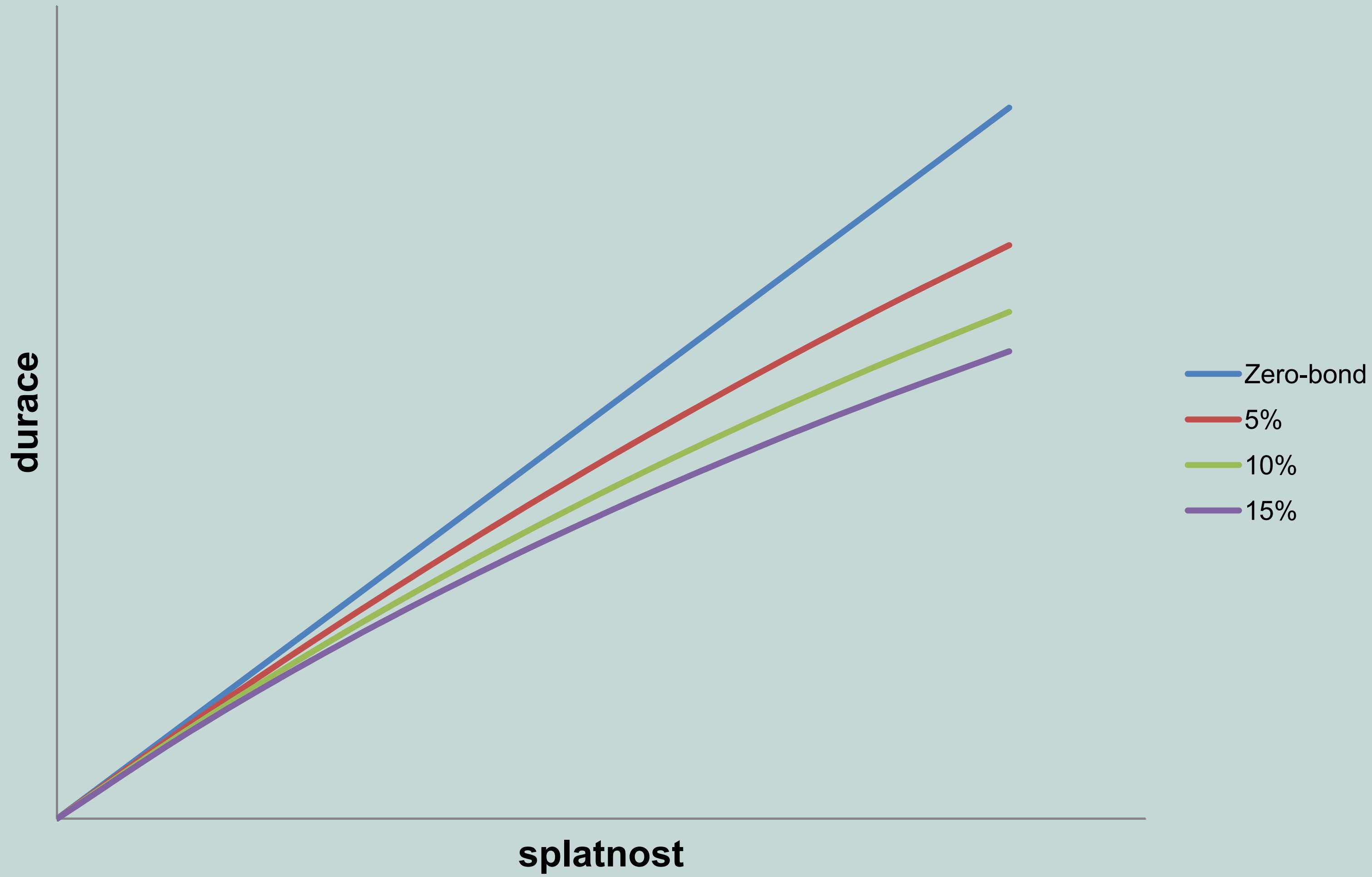
cena dluhopisu
1150
1100
1050
1000
950
900
850
0%
1%
2%
3%
4%
5%
6%
7%
8%
9%
10%
11%
12%
13%
14%
výnos do splatnosti
přesný výpočet
výpočet pomocí durace

Modifikovaná a dolarová durace

$$D_{\mathrm{mod}} = \frac{D}{1+r} \qquad D_{dol} = D_{\mathrm{mod}} \cdot P = \frac{D \cdot P}{1+r}$$

$$dP \approx -D \cdot \frac{P}{(1+r)} dr = -D_{\mathrm{mod}} \cdot P\, dr = -D_{dol}\, dr$$

- čím větší durace, tím větší je vliv změny úrokové sazby na tržní cenu dluhopisu
- vyšší kuponová sazba vede k poklesu durace



durace
splatnost
Zero-bond
5%
10%
15%

Dluhopisové portfolio

- pokud máme v portfoliu *m* dluhopisů, potom durace portfolia je dána vztahem

$$D_p = \frac{P_1 \cdot D_1 + P_2 \cdot D_2 + \cdots + P_m \cdot D_m}{P_1 + P_2 + \cdots + P_m}$$

- k ochraně portfolia před rizikem změny úrokových sazeb se používá technika tzv. imunizace portfolia

Imunizace portfolia

- základní myšlenka imunizace portfolia spočívá v tom, že se durace vytvořeného portfolia rovná požadované době držení portfolia
- za 2 roky chceme mít 1 mil. Kč
- k dispozici máme dva druhy dluhopisů
- A – splatnost 1 rok, kupon jednou do roka, kuponovou míru 7%, očekávaný výnos 10% a nominální hodnotu 100 Kč – dokážeme spočítat, že durace je 1 rok a cena je 107/1,1=97,27 Kč
- B – splatnost 3 roky, kupon jednou do roka, kuponovou míru 8%, očekávaný výnos 10% a nominální hodnotu 100 Kč

- cena dluhopisu B je

$$P = \frac{8}{1,1} + \frac{8}{1,1^2} + \frac{108}{1,1^3} = 95,03$$

- durace dluhopisu B je

$$D = \frac{\frac{1 \cdot 8}{1,1} + \frac{2 \cdot 8}{1,1^2} + \frac{3 \cdot 108}{1,1^3}}{95,03} = 2,78$$

- podíly jednotlivých emisí na portfoliu dostaneme řešením soustavy rovnic

$$X_1 + X_2 = 1$$

$$X_1 \cdot D_1 + X_2 \cdot D_2 = D_p\, , kde \quad D_p = 2$$

- po vyřešení soustavy obdržíme váhy

$$X_1 = 0{,}4382 \quad X_2 = 0{,}5618$$

- abychom obdrželi za 2 roky 1 mil. Kč při úrokové míře 10%, musíme dnes investovat 1 000 000 / 1,1^2 což je přibližně 826 446 Kč
- vzhledem ke spočítaným vahám budeme investovat 362 148,64 Kč do prvního dluhopisu, což je při ceně 97,27 Kč za jeden dluhopis přibližně 3723 kusů
- do druhého dluhopisu budeme investovat 464 297,36 Kč, což je při ceně 95,03 Kč přibližně 4886 kusů

úroková míra *i*	9%	10%	11%
roční dluhopis			
107*3723*(1+*i*)	434 213,49	438 197,10	442 180,71
tříletý dluhopis			
1.rok: 8*4886*(1+*i*)	42 605,92	42 996,80	43 387,68
2.rok: 8*4886	39 088,00	39 088,00	39 088,00
3.rok: 108*4886/(1+*i*)	484 117,43	479 716,36	475 394,59
Suma	1 000 024,84	999 998,26	1 000 050,98

- vývoj hodnoty portfolia v závislosti na hodnotě úrokové sazby