I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.
- Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\int f(x)dx$.

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.
- Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\int f(x)dx$.
- Vypočítáme $F(x) = \int f(x)dx$.

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.
- Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\int f(x)dx$.
- Vypočítáme $F(x) = \int f(x)dx$.
- Určíme interval I, na kterém platí $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.
- Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\int f(x)dx$.
- Vypočítáme $F(x) = \int f(x)dx$.
- Určíme interval I, na kterém platí $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
- Hledaný integrál je $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c,\ t \in I$.

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Řešení:

$$\int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int sin(2x).2dx =$$

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Řešení:

$$\int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int sin(2x).2dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} substituce & \begin{array}{r} u = 2x \\ du = 2dx \end{array} \end{array} \right| =$$

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Řešení:

$$\int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int sin(2x).2dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} substituce & \begin{array}{r} u = 2x \\ du = 2dx \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int sin(u)du =$$

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Řešení:

$$\int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int sin(2x).2dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lr} substituce & u = 2x \\ & du = 2dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int sin(u)du = \frac{1}{2}(-cos(u)) + c$$

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Řešení:

$$\int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int sin(2x).2dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} substituce & \begin{aligned} u &= 2x \\ du &= 2dx \end{aligned} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int sin(u)du = \frac{1}{2}(-cos(u)) + c = \frac{1}{2}(-cos(2x)) + c,\ x \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1}\,dx$.

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1}dx$.

Řešení:

$$\int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}.3dx =$$

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1} dx$.

Řešení:

$$\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x+1}.3dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} \textit{substituce} & u = 3x+1 \\ & du = 3dx \end{array} \right| =$$

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1}dx$.

Řešení:

$$\int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}.3dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} substituce & u = 3x+1 \\ & du = 3dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int e^{u}.du$$

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1}dx$.

Řešení:

$$\int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}.3dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} substituce & u = 3x+1 \\ & du = 3dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int e^{u}.du = \frac{1}{3}e^{u} + c$$

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1}dx$.

Řešení:

$$\int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}.3dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \textit{substituce} & u = 3x+1 \\ & du = 3dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int e^{u}.du = \frac{1}{3}e^{u} + c = \frac{1}{3}e^{3x+1} + c,\ x \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \textit{substituce} & u = x^2+1 \\ & du = 2x dx \end{array} \right| =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \textit{substituce} & u = x^2 + 1 \\ & du = 2x dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} substituce & u = x^2+1 \\ & du = 2xdx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} ln|u| + c =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} substituce & u = x^2+1 \\ & du = 2xdx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} ln|u| + c = \frac{1}{2} ln|x^2+1| + c, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka : Pro funkci $\varphi(t)$, která je nenulová na intervalu I a má zde derivaci $\varphi'(t)$ platí: $\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = ln|\varphi(t)| + c,\ t \in I : \varphi(t) \neq 0$.

Poznámka : Pro funkci $\varphi(t)$, která je nenulová na intervalu I a má zde derivaci $\varphi'(t)$ platí: $\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = ln|\varphi(t)| + c, \; t \in I : \varphi(t) \neq 0$.

Důkaz:

Poznámka : Pro funkci $\varphi(t)$, která je nenulová na intervalu I a má zde derivaci $\varphi'(t)$ platí: $\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = ln|\varphi(t)| + c,\ t \in I : \varphi(t) \neq 0$.

Důkaz:

Ověřte sami.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$ a do daného integrálu dosadíme místo x výraz $\varphi(t)$ a místo dx výraz $\varphi'(t)dt$.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$ a do daného integrálu dosadíme místo x výraz $\varphi(t)$ a místo dx výraz $\varphi'(t)dt$.
- Určíme $G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$ a do daného integrálu dosadíme místo x výraz $\varphi(t)$ a místo dx výraz $\varphi'(t)dt$.
- Určíme $G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.
- Dosadíme do $G(t)$ místo t výraz $\varphi^{-1}(x)$ a dostaneme $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$ a do daného integrálu dosadíme místo x výraz $\varphi(t)$ a místo dx výraz $\varphi'(t)dt$.
- Určíme $G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.
- Dosadíme do $G(t)$ místo t výraz $\varphi^{-1}(x)$ a dostaneme $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$.
- Zkontrolujeme, zda na intervalu J platí $F'(x) = f(x)$.

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx, \ x \in (-1,1)$.

Řešení:

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx,\ x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx, \; x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} \textit{substituce} & x = sin(t) & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ & dx = cos(t)dt & \end{array} \right| =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx,\ x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} substituce & x = sin(t) & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ & dx = cos(t)dt & \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1 - sin^2(t)}cos(t)dt = \int cos^2(t)dt =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx,\ x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} substituce & x = sin(t) & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ & dx = cos(t)dt & \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1-sin^2(t)}cos(t)dt = \int cos^2(t)dt =$$

$$= \int \frac{cos(2t)+1}{2}dt = \frac{sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + c,\ x \in (-1,1).$$

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1 - x^2} dx, \; x \in (-1, 1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} substituce & x = sin(t) & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ & dx = cos(t)dt & \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1 - sin^2(t)} cos(t) dt = \int cos^2(t) dt =$$

$$= \int \frac{cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + c, \; x \in (-1, 1).$$

Nyní je nutné vrátit se k původní proměnné x. Pro $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ vyjádříme $t = arcsin(x)$ a protože

$$sin(2t) = 2sin(t)cos(t) = 2sin(t)\sqrt{1 - sin^2(t)},$$

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx,\ x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lrl} substituce & x = sin(t) & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ & dx = cos(t)dt & \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1-sin^2(t)}cos(t)dt = \int cos^2(t)dt =$$

$$= \int \frac{cos(2t)+1}{2}dt = \frac{sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + c,\ x \in (-1,1).$$

Nyní je nutné vrátit se k původní proměnné x. Pro $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ vyjádříme $t = arcsin(x)$ a protože

$$sin(2t) = 2sin(t)cos(t) = 2sin(t)\sqrt{1-sin^2(t)},$$

dostaneme výsledek $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{arcsin(x)}{2} + c.$

Opakování - rozklad polynomu v reálném oboru:

Nechť $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom.

Opakování - rozklad polynomu v reálném oboru:

Nechť $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom.

Pak $f(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = a_n(x-\alpha)^k(x-\beta)^l \ldots (x-\gamma)^m \cdot [(x-a)^2+b^2]^p \ldots [(x-c)^2+d^2]^q,$$

Opakování - rozklad polynomu v reálném oboru:

Nechť $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom.

Pak $f(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = a_n (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \ldots (x-\gamma)^m \cdot [(x-a)^2 + b^2]^p \ldots [(x-c)^2 + d^2]^q,$$

kde
$\alpha \in \mathbb{R}$ je k - násobný kořen $f(x)$,
$\beta \in \mathbb{R}$ je l - násobný kořen $f(x)$,
$\vdots$
$\gamma \in \mathbb{R}$ je m - násobný kořen $f(x)$,

Opakování - rozklad polynomu v reálném oboru:

Nechť $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom.

Pak $f(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = a_n (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \ldots (x-\gamma)^m \cdot [(x-a)^2 + b^2]^p \ldots [(x-c)^2 + d^2]^q,$$

kde
$\alpha \in \mathbb{R}$ je k - násobný kořen $f(x)$,
$\beta \in \mathbb{R}$ je l - násobný kořen $f(x)$,
$\vdots$
$\gamma \in \mathbb{R}$ je m - násobný kořen $f(x)$,
$a \pm ib$ jsou komplexně sdružené nereálné kořeny násobnosti p,
$\vdots$
$c \pm id$ jsou komplexně sdružené nereálné kořeny násobnosti q.

Příklad: Rozložte v reálném oboru polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

Příklad: Rozložte v reálném oboru polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

Řešení:

Polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ má kořen $x = 1$, protože $f(1) = 0$.

Příklad: Rozložte v reálném oboru polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

Řešení:

Polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ má kořen $x = 1$, protože $f(1) = 0$.

Můžeme zapsat

$$f(x) = x^4(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^4-1).$$

Příklad: Rozložte v reálném oboru polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

Řešení:

Polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ má kořen $x = 1$, protože $f(1) = 0$.

Můžeme zapsat

$$f(x) = x^4(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^4-1).$$

Podle vzorce $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ lze dále rozložit

$$f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Příklad: Rozložte v reálném oboru polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

Řešení:

Polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ má kořen $x = 1$, protože $f(1) = 0$.

Můžeme zapsat

$$f(x) = x^4(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^4-1).$$

Podle vzorce $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ lze dále rozložit

$$f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Tedy reálný rozklad $f(x)$ je

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)(x^2+1).$$

Racionální lomená funkce

Definice : Racionální lomenou funkcí nazýváme funkci tvaru $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x),\ q(x)$ jsou polynomy.

Racionální lomená funkce

Definice : Racionální lomenou funkcí nazýváme funkci tvaru $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x),\ q(x)$ jsou polynomy.

Je-li stupeň polynomu $p(x)$ menší než stupeň polynomu $q(x)$, nazveme $f(x)$ ryze lomenou funkcí.

Racionální lomená funkce

Definice : Racionální lomenou funkcí nazýváme funkci tvaru $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x),\ q(x)$ jsou polynomy.

Je-li stupeň polynomu $p(x)$ menší než stupeň polynomu $q(x)$, nazveme $f(x)$ ryze lomenou funkcí.

Poznámka : Pokud není stupeň $p(x)$ menší než stupeň $q(x)$, nazýváme funkci $f(x)$ neryze lomenou a lze ji zapsat jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) =$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x \\
\underline{-(x^3 + x)}
\end{array}
$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x \\
\underline{-(x^3 + x)} \\
2x^2 + 2x - 1
\end{array}
$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x + 2 \\
\underline{-(x^3 + x)} \\
2x^2 + 2x - 1
\end{array}
$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x + 2 \\
\underline{-(x^3 + x)} \\
2x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-(2x^2 + 2)}
\end{array}
$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x + 2 \\
\underline{-(x^3 + x)} \\
2x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-(2x^2 + 2)} \\
2x - 3 \ldots \textit{zbytek}
\end{array}
$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x + 2 \\
\underline{-(x^3 + x)} \\
2x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-(2x^2 + 2)} \\
2x - 3 \ldots \textit{zbytek}
\end{array}
$$

Tedy $f(x) = x + 2 + \frac{2x-3}{x^2+1}$.

Rozklad na parciální zlomky

Nechť $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ je ryze lomená reálná racionální funkce, jejíž čitatel a jmenovatel nemají stejný kořen.
Potom existují reálná čísla $A_1, \dots, A_k,\ B_1, \dots,\ B_l, \dots,\ C_1, \dots,\ C_m$ a $M_1,\ N_1, \dots,\ M_p,\ N_p, \dots,\ P_1,\ Q_1, \dots,\ P_q,\ Q_q$ tak, že platí

$$
\begin{aligned}
R(x) = {} & \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)^1} + \\
& + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} + \dots + \frac{B_1}{(x-\beta)^1} + \dots + \\
& + \frac{C_m}{(x-\gamma)^m} + \dots + \frac{C_1}{(x-\gamma)^1} + \\
& + \frac{M_p x + N_p}{[(x-a)^2+b^2]^p} + \dots + \frac{M_1 x + N_1}{[(x-a)^2+b^2]^1} + \dots + \\
& + \frac{P_q x + Q_q}{[(x-c)^2+d^2]^q} + \dots + \frac{P_1 x + Q_1}{[(x-c)^2+d^2]^1},
\end{aligned}
$$

kde $\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma,\ a,\ b,\ldots,\ c,\ d$ jsou reálná čísla a
$k,\ l,\ldots,\ m,\ p,\ldots,\ q$ jsou přirozená čísla daná rozkladem jmenovatele
$q(x) = a_n(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\ldots(x-\gamma)^m\cdot[(x-a)^2+b^2]^p\ldots[(x-c)^2+d^2]^q.$

Konstanty v čitatelích určíme porovnáním výrazů na pravé a levé straně. (jde o tzv. metodu neurčitých koeficientů).

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

Řešení: podle vzorce

$$f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

Řešení: podle vzorce

$$f(x) = \frac{8x^2 + x + 6}{x^2.(x-2).(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Upravíme zlomky na pravé straně na společný jmenovatel:

$$\frac{A(x-2)(x^2+1) + Bx(x-2)(x^2+1) + Cx^2(x^2+1) + (Dx+E)x^2(x-2)}{x^2.(x-2).(x^2+1)}.$$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

Řešení: podle vzorce

$$f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Upravíme zlomky na pravé straně na společný jmenovatel:

$$\frac{A(x-2)(x^2+1) + Bx(x-2)(x^2+1) + Cx^2(x^2+1) + (Dx+E)x^2(x-2)}{x^2.(x-2).(x^2+1)}.$$

Čitatel se musí rovnat čitateli původního zlomku:

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2+x+6 = \quad & A(x^3-2x^2+x-2)+B(x^4-2x^3+x^2-2x)+ \\ & +C(x^4+x^2)+D(x^4-2x^3)+E(x^3-2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$
- $x^2 : 8 = -2A + B + C - 2E$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$
- $x^2 : 8 = -2A + B + C - 2E$
- $x^1 : 1 = A - 2B$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned}8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2).\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$
- $x^2 : 8 = -2A + B + C - 2E$
- $x^1 : 1 = A - 2B$
- $x^0 : 6 = -2A$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$
- $x^2 : 8 = -2A + B + C - 2E$
- $x^1 : 1 = A - 2B$
- $x^0 : 6 = -2A$

Spočteme postupně $A = -3$, $B = -2$, $D = 0$, $E = -1$, $C = 2$.

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$
- $x^2 : 8 = -2A + B + C - 2E$
- $x^1 : 1 = A - 2B$
- $x^0 : 6 = -2A$

Spočteme postupně $A = -3$, $B = -2$, $D = 0$, $E = -1$, $C = 2$.
Racionální lomenou funkci $f(x)$ lze tedy zapsat ve tvaru

$$f(x) = \frac{-3}{x^2} + \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{-1}{x^2+1}.$$

Příklad: Integrujte funkci z předchozího příkladu

Řešení: Při integraci racionální lomené funkce využijeme rozkladu na parciální zlomky, dostaneme tak součet několika jednodušších integrálů.

Příklad: Integrujte funkci z předchozího příkladu

Řešení: Při integraci racionální lomené funkce využijeme rozkladu na parciální zlomky, dostaneme tak součet několika jednodušších integrálů.

$$\int \frac{8x^2 + x + 6}{x^2.(x-2).(x^2+1)} dx =$$

Příklad: Integrujte funkci z předchozího příkladu

Řešení: Při integraci racionální lomené funkce využijeme rozkladu na parciální zlomky, dostaneme tak součet několika jednodušších integrálů.

$$\int \frac{8x^2 + x + 6}{x^2.(x-2).(x^2+1)} dx =$$

$$= \int \frac{-3}{x^2} dx + \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{-1}{x^2+1} dx =$$

Příklad: Integrujte funkci z předchozího příkladu

Řešení: Při integraci racionální lomené funkce využijeme rozkladu na parciální zlomky, dostaneme tak součet několika jednodušších integrálů.

$$\int \frac{8x^2 + x + 6}{x^2.(x-2).(x^2+1)} dx =$$

$$= \int \frac{-3}{x^2} dx + \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{-1}{x^2+1} dx =$$

$$= -3(-x^{-1}) - 2ln|x| + 2ln|x-2| - arctg(x) + c.$$