Řešené příklady z diferenciálního počtu

Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešené příklady z diferenciálního počtu

Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce f(x) v bodě x přibližně psát

Řešené příklady z diferenciálního počtu
Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce f(x) v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Řešené příklady z diferenciálního počtu
Diferenciál
Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce f(x) v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = 0,003$.

Řešené příklady z diferenciálního počtu
Diferenciál
Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:
Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce f(x) v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = 0,003$.
Potom je $f(x_0) = f(1) = 2$ a $f'(x) = 2x \cdot ln2$.

Řešené příklady z diferenciálního počtu
Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce f(x) v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = 0,003$.
Potom je $f(x_0) = f(1) = 2$ a $f'(x) = 2x \cdot ln2$.
Tedy $f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot ln2$.

Řešené příklady z diferenciálního počtu
Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce f(x) v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = 0,003$.
Potom je $f(x_0) = f(1) = 2$ a $f'(x) = 2x \cdot ln2$.
Tedy $f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot ln2$.
Protože $ln2 \doteq 0,69315$, dostaneme $2^{1,003} \doteq 2 + 2 \cdot ln2 \cdot 0,003 \doteq 2,004$.

Řešené příklady z diferenciálního počtu
Diferenciál

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1,003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce f(x) v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = 0,003$.
Potom je $f(x_0) = f(1) = 2$ a $f'(x) = 2x \cdot ln2$.
Tedy $f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot ln2$.
Protože $ln2 \doteq 0,69315$, dostaneme $2^{1,003} \doteq 2 + 2 \cdot ln2 \cdot 0,003 \doteq 2,004$.

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Řešení:
Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x0).$$

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Řešení:
Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 81$ a $x - x_0 = -1$.

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Řešení:
Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 81$ a $x - x_0 = -1$.
Potom je $f(x_0) = f(81) = 9$ a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Řešení:
Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x)\doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 81$ a $x - x_0 = -1$.
Potom je $f(x_0) = f(81) = 9$ a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Tedy $f'(x_0) = f'(81) = \frac{1}{18}$.

Příklad: Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Řešení:
Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x0).$$

V našem případě zvolíme $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 81$ a $x - x_0 = -1$.
Potom je $f(x_0) = f(81) = 9$ a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Tedy $f'(x_0) = f'(81) = \frac{1}{18}$.
Takže $\sqrt{80} \doteq 9 + \frac{1}{18} \cdot (-1) \doteq 8,9445$.

Rovnice tečny a normály

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x} ln \frac{1}{x}$ v bodě $T = [1; ?]$.

Rovnice tečny a normály

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x} ln \frac{1}{x}$ v bodě $T = [1; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.

Rovnice tečny a normály

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x} ln \frac{1}{x}$ v bodě $T = [1; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.
V našem případě je $y_0 = f(1) = 0$ a protože

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

je $f'(1) = -1$.

Rovnice tečny a normály

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x} ln \frac{1}{x}$ v bodě $T = [1; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.
V našem případě je $y_0 = f(1) = 0$ a protože

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

je $f'(1) = -1$.
Tedy rovnice hledané tečny je $y = -(x - 1)$,

Rovnice tečny a normály

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x} ln \frac{1}{x}$ v bodě $T = [1; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.

V našem případě je $y_0 = f(1) = 0$ a protože

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

je $f'(1) = -1$.

Tedy rovnice hledané tečny je $y = -(x - 1)$,

rovnice normály je pro $f'(x_0) \neq 0$

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0),$$

tedy $y = x - 1$.

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = ln(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$ v bodě $T = [1/2; ?]$.

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = ln(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$ v bodě $T = [1/2; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce y = f(x) v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = ln(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$ v bodě $T = [1/2; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce y = f(x) v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.
V našem případě je $y_0 = f(1/2) = \frac{-ln3}{2}$.

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = ln(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$ v bodě $T = [1/2; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce y = f(x) v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.
V našem případě je $y_0 = f(1/2) = \frac{-ln3}{2}$.
Protože $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2}$, je $f'(1/2) = \frac{8}{3}$.

Příklad: Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = ln(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$ v bodě $T = [1/2; ?]$.

Řešení: Rovnice tečny ke grafu funkce y = f(x) v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $y_0 = f(x_0)$.
V našem případě je $y_0 = f(1/2) = \frac{-ln3}{2}$.
Protože $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2}$, je $f'(1/2) = \frac{8}{3}$.
Tedy rovnice hledané tečny je

$$y + \frac{ln3}{2} = \frac{8}{3}(x - 1/2)$$

a rovnice normály je

$$y + \frac{ln3}{2} = -\frac{3}{8}(x - 1/2).$$

L'Hospitalovo pravidlo
Příklad: Najděte $lim_{x \to 0} \frac{tgx - x}{x - sinx}$.

L'Hospitalovo pravidlo

Příklad: Najděte $lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-sinx}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\frac{0}{0}$. Všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla jsou splněny. Pomocí něj dostaneme

L'Hospitalovo pravidlo
Příklad: Najděte $lim_{x \to 0} \frac{tgx - x}{x - sinx}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\frac{0}{0}$. Všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla jsou splněny. Pomocí něj dostaneme

$$lim_{x \to 0} \frac{tgx - x}{x - sinx} = lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{cos^2 x} - 1}{1 - cosx} =$$

L'Hospitalovo pravidlo

Příklad: Najděte $lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-sinx}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\frac{0}{0}$. Všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla jsou splněny. Pomocí něj dostaneme

$$lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-sinx} = lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2x}-1}{1-cosx} =$$

$$= lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{1-cosx}\cdot\frac{1}{cos^2x} = lim_{x\to 0}\frac{1+cosx}{cos^2x} = 2.$$

Příklad: Najděte $\lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x$.

Příklad: Najděte $\lim_{x \to 0} x \mathrm{cotg} x$.

Řešení: Limita je typu $0 \cdot \infty$.

Příklad: Najděte $\lim_{x \to 0} x cotg x$.

Řešení: Limita je typu $0 \cdot \infty$. Ale lze psát

$$\lim_{x \to 0} x cotg x = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot cos x}{sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{cos x - x \cdot sin x}{cos x} = 1.$$

Lokální extrémy

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce
$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$

Lokální extrémy

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce
$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

Řešení: Funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ má spojité derivace všech řádů na celé množině $\mathbb{R}$.

Lokální extrémy

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce
$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

Řešení: Funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ má spojité derivace všech řádů na celé množině $\mathbb{R}$. Její derivace je
$y' = 3x^2 - 12x + 9$.

Lokální extrémy

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce
$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

Řešení: Funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ má spojité derivace všech řádů na celé množině $\mathbb{R}$. Její derivace je
$y' = 3x^2 - 12x + 9$.
Tato derivace je rovna nule v bodech $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$.

Lokální extrémy

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce
$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$

Řešení: Funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ má spojité derivace všech řádů na celé množině $\mathbb{R}$. Její derivace je
$y' = 3x^2 - 12x + 9.$
Tato derivace je rovna nule v bodech $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$.
Protože druhá derivace funkce $y'' = 6x - 12$ je v bodě $x_1 = 1$ záporná, má daná funkce v bodě $x_1 = 1$ lokální maximum
$y(1) = 0.$

Lokální extrémy

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce
$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

Řešení: Funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ má spojité derivace všech řádů na celé množině $\mathbb{R}$. Její derivace je
$y' = 3x^2 - 12x + 9$.
Tato derivace je rovna nule v bodech $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$.
Protože druhá derivace funkce $y'' = 6x - 12$ je v bodě $x_1 = 1$ záporná, má daná funkce v bodě $x_1 = 1$ lokální maximum
$y(1) = 0$.
Naopak v bodě $x_2 = 3$ je druhá derivace kladná. Tedy v tomto bodě má funkce lokální lokální minimum $y(3) = -4$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \sqrt{x} ln x$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \sqrt{x} ln x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je interval $(0; +\infty)$. Na tomto intervalu má daná funkce spojité derivace všech řádů.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \sqrt{x} ln x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je interval $(0; +\infty)$. Na tomto intervalu má daná funkce spojité derivace všech řádů.
Její první derivace $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + ln x)$ je rovna nule v bodě $x = e^{-2}$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \sqrt{x} ln x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je interval $(0; +\infty)$. Na tomto intervalu má daná funkce spojité derivace všech řádů.
Její první derivace $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + ln x)$ je rovna nule v bodě $x = e^{-2}$.
Protože na intervalu $(0; e^{-2})$ je derivace záporná, je na tomto intervalu funkce klesající.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \sqrt{x} lnx$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je interval $(0; +\infty)$. Na tomto intervalu má daná funkce spojité derivace všech řádů.
Její první derivace $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + lnx)$ je rovna nule v bodě $x = e^{-2}$.
Protože na intervalu $(0; e^{-2})$ je derivace záporná, je na tomto intervalu funkce klesající.
Naopak na intervalu $(e^{-2}; +\infty)$ je první derivace kladná, funkce tedy je na tomto intervalu rostoucí. Proto má funkce v bodě $x = e^{-2}$ lokální minimum $y = -2e^{-1}$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce
$y = arctgx - \frac{1}{2} ln(1 + x^2)$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce
$y = arctgx - \frac{1}{2} ln(1 + x^2)$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá množina $\mathbb{R}$ a funkce má na této množině spojité derivace všech řádů.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce
$y = arctgx - \frac{1}{2} ln(1 + x^2)$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá množina $\mathbb{R}$ a funkce má na této množině spojité derivace všech řádů.
Její první derivace $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$ je rovna nule v bodě $x = 1$.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce
$y = arctgx - \frac{1}{2} ln(1 + x^2)$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá množina $\mathbb{R}$ a funkce má na této množině spojité derivace všech řádů.
Její první derivace $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$ je rovna nule v bodě $x = 1$.
Protože pro $x < 1$ je první derivace kladná a pro $x > 1$ záporná, má funkce v bodě $x = 1$ lokání maximum, $y(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{ln2}{2}$.

Inflexní body

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = 3x^2 - x^3$.

Inflexní body

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = 3x^2 - x^3$.

Řešení: První dvě derivace funkce y jsou $y' = 6x - 3x^2$ a $y'' = 6 - 6x$.

Inflexní body
Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = 3x^2 - x^3$.

Řešení: První dvě derivace funkce y jsou $y' = 6x - 3x^2$ a $y'' = 6 - 6x$.
Druhá derivace je kladná na intervalu $(-\infty; 1)$ a záporná na intervalu $(1; +\infty)$.

Inflexní body

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = 3x^2 - x^3$.

Řešení: První dvě derivace funkce y jsou $y' = 6x - 3x^2$ a $y'' = 6 - 6x$.

Druhá derivace je kladná na intervalu $(-\infty; 1)$ a záporná na intervalu $(1; +\infty)$.

Proto je na intervalu $(-\infty; 1)$ konvexní a na intervalu $(1; +\infty)$ konkávní. Tedy bod $x = 1$ je jejím inflexním bodem.

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce je celá množina $\mathbb{R}$.

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce je celá množina $\mathbb{R}$.
První dvě derivace jsou $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ a $y''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Příklad: Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = \sqrt{1+x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce je celá množina $\mathbb{R}$.
První dvě derivace jsou $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ a $y''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.
Protože je druhá derivace kladná na celém $\mathbb{R}$, je tato funkce konvexní na celém $\mathbb{R}$.

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je
$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je
$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.
Protože $lim_{x\to 1_+} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = 1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je
$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.
Protože $lim_{x \to 1_+} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = 1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.
Protože $lim_{x \to -1_-} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = -1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je
$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.
Protože $lim_{x \to 1_+} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = 1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.
Protože $lim_{x \to -1_-} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = -1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.
V obou bodech $x = \pm\infty$ platí

$$A = lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x(x^2 - 1)} = 2.$$

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je
$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.
Protože $lim_{x \to 1_+} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = 1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.
Protože $lim_{x \to -1_-} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = -1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.
V obou bodech $x = \pm\infty$ platí

$$A = lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x(x^2 - 1)} = 2.$$

Dále je

$$B = lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - 2x) = lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1.$$

Asymptoty funkce

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1}$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je
$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.
Protože $lim_{x\to 1_+} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = 1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.
Protože $lim_{x\to -1_-} \frac{2x^3+x^2-2x}{x^2-1} = +\infty$, je přímka $x = -1$ asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $f(x)$.
V obou bodech $x = \pm\infty$ platí

$$A = lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x(x^2-1)} = 2.$$

Dále je

$$B = lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x) = lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1.$$

Tedy přímka $y = Ax + B = 2x + 1$ je asymptota se směrnicí ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = \pm\infty$.

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = arctgx + 3x$.

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = arctgx + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa $\mathbb{R}$.

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = arctgx + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa $\mathbb{R}$.
V bodech $x = \pm\infty$ je $A = lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$.

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = arctgx + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa $\mathbb{R}$.
V bodech $x = \pm\infty$ je $A = lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 3$.
Protože

$$B = lim_{x\to+\infty}(f(x) - 3x) = lim_{x\to+\infty}arctgx = \frac{\pi}{2},$$

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = arctgx + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa $\mathbb{R}$.
V bodech $x = \pm\infty$ je $A = lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$.
Protože

$$B = lim_{x \to +\infty}(f(x) - 3x) = lim_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2},$$

je přímka $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = +\infty$.

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = arctgx + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa $\mathbb{R}$.
V bodech $x = \pm\infty$ je $A = lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 3$.
Protože

$$B = lim_{x\to+\infty}(f(x) - 3x) = lim_{x\to+\infty} arctgx = \frac{\pi}{2},$$

je přímka $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = +\infty$.
Protože

$$B = lim_{x\to-\infty}(f(x) - 3x) = lim_{x\to-\infty} arctgx = \frac{-\pi}{2},$$

Příklad: Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = arctgx + 3x$.

Řešení: Definiční obor dané funkce je celá reálná osa $\mathbb{R}$.
V bodech $x = \pm\infty$ je $A = lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 3$.
Protože

$$B = lim_{x\to+\infty}(f(x) - 3x) = lim_{x\to+\infty}arctgx = \frac{\pi}{2},$$

je přímka $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = +\infty$.
Protože

$$B = lim_{x\to-\infty}(f(x) - 3x) = lim_{x\to-\infty}arctgx = \frac{-\pi}{2},$$

je přímka $y = 3x - \frac{\pi}{2}$ asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = -\infty$.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x+1)(x-2)^2$.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x+1)(x-2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina $\mathbb{R}$.
Limity v krajních bodech definičního oboru jsou
$lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ a $lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x+1)(x-2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina $\mathbb{R}$.
Limity v krajních bodech definičního oboru jsou
$lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.Protože
$lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x+1)(x-2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina $\mathbb{R}$. Limity v krajních bodech definičního oboru jsou $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.Protože $lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty. Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x+1)(x-2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina $\mathbb{R}$. Limity v krajních bodech definičního oboru jsou $lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ a $lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.Protože $lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty. Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$. Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x+1)(x-2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina $\mathbb{R}$.
Limity v krajních bodech definičního oboru jsou
$lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.Protože
$lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty.
Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$. Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět.Spočítáme první derivaci

$$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x+1)(x-2) = 3x(x-2).$$

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x+1)(x-2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina $\mathbb{R}$.
Limity v krajních bodech definičního oboru jsou
$lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.Protože
$lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty.
Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$. Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět.Spočítáme první derivaci

$$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x+1)(x-2) = 3x(x-2).$$

$f'(x) = 0$ pro $x = 0$ a $x = 2$. $f'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (2; \infty)$; na těchto intervalech je funkce $f(x)$ rostoucí.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x+1)(x-2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina $\mathbb{R}$. Limity v krajních bodech definičního oboru jsou $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.Protože $lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty. Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$. Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět.Spočítáme první derivaci

$$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x+1)(x-2) = 3x(x-2).$$

$f'(x) = 0$ pro $x = 0$ a $x = 2$. $f'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (2; \infty)$; na těchto intervalech je funkce $f(x)$ rostoucí. $f'(x) < 0$ pro $x \in (0; 2)$; na tomto intervalu je funkce $f(x)$ klesající.

Průběh funkce

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x+1)(x-2)^2$.

Řešení: Definiční obor této funkce je celá množina $\mathbb{R}$. Limity v krajních bodech definičního oboru jsou $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.Protože $lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty. Funkce $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 2$. Funkce je větší než nula na intervalu $(-1; +\infty)$ a menší než nula na intervalu $(-\infty; -1)$. $f(0) = 4$. Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět.Spočítáme první derivaci

$$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x+1)(x-2) = 3x(x-2).$$

$f'(x) = 0$ pro $x = 0$ a $x = 2$. $f'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (2; \infty)$; na těchto intervalech je funkce $f(x)$ rostoucí. $f'(x) < 0$ pro $x \in (0; 2)$; na tomto intervalu je funkce $f(x)$ klesající.V bodě $x = 0$ je lokální maximum $f(0) = 4$ a v bodě $x = 2$ je lokální minimum $f(2) = 0$.

Druhá derivace je

$$f''(x) = 6x - 6,$$

$f''(x) = 0$ pro $x = 1$. $f''(x) > 0$ pro $x \in (1; +\infty)$; v tomto intervalu je funkce $f(x)$ konvexní.

Druhá derivace je

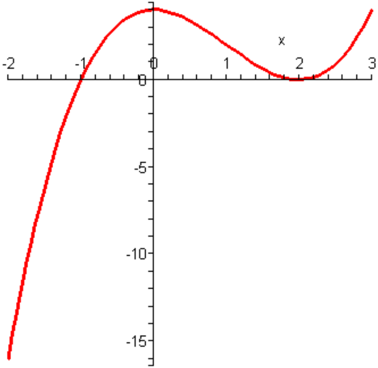
$$f''(x) = 6x - 6,$$

$f''(x) = 0$ pro $x = 1$. $f''(x) > 0$ pro $x \in (1; +\infty)$; v tomto intervalu je funkce $f(x)$ konvexní.$f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty; 1)$; v tomto intervalu je funkce konkávní. Bod $x = 1$ je inflexní bod dané funkce.

Druhá derivace je

$$f''(x) = 6x - 6,$$

$f''(x) = 0$ pro $x = 1$. $f''(x) > 0$ pro $x \in (1; +\infty)$; v tomto intervalu je funkce $f(x)$ konvexní.$f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty; 1)$; v tomto intervalu je funkce konkávní. Bod $x = 1$ je inflexní bod dané funkce.Znázorněme si ještě graf funkce.



Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce je kladná.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce je kladná.
Platí $lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce je kladná.
Platí $lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.
Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce je kladná.
Platí $lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.
Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.
Její derivace je

$$f'(x) = -2x^3 e^{-x^2}.$$

Ta je na intervalu $(0; +\infty)$. záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce je kladná.
Platí $lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.
Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.
Její derivace je

$$f'(x) = -2x^3 e^{-x^2}.$$

Ta je na intervalu $(0; +\infty)$. záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá. Na intervalu $(-\infty; 0)$ je první derivace funkce $f(x)$ kladná. Tedy funkce na tomto intervalu roste.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce je kladná.
Platí $lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.
Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.
Její derivace je

$$f'(x) = -2x^3 e^{-x^2}.$$

Ta je na intervalu $(0; +\infty)$. záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá. Na intervalu $(-\infty; 0)$ je první derivace funkce $f(x)$ kladná. Tedy funkce na tomto intervalu roste.Proto je v bodě $x = 0$ lokální maximum vyšetřované funkce, $f(0) = 1$.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce je kladná.
Platí $lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.
Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.
Její derivace je

$$f'(x) = -2x^3 e^{-x^2}.$$

Ta je na intervalu $(0; +\infty)$. záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá. Na intervalu $(-\infty; 0)$ je první derivace funkce $f(x)$ kladná. Tedy funkce na tomto intervalu roste.Proto je v bodě $x = 0$ lokální maximum vyšetřované funkce, $f(0) = 1$.
Druhá derivace funkce je

$$f''(x) = 2x^2(2x^2 - 3) \cdot e^{-x^2 \cdot}$$

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce je kladná.
Platí $lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y = 0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = x \pm \infty$.
Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $(0; +\infty)$.
Její derivace je

$$f'(x) = -2x^3 e^{-x^2}.$$

Ta je na intervalu $(0; +\infty)$. záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá. Na intervalu $(-\infty; 0)$ je první derivace funkce $f(x)$ kladná. Tedy funkce na tomto intervalu roste.Proto je v bodě $x = 0$ lokální maximum vyšetřované funkce, $f(0) = 1$.
Druhá derivace funkce je

$$f''(x) = 2x^2(2x^2 - 3) \cdot e^{-x^2 \cdot}$$

Ta je kladná na intervalech $(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}})$ a $(\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty)$. Na těchto intervalech je tedy funkce $f(x)$ konvexní.

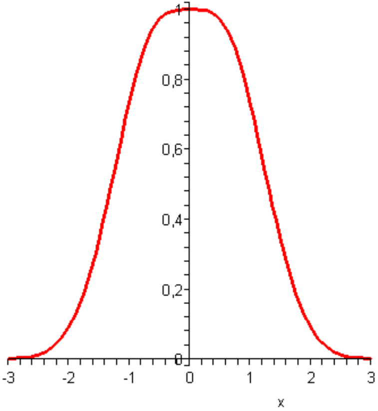
Na intervalech $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0)$ a $(0; \sqrt{\frac{3}{2}})$ je druhá derivace záporná.

Tedy funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}})$.

Na intervalech $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0)$ a $(0; \sqrt{\frac{3}{2}})$ je druhá derivace záporná.

Tedy funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}})$.Body $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ jsou inflexní body dané funkce. Bod $x = 0$ není jejím inflexním bodem.

Na intervalech $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0)$ a $(0; \sqrt{\frac{3}{2}})$ je druhá derivace záporná. Tedy funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}})$.Body $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ jsou inflexní body dané funkce. Bod $x = 0$ není jejím inflexním bodem.Znázorněme si ještě graf funkce.



Obrázek: Průběh funkce $y = f(x)$.

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Řešení: Protože $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$,

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Řešení: Protože $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$,je

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2}+x^{-1/2}) dx = \frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}+c; x \in (0;+\infty).$$

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Řešení: Protože $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$,je

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2} + c; x \in (0; +\infty).$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Řešení: Protože $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$,je

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2}+x^{-1/2}) dx = \frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}+c; x \in (0;+\infty).$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Řešení:
Protože platí $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$,

Neurčitý integrál - přímá integrace

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Řešení: Protože $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$,je

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2}+x^{-1/2}) dx = \frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}+c; x \in (0;+\infty).$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Řešení:
Protože platí $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$, je

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = x - arctgx + c;\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int tg^2 x dx$.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int tg^2 x dx$.

Řešení: Jelikož platí $tg^2 x = \frac{sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} - 1$, je

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int tg^2 x dx$.

Řešení: Jelikož platí $tg^2 x = \frac{sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} - 1$, je

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{1}{cos^2 x} dx - \int dx = tgx - x + c;\ x \neq \frac{2k+1}{2}\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Neurčitý integrál - metoda per partes
Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int lnxdx$.

Neurčitý integrál - metoda per partes

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int lnxdx$.

Řešení: Integrál najdeme integrací per partes pro volbu $u' = 1,\ v = lnx$. Dopočítáme $u = x,\ v' = \frac{1}{x}$ a dostaneme

Neurčitý integrál - metoda per partes
Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int lnxdx$.

Řešení: Integrál najdeme integrací per partes pro volbu $u' = 1, \ v = lnx$. Dopočítáme $u = x, \ v' = \frac{1}{x}$ a dostaneme

$$\int lnxdx = xlnx - \int \frac{x}{x} dx$$

Neurčitý integrál - metoda per partes
Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int lnxdx$.

Řešení: Integrál najdeme integrací per partes pro volbu $u' = 1,\ v = lnx$. Dopočítáme $u = x,\ v' = \frac{1}{x}$ a dostaneme

$$\int lnxdx = xlnx - \int \frac{x}{x}dx$$

$$= xlnx - \int dx = xlnx - x + C = x(lnx - 1) + C;\ x > 0.$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Řešení:
Integrál najdeme integrací per partes pro $v = x^2,\ u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 2x,\ u = e^{-2x}/-2$:

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Řešení:
Integrál najdeme integrací per partes pro $v = x^2,\ u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 2x,\ u = e^{-2x}/-2$:

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx,$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Řešení:
Integrál najdeme integrací per partes pro $v = x^2,\ u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 2x,\ u = e^{-2x}/-2$:

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx,$$

znovu použijeme per partes pro $v = x,\ u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 1,\ u = e^{-2x}/-2$':

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Řešení:
Integrál najdeme integrací per partes pro $v = x^2,\ u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 2x,\ u = e^{-2x}/-2$:

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx,$$

znovu použijeme per partes pro $v = x,\ u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 1,\ u = e^{-2x}/-2$':

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx =$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Řešení:
Integrál najdeme integrací per partes pro $v = x^2,\ u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 2x,\ u = e^{-2x}/-2$:

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx,$$

znovu použijeme per partes pro $v = x,\ u' = e^{-2x}$, tedy $v' = 1,\ u = e^{-2x}/-2$':

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c; x \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Najděte integrál $\int e^{-2x} sin 3x dx$.

Příklad: Najděte integrál $\int e^{-2x} sin3x dx$.

Řešení:
Integrály tohoto typu lze najít dvojí integrací per partes. Pomocí ní získáme vztah

$$\int e^{-2x} sin3x dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} sin3x + \frac{3}{2} \int e^{-2x} cos3x dx =$$

Příklad: Najděte integrál $\int e^{-2x} sin 3x dx$.

Řešení:

Integrály tohoto typu lze najít dvojí integrací per partes. Pomocí ní získáme vztah

$$\int e^{-2x} sin 3x dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} sin 3x + \frac{3}{2} \int e^{-2x} cos 3x dx =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} sin 3x - \frac{3}{4} e^{-2x} cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{-2x} sin 3x dx.$$

Příklad: Najděte integrál $\int e^{-2x} sin3x dx$.

Řešení:
Integrály tohoto typu lze najít dvojí integrací per partes. Pomocí ní získáme vztah

$$\int e^{-2x} sin3x dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} sin3x + \frac{3}{2} \int e^{-2x} cos3x dx =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} sin3x - \frac{3}{4} e^{-2x} cos3x - \frac{9}{4} \int e^{-2x} sin3x dx.$$

To je rovnice, ze které lze vypočítat hledaný integrál. Snadno z ní dostaneme

$$(1 + \frac{9}{4}) \int e^{-2x} sin3x dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} sin3x - \frac{3}{4} e^{-2x} cos3x,$$

Příklad: Najděte integrál $\int e^{-2x} sin3xdx$.

Řešení:
Integrály tohoto typu lze najít dvojí integrací per partes. Pomocí ní získáme vztah

$$\int e^{-2x} sin3xdx = -\frac{1}{2}e^{-2x} sin3x + \frac{3}{2}\int e^{-2x} cos3xdx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x} sin3x - \frac{3}{4}e^{-2x} cos3x - \frac{9}{4}\int e^{-2x} sin3xdx.$$

To je rovnice, ze které lze vypočítat hledaný integrál. Snadno z ní dostaneme

$$(1 + \frac{9}{4})\int e^{-2x} sin3xdx = -\frac{1}{2}e^{-2x} sin3x - \frac{3}{4}e^{-2x} cos3x,$$

tedy $\int e^{-2x} sin3xdx = -\frac{e^{-2x}}{13}(2sin3x + 3cos3x) + C;\ x \in \mathbb{R}$.

Neurčitý integrál - substituční metoda

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

Neurčitý integrál - substituční metoda
Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

Řešení:
Substituci $x = y\sqrt{\frac{2}{3}}$, pro kterou je $dx = \sqrt{\frac{2}{3}}dy$, dostaneme

Neurčitý integrál - substituční metoda

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

Řešení:

Substitucí $x = y\sqrt{\frac{2}{3}}$, pro kterou je $dx = \sqrt{\frac{2}{3}}dy$, dostaneme

$$\int \frac{dx}{2+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dy}{1+y^2} =$$

Neurčitý integrál - substituční metoda

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

Řešení:

Substitucí $x = y\sqrt{\frac{2}{3}}$, pro kterou je $dx = \sqrt{\frac{2}{3}}dy$, dostaneme

$$\int \frac{dx}{2+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \frac{arctg(y)}{\sqrt{6}} + C = \frac{arctg\sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{6}} + C;\ x \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

Řešení:
Protože platí $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$,

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

Řešení:
Protože platí $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$,je

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int (x-1) dx + \int \frac{1}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{1+x} dx,$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

Řešení:
Protože platí $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$,je

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int (x-1) dx + \int \frac{1}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{1+x} dx,$$

jednoduchou substitucí $y = 1 + x;\ dy = dx$ dostaneme

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{y} dy = \frac{x^2}{2} - x + ln|y| + c =$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

Řešení:
Protože platí $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$,je

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int (x-1) dx + \int \frac{1}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{1+x} dx,$$

jednoduchou substitucí $y = 1 + x;\ dy = dx$ dostaneme

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{y} dy = \frac{x^2}{2} - x + ln|y| + c =$$

$$\frac{x^2}{2} - x + ln|1+x| + c;\ x \neq -1.$$

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Řešení: Protože $\frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$,

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Řešení: Protože $\frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$, dostaneme po substituci $e^x = y$, pro kterou je $e^x dx = dy$,

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Řešení: Protože $\frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$, dostaneme po substituci $e^x = y$, pro kterou je $e^x dx = dy$,

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{dy}{y^2+1} = arctg(y)+C = arctg(e^x)+C$$