Neurčitý integrál - racionální lomené funkce

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Neurčitý integrál - racionální lomené funkce

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky.

Neurčitý integrál - racionální lomené funkce

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky.Z rovnosti

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Neurčitý integrál - racionální lomené funkce

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky.Z rovnosti

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

plyne vztah

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Neurčitý integrál - racionální lomené funkce

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky.Z rovnosti

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

plyne vztah

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pro $x = -1$ dostaneme $A = -\frac{1}{2}$,

Neurčitý integrál - racionální lomené funkce

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky.Z rovnosti

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

plyne vztah

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pro $x = -1$ dostaneme $A = -\frac{1}{2}$,pro $x = -2$ dostaneme $B = 2$

Neurčitý integrál - racionální lomené funkce

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky.Z rovnosti

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

plyne vztah

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pro $x = -1$ dostaneme $A = -\frac{1}{2}$,pro $x = -2$ dostaneme $B = 2$ a pro $x = -3$ získáme $C = -\frac{3}{2}$.

Neurčitý integrál - racionální lomené funkce

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky.Z rovnosti

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

plyne vztah

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pro $x = -1$ dostaneme $A = -\frac{1}{2}$,pro $x = -2$ dostaneme $B = 2$ a pro $x = -3$ získáme $C = -\frac{3}{2}$. Tedy

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+3}$$

Neurčitý integrál - racionální lomené funkce

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky.Z rovnosti

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

plyne vztah

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pro $x = -1$ dostaneme $A = -\frac{1}{2}$,pro $x = -2$ dostaneme $B = 2$ a pro $x = -3$ získáme $C = -\frac{3}{2}$. Tedy

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= -\frac{1}{2} ln|x+1| + 2 ln|x+2| - \frac{3}{2} ln|x+3| + C;\ x \neq -1; -2; -3.$$

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky.

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky. Z rovnosti

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

plyne vztah

$$x^2 + 1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1).$$

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky. Z rovnosti

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

plyne vztah

$$x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1).$$

Pro $x = 1$ dostaneme $A = \frac{1}{2}$ a pro $x = -1$ máme $C = -1$.

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky. Z rovnosti

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

plyne vztah

$$x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1).$$

Pro $x=1$ dostaneme $A=\frac{1}{2}$ a pro $x=-1$ máme $C=-1$. Srovnáním koeficientů u x^2 dostaneme $A+B=1$, tj. $B=\frac{1}{2}$. Tedy

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky. Z rovnosti

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

plyne vztah

$$x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1).$$

Pro $x = 1$ dostaneme $A = \frac{1}{2}$ a pro $x = -1$ máme $C = -1$. Srovnáním koeficientů u x^2 dostaneme $A + B = 1$, tj. $B = \frac{1}{2}$. Tedy

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}dx - \int \frac{dx}{(x+1)^2}dx =$$

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

Řešení: Integrand rozložíme na parciální zlomky. Z rovnosti

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

plyne vztah

$$x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1).$$

Pro $x=1$ dostaneme $A = \frac{1}{2}$ a pro $x=-1$ máme $C=-1$.
Srovnáním koeficientů u x^2 dostaneme $A+B=1$, tj. $B=\frac{1}{2}$. Tedy

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}dx - \int \frac{dx}{(x+1)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}ln|x-1| + \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C;\ x \neq \pm 1.$$

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Řešení:
Protože je $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$.

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Řešení:
Protože je $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$. Z tohoto vztahu plyne

$$1 = A(x^2 - x + 1) + Bx(x + 1) + C(x + 1).$$

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Řešení:
Protože je $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$. Z tohoto vztahu plyne

$$1 = A(x^2 - x + 1) + Bx(x+1) + C(x+1).$$

Odtud pro $x = -1$ máme $A = \frac{1}{3}$. Pro $x = 0$ dostaneme $A + C = 1$, tj.$C = \frac{2}{3}$.

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Řešení:
Protože je $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru $\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$. Z tohoto vztahu plyne

$$1=A(x^2-x+1)+Bx(x+1)+C(x+1).$$

Odtud pro $x=-1$ máme $A=\frac{1}{3}$. Pro $x=0$ dostaneme $A+C=1$, tj. $C=\frac{2}{3}$. Srovnáním členů u x^2 dostaneme $A+B=0$, neboli $B=-\frac{1}{3}$.

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Řešení:
Protože je $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$. Z tohoto vztahu plyne

$$1 = A(x^2 - x + 1) + Bx(x+1) + C(x+1).$$

Odtud pro $x = -1$ máme $A = \frac{1}{3}$. Pro $x = 0$ dostaneme $A + C = 1$, tj. $C = \frac{2}{3}$. Srovnáním členů u x^2 dostaneme $A + B = 0$, neboli $B = -\frac{1}{3}$. Tedy

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{(x-2)dx}{x^2 - x + 1}$$

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Řešení:
Protože je $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru $\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$. Z tohoto vztahu plyne

$$1 = A(x^2-x+1)+Bx(x+1)+C(x+1).$$

Odtud pro $x=-1$ máme $A=\frac{1}{3}$. Pro $x=0$ dostaneme $A+C=1$, tj. $C=\frac{2}{3}$. Srovnáním členů u x^2 dostaneme $A+B=0$, neboli $B=-\frac{1}{3}$. Tedy

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{(x-2)dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3} ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4} =$$

Příklad: Najděte integrál $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Řešení:
Protože je $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru $\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$. Z tohoto vztahu plyne

$$1=A(x^2-x+1)+Bx(x+1)+C(x+1).$$

Odtud pro $x=-1$ máme $A=\frac{1}{3}$. Pro $x=0$ dostaneme $A+C=1$, tj. $C=\frac{2}{3}$. Srovnáním členů u x^2 dostaneme $A+B=0$, neboli $B=-\frac{1}{3}$. Tedy

$$\int \frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int \frac{(x-2)dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{3}ln|x+1|-\frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4}=$$

$$=\frac{1}{6}ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;\ x\neq -1.$$

Určitý integrál

Příklad: Najděte integrál $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$.

Určitý integrál

Příklad: Najděte integrál $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$.

Řešení: Daný integrál lze najít substitucí $x^2 = y$.

Určitý integrál

Příklad: Najděte integrál $\int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx$.

Řešení: Daný integrál lze najít substitucí $x^2 = y$. Pak je $2xdx = dy$ a interval $(0;1)$ se prostě zobrazí na interval $(0;1)$.

Určitý integrál

Příklad: Najděte integrál $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$.

Řešení: Daný integrál lze najít substitucí $x^2 = y$. Pak je $2xdx = dy$ a interval $(0;1)$ se prostě zobrazí na interval $(0;1)$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, platí

Určitý integrál

Příklad: Najděte integrál $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$.

Řešení: Daný integrál lze najít substitucí $x^2 = y$. Pak je $2xdx = dy$ a interval $(0;1)$ se prostě zobrazí na interval $(0;1)$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2-y)^{12}dy =$$

Určitý integrál

Příklad: Najděte integrál $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$.

Řešení: Daný integrál lze najít substitucí $x^2 = y$. Pak je $2xdx = dy$ a interval $(0;1)$ se prostě zobrazí na interval $(0;1)$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2-y)^{12}dy =$$

$$= \frac{1}{26}\left[(2-y)^{13}\right]_0^1 = \frac{1-2^{13}}{26}.$$

Příklad: Najděte integrál $\int_1^e (xlnx)^2 dx$.

Příklad: Najděte integrál $\int_1^e (xlnx)^2 dx$.

Řešení: Integrál snadno najdeme dvojí integrací per partes, nejprve zvolíme $u = ln^2 x,\ v' = x^2$. Tedy $u' = \frac{2lnx}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$. Po dosazení

Příklad: Najděte integrál $\int_1^e (xlnx)^2 dx$.

Řešení: Integrál snadno najdeme dvojí integrací per partes, nejprve zvolíme $u = ln^2 x,\ v' = x^2$. Tedy $u' = \frac{2lnx}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$. Po dosazení

$$\int_1^e (xlnx)^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 ln^2 x\right]_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2 lnxdx =$$

Příklad: Najděte integrál $\int_1^e (xlnx)^2 dx$.

Řešení: Integrál snadno najdeme dvojí integrací per partes, nejprve zvolíme $u = ln^2 x,\ v' = x^2$. Tedy $u' = \frac{2lnx}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$. Po dosazení

$$\int_1^e (xlnx)^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 ln^2 x\right]_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2 lnx dx =$$

Znovu provedeme per partes, tentokrát
$u = lnx,\ v' = x^2, u' = \frac{1}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$.

Příklad: Najděte integrál $\int_1^e (x ln x)^2 dx$.

Řešení: Integrál snadno najdeme dvojí integrací per partes, nejprve zvolíme $u = ln^2 x,\ v' = x^2$. Tedy $u' = \frac{2 ln x}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$. Po dosazení

$$\int_1^e (x ln x)^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 ln^2 x\right]_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2 ln x dx =$$

Znovu provedeme per partes, tentokrát
$u = ln x,\ v' = x^2, u' = \frac{1}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$.

$$= \frac{1}{3}(e^3 - 0) - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} x^3 ln x\right]_1^e + \frac{2}{9}\int_1^e x^2 dx =$$

Příklad: Najděte integrál $\int_1^e (xlnx)^2 dx$.

Řešení: Integrál snadno najdeme dvojí integrací per partes, nejprve zvolíme $u = ln^2 x,\ v' = x^2$. Tedy $u' = \frac{2lnx}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$. Po dosazení

$$\int_1^e (xlnx)^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 ln^2 x\right]_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2 lnx dx =$$

Znovu provedeme per partes, tentokrát
$u = lnx,\ v' = x^2, u' = \frac{1}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$.

$$= \frac{1}{3}(e^3 - 0) - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e + \frac{2}{9}\int_1^e x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{9}(e^3 - 0) + \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

Příklad: Najděte integrál $\int_1^e (x ln x)^2 dx$.

Řešení: Integrál snadno najdeme dvojí integrací per partes, nejprve zvolíme $u = ln^2 x,\ v' = x^2$. Tedy $u' = \frac{2lnx}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$. Po dosazení

$$\int_1^e (xlnx)^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 ln^2 x\right]_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2 lnx dx =$$

Znovu provedeme per partes, tentokrát
$u = lnx,\ v' = x^2, u' = \frac{1}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$.

$$= \frac{1}{3}(e^3 - 0) - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e + \frac{2}{9}\int_1^e x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{9}(e^3 - 0) + \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{27}(e^3 - 1) = \frac{5e^3 - 2}{27}.$$

Nevlastní integrál

Příklad: Vypočtěte $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Nevlastní integrál

Příklad: Vypočtěte $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Řešení: Protože jedna mez integrálu je ∞, jedná se o nevlastní Riemannův integrál.

Nevlastní integrál

Příklad: Vypočtěte $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Řešení: Protože jedna mez integrálu je ∞, jedná se o nevlastní Riemannův integrál.Neboť pro $x \in (2; \infty)$ je $x^2 + x - 2 \neq 0$, nemá funkce singulární body. Proto budeme integrál počítat pomocí limity

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{dx}{x^2 + x - 2}.$$

Nevlastní integrál

Příklad: Vypočtěte $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Řešení: Protože jedna mez integrálu je ∞, jedná se o nevlastní Riemannův integrál.Neboť pro $x \in (2;\infty)$ je $x^2+x-2 \neq 0$, nemá funkce singulární body. Proto budeme integrál počítat pomocí limity

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

Primitivní funkci najdeme rozkladem na parciální zlomky. Platí

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

Nevlastní integrál

Příklad: Vypočtěte $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Řešení: Protože jedna mez integrálu je ∞, jedná se o nevlastní Riemannův integrál.Neboť pro $x \in (2;\infty)$ je $x^2+x-2 \neq 0$, nemá funkce singulární body. Proto budeme integrál počítat pomocí limity

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

Primitivní funkci najdeme rozkladem na parciální zlomky. Platí

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

Protože tento integrál je $\frac{1}{3} ln\frac{x-1}{x+2}$, platí

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\left[ln\frac{x-1}{x+2}\right]_2^t - \frac{1}{3}ln\frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{3}ln\frac{1}{4} = \frac{2}{3}ln2.$$

Příklad: Vypočtěte $\int_0^1 lnxdx$.

Příklad: Vypočtěte $\int_0^1 lnx dx$.

Řešení: Protože $\lim_{x\to 0+} lnx = -\infty$, jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Proto jej určíme pomocí limity.

Příklad: Vypočtěte $\int_0^1 lnxdx$.

Řešení: Protože $\lim_{x\to 0+} lnx = -\infty$, jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Proto jej určíme pomocí limity.

$$\int_0^1 lnxdx = \lim_{A\to 0+} \int_A^1 lnxdx = \lim_{A\to 0+} [x(lnx-1)]_A^1 =$$

Integrál jsme určili metodou per partes. Nyní dosadíme meze.

Příklad: Vypočtěte $\int_0^1 lnx dx$.

Řešení: Protože $\lim_{x\to 0+} lnx = -\infty$, jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Proto jej určíme pomocí limity.

$$\int_0^1 lnx dx = \lim_{A\to 0+} \int_A^1 lnx dx = \lim_{A\to 0+} [x(lnx-1)]_A^1 =$$

Integrál jsme určili metodou per partes. Nyní dosadíme meze.

$$= -1 - \lim_{A\to 0+} A(lnA-1) = -1 - \lim_{A\to 0+} \frac{lnA-1}{\frac{1}{A}} =$$

Výraz jsme upravili, abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo.

Příklad: Vypočtěte $\int_0^1 lnx dx$.

Řešení: Protože $\lim_{x \to 0+} lnx = -\infty$, jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Proto jej určíme pomocí limity.

$$\int_0^1 lnx dx = \lim_{A \to 0+} \int_A^1 lnx dx = \lim_{A \to 0+} [x(lnx - 1)]_A^1 =$$

Integrál jsme určili metodou per partes. Nyní dosadíme meze.

$$= -1 - \lim_{A \to 0+} A(lnA - 1) = -1 - \lim_{A \to 0+} \frac{lnA - 1}{\frac{1}{A}} =$$

Výraz jsme upravili, abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$= -1 - \lim_{A \to 0+} \frac{\frac{1}{A}}{-\frac{1}{A^2}} = -1 - \lim_{A \to 0+} (-A) = -1.$$

Funkce více proměnných

Příklad: Najděte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^3+y^2}$.

Funkce více proměnných

Příklad: Najděte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^3+y^2}$.

Řešení: Parciální derivace prvního řádu podle x je

$$f'_x(x,y) = \frac{-3x^2}{\left(x^3+y^2\right)^2},$$

jedná se o derivaci složené funkce, vnitřní složka zderivovaná podle x je $3x^2$.

Funkce více proměnných

Příklad: Najděte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^3+y^2}$.

Řešení: Parciální derivace prvního řádu podle x je

$$f'_x(x,y) = \frac{-3x^2}{\left(x^3+y^2\right)^2},$$

jedná se o derivaci složené funkce, vnitřní složka zderivovaná podle x je $3x^2$.

$$f'_y(x,y) = \frac{-2y}{\left(x^3+y^2\right)^2},$$

vnitřní složka zderivovaná podle y je $2y$.

Parciální derivace druhého řádu určíme podle vzorce pro derivaci podílu.

Parciální derivace druhého řádu určíme podle vzorce pro derivaci podílu.

$$f''_{xx}(x,y) = 18\,\frac{x^4}{(x^3+y^2)^3} - 6\,\frac{x}{(x^3+y^2)^2}$$

Parciální derivace druhého řádu určíme podle vzorce pro derivaci podílu.

$$f''_{xx}(x,y) = 18\,\frac{x^4}{\left(x^3+y^2\right)^3} - 6\,\frac{x}{\left(x^3+y^2\right)^2}$$

$$f''_{xy}(x,y) = 12\,\frac{x^2 y}{\left(x^3+y^2\right)^3}$$

Parciální derivace druhého řádu určíme podle vzorce pro derivaci podílu.

$$f''_{xx}(x,y) = 18\,\frac{x^4}{(x^3+y^2)^3} - 6\,\frac{x}{(x^3+y^2)^2}$$

$$f''_{xy}(x,y) = 12\,\frac{x^2 y}{(x^3+y^2)^3}$$

$$f''_{yy}(x,y) = 8\,\frac{y^2}{(x^3+y^2)^3} - 2\,\left(x^3+y^2\right)^{-2}.$$

Příklad: Najděte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}} \left(x + y^2\right)$.

Příklad: Najděte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

Řešení: Parciální derivace určíme podle pravidla o derivaci součinu
$f_x'(x,y) = \frac{1}{2}\, e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right) + e^{\frac{x}{2}}$

Příklad: Najděte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}} \left(x + y^2\right)$.

Řešení: Parciální derivace určíme podle pravidla o derivaci součinu
$f'_x(x, y) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \left(x + y^2\right) + e^{\frac{x}{2}}$
$f'_y(x, y) = 2 e^{\frac{x}{2}} y.$

Příklad: Najděte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right)$.

Řešení: Parciální derivace určíme podle pravidla o derivaci součinu
$f'_x(x,y) = \frac{1}{2}\, e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right) + e^{\frac{x}{2}}$
$f'_y(x,y) = 2\, e^{\frac{x}{2}} y.$

Obdobně parciální derivace druhého řádu.
$f'_{xx}(x,y) = \frac{1}{4}\, e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right) + e^{\frac{x}{2}}$

Příklad: Najděte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right).$

Řešení: Parciální derivace určíme podle pravidla o derivaci součinu
$f'_x(x,y) = \frac{1}{2}\, e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right) + e^{\frac{x}{2}}$
$f'_y(x,y) = 2\, e^{\frac{x}{2}} y.$

Obdobně parciální derivace druhého řádu.
$f'_{xx}(x,y) = \frac{1}{4}\, e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right) + e^{\frac{x}{2}}$
$f'_{xy}(x,y) = e^{\frac{x}{2}} y$

Příklad: Najděte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

Řešení: Parciální derivace určíme podle pravidla o derivaci součinu
$f'_x(x,y) = \frac{1}{2}\, e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right) + e^{\frac{x}{2}}$
$f'_y(x,y) = 2\, e^{\frac{x}{2}} y.$

Obdobně parciální derivace druhého řádu.
$f'_{xx}(x,y) = \frac{1}{4}\, e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right) + e^{\frac{x}{2}}$
$f'_{xy}(x,y) = e^{\frac{x}{2}} y$
$f'_{yy}(x,y) = 2e^{\frac{x}{2}}.$

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce
$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 2$.

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce
$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 2$.

Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 6y; \;\; f'_y(x, y) = 2y - 6x.$$

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce
$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 2.$

Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 6y;\ f'_y(x,y) = 2y - 6x.$$

Řešením soustavy rovnic

$$f'_x(x,y) = 0$$

$$f'_y(x,y) = 0$$

dostaneme $y = 3x;\ 3x^2 - 18x = 0$, tedy nalezneme dva stacionární body, $[0,0]$ a $[6,18]$.

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce
$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 2.$

Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 6y;\ \ f'_y(x, y) = 2y - 6x.$$

Řešením soustavy rovnic

$$f'_x(x, y) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 0$$

dostaneme $y = 3x;\ \ 3x^2 - 18x = 0$, tedy nalezneme dva stacionární body, $[0, 0]$ a $[6, 18]$.
Matice derivací druhého řádu je $\begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$.

V bodě $[0,0]$ je determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -36 < 0,$$

tedy extrém zde nenastane.

V bodě $[0,0]$ je determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -36 < 0,$$

tedy extrém zde nenastane.

V bodě $[6,18]$ je determinant

$$\begin{vmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 36 > 0,$$

tedy v tomto bodě nastává extrém, a protože $f''_{xx}(6,18) = 36 > 0$, jde o lokální minimum.

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce
$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce
$f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou

$$f'_x(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1; \; f'_y(x,y) = \sqrt{x} - 2\,y + 6.$$

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce
$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou

$$f'_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1; \; f'_y(x, y) = \sqrt{x} - 2\,y + 6.$$

Derivace podle x bude rovna nule, pokud $y = 2\sqrt{x}$, z derivace podle y potom $3\sqrt{x} = 6$. Tedy dostaneme stacionární bod $[4, 4]$.

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce
$f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou

$$f'_x(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1;\ f'_y(x,y) = \sqrt{x} - 2\,y + 6.$$

Derivace podle x bude rovna nule, pokud $y = 2\sqrt{x}$, z derivace podle y potom $3\sqrt{x} = 6$. Tedy dostaneme stacionární bod $[4,4]$.
Derivace druhého řádu jsou

$$f'_{xx}(x,y) = -\frac{y}{4x^{3/2}},\ f'_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f'_{yy}(x,y) = -2.$$

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce
$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou

$$f'_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1;\ f'_y(x, y) = \sqrt{x} - 2\,y + 6.$$

Derivace podle x bude rovna nule, pokud $y = 2\sqrt{x}$, z derivace podle y potom $3\sqrt{x} = 6$. Tedy dostaneme stacionární bod $[4, 4]$. Derivace druhého řádu jsou

$$f'_{xx}(x, y) = -\frac{y}{4x^{3/2}},\ f'_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f'_{yy}(x, y) = -2.$$

Determinant matice druhých derivací v bodě $[4, 4]$ je

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -2 \end{vmatrix} > 0,$$

takže funkce má v bodě $[4, 4]$ extrém

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce
$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou

$$f'_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1; \; f'_y(x, y) = \sqrt{x} - 2\,y + 6.$$

Derivace podle x bude rovna nule, pokud $y = 2\sqrt{x}$, z derivace podle y potom $3\sqrt{x} = 6$. Tedy dostaneme stacionární bod $[4, 4]$. Derivace druhého řádu jsou

$$f'_{xx}(x, y) = -\frac{y}{4x^{3/2}}, \; f'_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \; f'_{yy}(x, y) = -2.$$

Determinant matice druhých derivací v bodě $[4, 4]$ je

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -2 \end{vmatrix} > 0,$$

takže funkce má v bodě $[4, 4]$ extrém a protože $f'_{xx}(4, 4) < 0$, jde o lokální maximum.