

## Lineární proces [linear process]

Teoretickým základem modelů tzv. **Boxovy-Jenkinsovy metodologie** je **lineární proces**, který je definován jako

$$(1) \quad y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots) \varepsilon_t = \psi(B) \cdot \varepsilon_t,$$

kde  $\{\varepsilon_t\}$  je tzv. **bílý šum [white noise]** [= posloupnost nekorelovaných, stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konstantním konečným rozptylem  $\sigma^2 > 0$ ] a  $B$  je operátor časového posunu.

Dále se předpokládá, že mocnná řada  $\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j$  proměnné  $z$  konverguje

pro  $|z| \leq 1$  (tj. uvnitř a na jednotkovém kruhu v komplexní rovině).

Za tohoto předpokladu lze ukázat, že nekonečné řady náhodných veličin (1) pro jednotlivá  $t$  **konvergují podle kvadratického středu<sup>1</sup>**, přičemž limitní hodnoty  $\{y_t\}$  tvoří stacionární posloupnost s nulovou střední hodnotou  $E(y_t) = 0$

Jiné vyjádření lineárního procesu (1), které je užitečné např. při konstrukci předpovědí, je možné v případě, že tento **proces je invertibilní** a lze ho zapsat jako

$$(2) \quad y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \pi_3 y_{t-3} + \dots + \varepsilon_t \quad \text{neboli}$$

$$(2A) \quad \varepsilon_t = y_t - \pi_1 y_{t-1} - \pi_2 y_{t-2} - \pi_3 y_{t-3} - \dots = \pi(B) \cdot y_t,$$

Přitom **postačující podmínkou invertibility** je předpoklad analogický předpokladu (2), že (3) mocnná řada  $\pi(z)$  konverguje pro  $|z| \leq 1$ , tj. uvnitř a na jednotkovém kruhu v komplexní rovině.

**Poznámka1** Existuje řada důvodů, proč modely postavené na principu lineárního procesu jsou vhodné pro modelování reality. Necht' pro stacionární proces  $\{y_t\}$  s nulovou střední hodnotou předpovídáme hodnotu  $\{y_t\}$  na základě znalosti minulých hodnot  $Y_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ . Optimální předpovědi ve smyslu minimální chyby **MSE** je pak  $E\{y_{t-1} | Y_{t-1}\}$ , přičemž chyba této předpovědi je

$$(4) \quad e_t = y_t - E(y_t | Y_{t-1})$$

Má vlastnosti bílého šumu a označuje se jako **inovace [innovation]**. Označení je vcelku logické, protože inovační proces  $\{e_t\}$  odpovídá nepredikovatelnému pohybu v hodnotách  $\{y_t\}$ . Jestliže je navíc proces  $\{y_t\}$  normálně rozdělen, pak podmíněná střední hodnota  $E(y_t | Y_{t-1})$  má tvar lineární kombinace hodnot  $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$  a vztah (4) můžeme přepsat jako

$$(5) \quad e_t = y_t - \pi_1 y_{t-1} - \pi_2 y_{t-2} - \dots,$$

což je právě invertovaný tvar (2) lineárního procesu.

<sup>1</sup> Řekneme, že posloupnost náhodných veličin  $\{X_t\}$  konverguje k náhodné veličině  $X$  podle středu (je **cauchyovská** podle středu), jestliže  $\lim_{t \rightarrow \infty} E|X_t - X| = 0$ , resp.  $\lim_{s, t \rightarrow \infty} E|X_t - X_s| = 0$ .

**Poznámka2** Protože platí  $\varepsilon_t = \pi(B).y_t = \pi(B).\psi(B)\varepsilon_t$ , musí zřejmě platit

$$(6) \quad \pi(B).\psi(B) = 1$$

$$(6A) \quad \psi_1 - \pi_1 = 0, \quad \psi_2 - \psi_1\pi_1 - \pi_2 = 0, \quad \psi_3 - \psi_2\pi_1 - \psi_1\pi_2 - \pi_3 = 0 \text{ atd.}$$

Tyto vztahy lze použít pro převod parametrů  $\{\psi_j\}$  na parametry  $\{\pi_j\}$  a naopak. Formálně lze také uplatnit zápis

$$(7) \quad \pi(B) = \psi(B)^{-1}.$$

**Proces klouzavých součtů MA [moving average process]<sup>2</sup>**

**Proces klouzavých součtů řádu  $q$**  se značí  $MA(q)$  má tvar

$$(11) \quad y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q} = \theta(B).\varepsilon_t$$

kde  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  jsou parametry a  $\theta(B) = 1 + \theta_1B + \dots + \theta_qB^q$  je tzv. **operátor klouzavých součtů**. Proces  $MA(q)$  tedy zřejmě vzniká useknutím lineárního procesu (1) v bodě, který odpovídá zpoždění  $q$ .

**Proces  $MA(q)$  je vždy stacionární**, má nulovou střední hodnotu a rozptyl o velikosti

$$(12) \quad \sigma_y^2 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma^2 \text{ a má}$$

**autokorelační funkci**

$$(13) \quad \rho_k = \frac{\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} \text{ pro } k = 1, 2, \dots, q$$

$$\rho_k = 0 \text{ pro } k > q$$

Autokorelační funkce má tedy bod useknutí  $k_0$  roven řádu modelu  $q$ .

ověření:

$$\rho_1 = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2 y_t \cdot \sigma^2 y_{t-1}}} = \frac{\text{cov}(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma^2 (1 + \theta_1^2)\sigma^2 (1 + \theta_1^2)}} =$$

$$\frac{\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) + \theta_1 \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) + \theta_1 \text{var}(\varepsilon_{t-1}) + \theta_1^2 \text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma^4 (1 + \theta_1^2)^2}} = \frac{\theta_1 \sigma^2}{\sigma^2 (1 + \theta_1^2)} = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

**Parciální autokorelační funkce  $\rho_{kk}$**  procesu  $MA(q)$  nemá bod useknutí, ale je omezena lineární kombinací geometricky klesajících posloupností a sinusoid s geometricky klesajícími amplitudami.

Proces  $MA(q)$  je invertibilní, jestliže všechny kořeny  $z_1, z_2, \dots, z_q$  polynomu  $\theta(z)$  leží **vně** jednotkového kruhu v komplexní rovině (tj.  $|z_1| > 1, |z_2| > 1, \dots, |z_q| > 1$ ), neboť potom je splněn předpoklad (3).

<sup>2</sup> **MA proces** nemá žádnou přímou souvislost s dříve popsanou **metodou klouzavých průměrů** užívanou pro eliminaci trendu časové řady.

## Proces $MA(1)$ - proces klouzavých součtů 1. řádu

$$(14) \quad y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

má **autokorelační funkci**

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}, \quad \rho_k = 0 \quad \text{pro } k > 1$$

s bodem useknutí  $k_0 = 1$ .

ověření: vyjdeme z definice (6) obecného AR-procesu

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\sigma_y^2} = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\text{var } y_t} \sqrt{\text{var } y_{t-k}}} = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-k})}{\sigma_y \cdot \sigma_{y-k}} \quad \text{a vypočítáme}$$

$$\rho_1 = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2 y_t \cdot \sigma^2 y_{t-1}}} = \frac{\text{cov}(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)}} =$$

$$\frac{\text{cov}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + \theta_1 \text{cov}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + \theta_1 \text{var}(\varepsilon_{t-1}) + \theta_1^2 \text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4 (1 + \theta_1^2)^2}} = \frac{\theta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)} = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

protože ze čtyř členů v čitateli je jen jeden nenulový a protože podle (14) dále platí

$$\text{var } y_t = \sigma_{\varepsilon_t}^2 + \theta_1^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_{t-1}}^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)$$

$$\text{var } y_{t-1} = \sigma_{\varepsilon_{t-1}}^2 + \theta_1^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_{t-2}}^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)$$

(Při odvozování respektujeme pravidlo nekorelovanosti náhodných složek  $\varepsilon_t, \varepsilon_s$  pro  $t \neq s$ .)

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\sigma^2 y_t \cdot \sigma^2 y_{t-k}}} = \frac{\text{cov}(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)}} =$$

$$\frac{\text{cov}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) + \theta_1 \text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k}) + \theta_1 \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k-1}) + \theta_1^2 \text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k-1})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4 (1 + \theta_1^2)^2}} = 0$$

protože při  $k \geq 2$  se ve jmenovateli neobjeví žádné dvě složky  $\varepsilon_s, \varepsilon_t$  se stejným indexem.  $\square$ .

Jeho **parciální autokorelační funkce**  $\rho_{kk}$  má tvar (bez bodu useknutí):

$$(15) \quad \rho_{kk} = \frac{(-1)^k \theta_1^k (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2k+2}} \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots$$

Takže je v případě **invertibility** procesu opravdu geometricky klesající posloupnost

$$(16) \quad |\rho_{kk}| = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

**Podmínka invertibility** zde má totiž velmi jednoduchý tvar  $|\theta_1| < 1$ . Protože

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}, \quad \text{musí pro invertibilní } MA(1) \text{ proces být } |\rho_1| = \left| \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} \right| < 0,5. \quad \text{Tato}$$

nerovnost platí dokonce pro všechna  $|\theta_1| \neq 1$ .

MA(1) - polynom má tvar  $\theta(B) = 1 + \theta_1 B$ , tedy  $\theta(z) = 1 + \theta_1 z$ , po anulování  $\theta_1 z = -1$ , jediný (a to reálný) kořen MA(1)-polynomu je tedy roven  $z = -1/\theta_1$ . ( $\theta_1$  může být přirozeně také záporné.)

Má-li kořen tohoto polynomu (pro invertibilitu) ležet vně jednotkového kruhu, musí platit buď

(P1)  $z = -1/\theta_1 < -1$  nebo (P2)  $z = -1/\theta_1 > 1$

\* Podmínka (P1) může být splněna jen při kladném  $\theta_1$  a při splnění  $\theta_1 < 1$  tj.  $0 < \theta_1 < 1$

\* Podmínka (P2) může být splněna jen při záporném  $\theta_1$  a při splnění  $\theta_1 > -1$  tj.  $-1 < \theta_1 < 0$

Obě eventuality pokrývá souhrnná podmínka  $|\theta_1| < 1$ .

### Proces MA(2) - proces klouzavých součtů 2. řádu

(17)  $y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$

má autokorelační funkci

(18) 
$$\rho_k = \frac{\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \text{ pro } k = 1$$

$$= \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \text{ pro } k = 2$$

$$= 0 \text{ pro } k > 2$$
 s bodem useknutí  $k_0 = 2$ .

ověření:

$$\text{var } y_t = \sigma_{\varepsilon_t}^2 + \theta_1^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_{t-1}}^2 + \theta_2^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_{t-2}}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\text{var } y_{t-1} = \sigma_{\varepsilon_{t-1}}^2 + \theta_1^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_{t-2}}^2 + \theta_2^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_{t-3}}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\text{var } y_{t-2} = \sigma_{\varepsilon_{t-2}}^2 + \theta_1^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_{t-3}}^2 + \theta_2^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_{t-4}}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\rho_1 = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\sigma_{y_t}^2 \cdot \sigma_{y_{t-1}}^2}} = \frac{\text{cov}(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \theta_2 \varepsilon_{t-3})}{\sqrt{\sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}} =$$

$$\frac{\theta_1 \text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \theta_1 \theta_2 \text{cov}(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_{\varepsilon}^4 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)^2}} = \frac{\theta_1 \sigma_{\varepsilon}^2 + \theta_1 \cdot \theta_2 \sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)} = \frac{\theta_1 + \theta_1 \cdot \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-2})}{\sqrt{\sigma_{y_t}^2 \cdot \sigma_{y_{t-2}}^2}} = \frac{\text{cov}(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \theta_2 \varepsilon_{t-4})}{\sqrt{\sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}} =$$

$$\frac{\theta_2 \text{cov}(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_{\varepsilon}^4 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)^2}} = \frac{\theta_2 \sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)} = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\sigma_{y_t}^2 \cdot \sigma_{y_{t-k}}^2}} = \frac{\text{cov}(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-k-2})}{\sqrt{\sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \theta_1^2) \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \theta_1^2)}} =$$

$$\frac{0}{\sqrt{\sigma_{\varepsilon}^4 (1 + \theta_1^2)^2}} = 0$$

protože při  $k \geq 3$  s čitateli výrazu pro  $\rho_k$  neobjeví žádné dvě složky  $\varepsilon_s, \varepsilon_t$  se stejným indexem.

Při odvozování respektujeme pravidlo nekorelovanosti náhodných složek  $\varepsilon_t, \varepsilon_s$  pro  $t \neq s$ . □

**Podmínka invertibility (2) má pro proces  $MA(2)$  tvar**

$$(19) \quad \theta_1 + \theta_2 > -1, \quad \theta_2 - \theta_1 > -1, \quad -1 < \theta_2 < 1,$$

takže oblast invertibility procesu  $MA(2)$  v rovině s vodorovnou osou pro hodnoty  $\theta_1$  a se svislou osou pro hodnoty  $\theta_2$  vyplní vnitřek trojúhelníka s vrcholy  $(-2,1), (0,-1)$  a  $(2,1)$ .

**Důkaz:**  $MA(2)$ -polynom má tvar  $\phi(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2$ , tedy  $\phi(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2$ , po anulování  $0 = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2$  neboli  $\theta_2 z^2 + \theta_1 z + 1 = 0$ .

Kořeny AR (2)-polynomu získáme jako řešení této kvadratické rovnice s podmínkou  $|z_1|, |z_2| > 1$  (pro reálný i komplexní případ).

**Řešení této kvadratické rovnice je** 
$$z_{1,2} = \frac{-\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}.$$

**a) Jsou-li kořeny reálné, různé, pak musí být splněny podmínky**

(A)  $\theta_1^2 - 4\theta_2 > 0$ , tedy  $\theta_1^2 > 4\theta_2$  a současně (B)  $\left| \frac{-\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} \right| > 1$ , tedy

(B1)  $\left| \frac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} \right| > 1$  a také (B2)  $\left| \frac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} \right| > 1$

**Pokud je  $\theta_2 < 0$ , pak je podmínka (A) splněna vždy.**

Kořen  $z_1 = \frac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$  je záporný, protože (při záporném jmenovateli) má kladný čítec.

Kořen  $z_2 = \frac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$  je kladný, neboť (při záporném jmenovateli) má záporný čítec (bez ohledu

na znaménko  $\theta_1$  odečítáme kladnou odmocninu, jejíž absolutní hodnota je při  $\theta_2 < 0$  větší než absolutní hodnota  $-\theta_1$ .)

Podmínka (B1) má zde tvar  $\frac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} < -1$  tj.  $-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} > -2\theta_2$

tj.  $\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} > -2\theta_2 + \theta_1$ , tj.  $\theta_1^2 - 4\theta_2 > 4\theta_2^2 + \theta_1^2 - 4\theta_2\theta_1$  tj.  $-4\theta_2 > 4\theta_2^2 - 4\theta_2\theta_1$   
 tj.  $0 > \theta_2^2 - \theta_2\theta_1 + \theta_2$  tj.  $0 > \theta_2(\theta_2 - \theta_1 + 1)$  tj.  $0 < \theta_2 - \theta_1 + 1$  tj.  $-1 < \theta_2 - \theta_1$

Podmínka (B2) má zde tvar  $\frac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} > 1$  tj.  $-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} < 2\theta_2$

Tj.  $-\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} < 2\theta_2 + \theta_1$  tj.  $\theta_1^2 - 4\theta_2 > 4\theta_2^2 + \theta_1^2 + 4\theta_2\theta_1$  tj.  $-4\theta_2 > 4\theta_2^2 + 4\theta_2\theta_1$   
 tj.  $0 > \theta_2^2 + \theta_2\theta_1 + \theta_2$ , tj.  $0 > \theta_2(\theta_2 + \theta_1 + 1)$  tj.  $0 < \theta_2 + \theta_1 + 1$   $-1 < \theta_2 + \theta_1$ .

Dohromady to pro vztahy obou parametrů znamená tyto podmínky:

(\*)  $\theta_2 - 1 < \theta_1 < \theta_2 + 1$

(\*\*)  $\theta_1 - 1 < \theta_2$  a současně  $-\theta_1 - 1 < \theta_2$

Protože je  $\theta_2 < 0$ , musí být pravá strana (\*) menší než 1, z čehož plyne  $\theta_1 < 1$   
 Protože je  $\theta_2 < 0$ , musí být levá strana (\*) větší než -1, z čehož plyne  $\theta_1 > -1$

**Řešením je tedy oblast tvořící trojúhelník s body  $A=[-1,0]$ ,  $B=[1,0]$  a  $C=[0,-1]$**

Pokud je  $\theta_2 > 0$ , pak podmínka  $\theta_1^2 > 4\theta_2$  představuje skutečné omezení.

Znaménko prvního kořene  $z_1 = \frac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$  závisí na znaménku  $\theta_1$ :

Pokud  $\theta_1 > 0$ , pak je čítec  $z_1$  záporný (kladný obsah odmocniny je v absolutní hodnotě menší než  $\theta_1$ ), kořen  $z_1$  je záporný

Pokud  $\theta_1 < 0$  pak je čítec  $z_1$  zřejmě kladný (kladné jsou oba sčítance součtu), kořen je kladný

Znaménko druhého kořene  $z_2 = \frac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$  rovněž závisí na znaménku  $\theta_1$ :

Pokud  $\theta_1 > 0$  pak je čítec  $z_2$  záporný (jmenovatel kladný), kořen  $z_2$  je tedy záporný

Pokud  $\theta_1 < 0$  pak je čítec  $z_2$  kladný (jmenovatel kladný), kořen  $z_2$  je tedy kladný.

Pokud je tedy  $\theta_1 > 0$ , pak jsou oba kořeny záporné a musí platit současně:

$$z_1 = \frac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} < -1$$

$$z_2 = \frac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} < -1$$

$$\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} < -2\theta_2 + \theta_1$$

$$-\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} < -2\theta_2 + \theta_1$$

Dále jen pokud je  $-2\theta_2 + \theta_1 > 0$ , tj.  $\theta_1 > 2\theta_2 > 0$ , jinak první nerovnost nemůže platit nikdy

$$\theta_1^2 - 4\theta_2 < 4\theta_2^2 + \theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2$$

$$\theta_1^2 - 4\theta_2 < 4\theta_2^2 + \theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2$$

$$-\theta_2 < \theta_2^2 - \theta_1\theta_2$$

$$-\theta_2 < \theta_2^2 - \theta_1\theta_2$$

$$-1 < \theta_2 - \theta_1$$

$$-1 < \theta_2 - \theta_1$$

Potenciálním řešením je množina  $2\theta_2 < \theta_1 < \theta_2 + 1$  při podmínkách  $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \theta_2 < \left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2$

Pokud je naopak  $\theta_1 < 0$ , pak jsou oba kořeny kladné a musí platit současně:

Potenciálním řešením je množina  $2\theta_2 < \theta_1 < \theta_2 + 1$  při podmínkách  $\theta_1 < 0, \theta_2 > 0, \theta_2 < \left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2$

Všem vyžadovaným restrikcím vyhovující řešení ale nemůže existovat, protože vzhledem k podmínkám  $\theta_1 < 0, \theta_2 > 0$  nemůže platit  $2\theta_2 < \theta_1$

**b) Jsou-li kořeny komplexně sdružené pak musí být splněny podmínky**

(A\*)  $\theta_1^2 - 4\theta_2 < 0$ , tedy  $\theta_1^2 < 4\theta_2$  tj.  $\theta_1 < 2\sqrt{\theta_2}$  a současně  $\left| \frac{-\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} \right| > 1$

Platí-li  $\theta_2 < 0$ , není podmínka (A\*) splněna nikdy (a tedy kořeny komplexně sdružené být nemohou)

Pro případné komplexně sdružené kořeny tedy musí platit  $\theta_2 > 0$ .

Podmínka  $\theta_1^2 > 4\theta_2$  představuje zde relevantní omezení.

Kořeny mají tedy tvar

$$z_1 = \frac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} = \frac{-\theta_1}{2\theta_2} + i \cdot \frac{\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$$

$$z_2 = \frac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} = \frac{-\theta_1}{2\theta_2} - i \cdot \frac{\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$$

Absolutní hodnoty obou komplexně sdružených kořenů spočteme jako

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{-\theta_1}{2\theta_2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\theta_1^2}{4\theta_2^2} + \frac{\theta_1^2 - 4\theta_2}{4\theta_2^2}} = \sqrt{\frac{2\theta_1^2 - 4\theta_2}{4\theta_2^2}} = \frac{1}{2\theta_2} \sqrt{2\theta_1^2 - 4\theta_2}$$

Podmínka představující požadavek, aby oba ležely vně jednotkového kruhu, je dána nerovností

$$\frac{1}{2\theta_2} \sqrt{2\theta_1^2 - 4\theta_2} > 1, \text{ neboli při kladném } \theta_2 > 0$$

$$\sqrt{2\theta_1^2 - 4\theta_2} > 2\theta_2 \quad \text{tj.} \quad 2\theta_1^2 - 4\theta_2 > 4\theta_2^2 \quad \text{tj.} \quad \theta_1^2 - 2\theta_2 > 2\theta_2^2 \quad \text{tj.} \quad \theta_1^2 > 2(\theta_2^2 + \theta_2)$$

$$|\theta_1| > \sqrt{2\theta_2(\theta_2 + 1)}.$$

Takže obor komplexně sdružených kořenů je dán oborem kladných parametrů  $\theta_1, \theta_2 > 0$

splňujících složené podmínky  $\sqrt{2\theta_2(\theta_2 + 1)} < |\theta_1| < 2\sqrt{\theta_2}$ .

Omezení vyplývající z toho (aby pravá strana intervalu přípustných hodnot musí být větší než levá)

$$\sqrt{2\theta_2(\theta_2 + 1)} < 2\sqrt{\theta_2} \quad 2\theta_2(\theta_2 + 1) < 4\theta_2 \quad 2\theta_2^2 < 2\theta_2, \text{ tedy } 0 < \theta_2 < 1.$$

Z omezení  $0 < \theta_2 < 1$  a  $|\theta_1| < 2\sqrt{\theta_2}$  plyne, že  $|\theta_1| < 2$

**Řešením je tedy oblast tvořící lichoběžník s body A = [-1,0], B = [1,0], D = [2,1], E = [-2,1].**

**c) Je-li kořen reálný dvojnásobný, pak musí být diskriminant nulový, tj.  $\theta_1^2 - 4\theta_2 = 0$ , neboli**

$\theta_1^2 = 4\theta_2$ , čili  $\theta_1 = 2\sqrt{\theta_2}$ , což mj. implikuje, že  $\theta_2 > 0$  V tomto případě je kořen roven

$$z = (z_1 = z_2) = \frac{-\theta_1}{2\theta_2}, \text{ tedy s respektováním podmínky } \theta_1^2 = 4\theta_2 \text{ máme } z = \frac{-2\theta_1}{\theta_1^2} = \frac{-2}{\theta_1}.$$

Pokud  $\theta_1 > 0$ , je kořen  $z = \frac{-2}{\theta_1}$  záporný a podmínka invertibility zní  $z = \frac{-2}{\theta_1} < -1$ . Odtud máme

$-2 < -\theta_1$ , neboli  $2 > \theta_1$ , tedy  $0 < \theta_1 < 2$  (a k němu příslušný  $\theta_2$  musí být v rozmezí  $\theta_2 \in (0,1)$ )

Pokud naopak  $\theta_1 < 0$ , je kořen  $z = \frac{-2}{\theta_1}$  kladný a podmínka invertibility zní  $z = \frac{-2}{\theta_1} > 1$ . Odtud

plyne  $-2 < \theta_1$ , tedy  $-2 < \theta_1 < 0$  (a k němu příslušný  $\theta_2$  musí ležet v rozmezí  $\theta_2 \in (0,1)$ ).

Je třeba si ale uvědomit, že v těchto případech by byl proces  $MA(2)$  určen vlastně jen jedním

parametrem, protože oba jsou pevně svázané vztahem  $\theta_1^2 = 4\theta_2$ .

## Autoregresní proces AR [autoregressive process]

obecný autoregresní proces řádu  $p$  se značí  $AR(p)$  má tvar

$$(21) \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t = \phi(B) \cdot y_t + \varepsilon_t \text{ neboli}$$

$$(21A) \quad y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots - \phi_p y_{t-p} = \phi(B) \cdot y_t = \varepsilon_t, \text{ kde}$$

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  jsou parametry a  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B + \dots - \phi_p B^p$  je tzv. **autoregresní operátor**.

Proces  $AR(p)$  zřejmě vzniká useknutím lineárního procesu v bodě, který odpovídá velikosti zpoždění  $p$ .

Proces  $AR(p)$  je stacionární, jestliže všechny kořeny  $z_1, z_2, \dots, z_p$  polynomu  $\phi(z)$

leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině (tj. pro všechna  $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_p| > 1$ ),

protože pak je splněn předpoklad (3). Proces má v tom případě nulovou střední hodnotu a jeho **rozptyl je roven**

$$(22) \quad \sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \dots - \phi_p \rho_p}.$$

ověření: Definiční vyjádření procesu (21) vynásobíme  $y_t$ , a uplatníme střední hodnotu:

$$y_t \cdot y_t = \phi_1 y_t \cdot y_{t-1} + \phi_2 y_t \cdot y_{t-2} + \dots + \phi_p y_t \cdot y_{t-p} + y_t \cdot \varepsilon_t$$

$$(23) \quad E y_t \cdot y_t = \phi_1 E y_t \cdot y_{t-1} + \phi_2 E y_t \cdot y_{t-2} + \dots + \phi_p E y_t \cdot y_{t-p} + E y_t \cdot \varepsilon_t.$$

Vztah (23) podělíme rozptylem veličiny  $y_t$ . Dostaneme:

$$\frac{E(y_t^2)}{\sigma_y^2} = \phi_1 \frac{E(y_t \cdot y_{t-1})}{\sigma_y^2} + \phi_2 \frac{E(y_t \cdot y_{t-2})}{\sigma_y^2} + \dots + \phi_p \frac{E(y_t \cdot y_{t-p})}{\sigma_y^2} + \frac{E(y_t \cdot \varepsilon_t)}{\sigma_y^2}.$$

Zřejmě máme  $E(y_t^2) = \sigma_y^2$  a  $\frac{E(y_t \cdot y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \rho_k$ , takže dostaneme

$$1 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \dots + \phi_p \rho_p + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}, \text{ resp. } 1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \dots - \phi_p \rho_p = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$

a po vynásobení obou stran strany rozptylem  $y_t$

$$\sigma_y^2 \cdot (1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \dots - \phi_p \rho_p) = \sigma_\varepsilon^2, \text{ z čehož plyne (22).} \quad \square.$$

a jeho **autokorelační funkce** splňuje diferenční rovnici

$$(24) \quad \rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \text{ pro } k > 0.$$

**Poznámka** Pro odvození (24) stačí vynásobit všechny členy rovnosti (21) výrazem  $y_{t-k} / \sigma_y^2$  a přejít ke středním hodnotám, přičemž vzhledem k možnosti vyjádření stacionárního  $AR(p)$  procesu jako lineárního procesu (1), je  $E(y_{t-k} \cdot \varepsilon_t) = 0$  pro  $k > 0$ :



$$(21) \quad \frac{y_t y_{t-k}}{\sigma_y^2} = \frac{\phi_1 y_{t-1} y_{t-k} + \phi_2 y_{t-2} y_{t-k} + \dots + \phi_p y_{t-p} y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k}}{\sigma_y^2} \text{ a dále}$$

$$\frac{E(y_t y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \frac{\phi_1 E(y_{t-1} y_{t-k}) + \phi_2 E(y_{t-2} y_{t-k}) + \dots + \phi_p E(y_{t-p} y_{t-k}) + E(\varepsilon_t y_{t-k})}{\sigma_y^2}, \text{ takže}$$

$$\rho_k = \frac{E(y_t y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \phi_1 \frac{E(y_{t-1} y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \phi_2 \frac{E(y_{t-2} y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \dots + \phi_p \frac{E(y_{t-p} y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \frac{E(\varepsilon_t y_{t-k})}{\sigma_y^2}$$

Neboli  $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} + 0$  □ .

Z teorie diferenčních rovnic přitom plyne, že její řešení (24) lze vyjádřit ve tvaru

$$(25) \quad \rho_k = \alpha_1 z_1^{-k} + \alpha_2 z_2^{-k} + \dots + \alpha_p z_p^{-k} \text{ pro } k \geq 0, \text{ kde}$$

$z_1, z_2, \dots, z_p$  jsou navzájem různé kořeny polynomu  $\phi(z)$  s vlastnostmi

$$|z_1|, |z_2|, \dots, |z_p| > 1 \text{ a } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \text{ jsou pevné koeficienty:}$$

a) Pokud jsou kořeny  $z_i, z_j$  komplexně sdružené, pak mohou být nahrazeny jediným členem tvaru  $\alpha d^k \cdot \sin(\lambda k + \phi)$  s  $0 < d < 1$ .

b) Pokud kořeny  $z_i, z_j$  nejsou navzájem různé, tzn. některý z nich je násobný, pak se pro kořen  $z_i$  s násobností  $r$  ve vyjádření objeví složitější člen typu  $(\beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \dots + \beta_r k^{r-1}) z_i^{-k}$ , který je však výrazně překrývá průběhem členu  $z_i^{-k}$ . Tak či onak, je **autokorelační funkce procesu**  $AR(p)$  v podstatě lineární kombinací **klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami.**

### soustava Yule-Walkerových rovnic

Jestliže zapíšeme výraz (23) jen pro  $k = 1, 2, \dots, p$ , pak dostaneme tzv. **soustavu Yuleových-Walkerových rovnic** pro vyjádření parametrů  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  pomocí autokorelací  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  (a naopak).

$$(26) \quad \begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\dots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{aligned}$$

Soustava **Yuleových-Walkerových rovnic** umožňuje vypočítat hodnoty autokorelační funkce na základě znalosti parametrů autoregresního procesu obecně  $p$ -tého řádu  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  jako řešení soustavy  $p$  lineárních rovnic o  $p$  neznámých  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ .

**Parciální autokorelační funkce**  $\rho_{kk}$  procesu  $AR(p)$  má bod useknutí  $k_0$  rovný řádu modelu  $p$ . To plyne přímo z definice parciální autokorelační funkce, což činí z této funkce důležitý nástroj pro identifikaci autoregresních procesů.

Proces  $AR(p)$  je vždy invertibilní. Je to zřejmé, neboť (23) je již zápis tohoto modelu v invertovaném tvaru.

Proces  $AR(1)$  - autoregresní proces 1. řádu

$$(27) \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{je stacionární při } |\phi_1| < 1$$

V tomto případě má nulovou střední hodnotu a rozptyl procesu  $AR(1)$  je roven

$$(28) \quad \sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}.$$

Jeho **autokorelační funkce** má tvar

$$(29) \quad \rho_k = \phi_1^k \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ve tvaru geometricky klesající posloupnosti (oscilující pro záporné  $\phi_1$  a bez bodu useknutí). Speciálně je pro  $k = 1$

$$(30) \quad \rho_1 = \phi_1, \quad \text{což znamená, že}$$

$\rho_1 = \phi_1$  první autokorelace procesu  $AR(1)$  se rovná právě jeho autoregresnímu parametru. Proto důležitou roli v modelu hraje znaménko parametru  $\phi_1$ .

a) Pokud platí  $\phi_1 > 0$  (pozitivní autokorelovanost), pak je patrná setrvačnost ve znaménkách sousedních hodnot (s relativně malým překřížením časové osy)

b) Pokud platí  $\phi_1 < 0$  (negativní autokorelovanost), pak to signalizuje relativně velmi časté přechody hodnot přes časovou osu, a velmi časté změny ve znaménkách sousedních hodnot časové řady.

**Parciální autokorelační funkce procesu  $AR(1)$  má tvar**

$$(31) \quad \rho_{11} = \phi_1, \quad \rho_{kk} = 0 \quad \text{pro } k > 1$$

s bodem useknutí  $k_0 = 1$ .

$AR(1)$ -polynom má tvar  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B$ , tedy  $\phi(z) = 1 - \phi_1 z$ , po anulování  $\phi_1 z = 1$ , jediný reálný kořen  $AR(1)$ -polynomu je tedy roven  $z = 1/\phi_1$ . ( $\phi_1$  může být i záporné, byť je to neobvyklé).

Má-li kořen tohoto polynomu (pro stacionaritu) ležet vně jednotkového kruhu, musí platit

$$(R1) \quad z = 1/\phi_1 < -1 \quad \text{nebo} \quad (R2) \quad z = 1/\phi_1 > 1$$

Podmínka (R1) může být splněna jen při záporném  $\phi_1$  a při splnění  $\phi_1 > -1$

Podmínka (R2) může být splněna jen při kladném  $\phi_1$  a při splnění  $\phi_1 < 1$ .

Obě eventuality pokrývá souhrnná podmínka  $|\phi_1| < 1$ .

## Proces $AR(2)$ - autoregresní proces 2.řádu

(32)  $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$  je stacionární pro

(32A)  $\phi_1 + \phi_2 < 1$ ,  $\phi_2 - \phi_1 < 1$   $-1 < \phi_2 < 1$ ,

takže příslušná oblast stacionarity  $AR(2)$  v rovině s vodorovnou osou pro hodnoty  $\phi_1$  a svislou osou pro hodnoty  $\phi_2$  vyplní vnitřek trojúhelníka s vrcholy  $(-2, -1)$ ,  $(0, 1)$  a  $(2, -1)$ . V tom případě má proces  $AR(2)$  nulovou střední hodnotu a rozptyl roven

$$(33) \quad \sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2}.$$

a jeho autokorelační funkce má tvar

$$\rho_k = \frac{z_1^{-1}(1 - z_2^{-2})z_1^{-k} - z_2^{-1}(1 - z_1^{-2})z_2^{-k}}{(z_1^{-1} - z_2^{-1})(1 + z_1^{-1}z_2^{-1})} \quad \text{pro } k \geq 0, \text{ kde}$$

$z_1, z_2$  jsou navzájem různé kořeny polynomu  $\phi(z)$  ( $|z_1|, |z_2| > 1$ ; pro dvojnásobný kořen je tvar funkce analogický),  $\rho_k$  nemá bod useknutí a má tvar lineární kombinace dvou geometricky klesajících posloupností nebo tvar sinusoidy s geometricky klesající amplitudou.

Parciální autokorelační funkce procesu  $AR(2)$  má bod useknutí roven  $k_0 = 2$ .

$AR(2)$ -polynom má tvar  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$ , tedy  $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ , po anulování  $0 = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$  neboli  $\phi_2 z^2 + \phi_1 z - 1 = 0$ .

Kořeny  $AR(2)$ -polynomu získáme jako řešení této kvadratické rovnice s podmínkou  $|z_1|, |z_2| > 1$  (pro reálný i komplexní případ).

Řešení (obecně komplexní) příslušné kvadratické rovnice je  $z_1, z_2 = \frac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$ .

a) Jsou-li kořeny reálné, různé, pak musí být splněny podmínky

$$(A) \quad \phi_1^2 + 4\phi_2 > 0, \text{ tedy } \phi_1^2 > -4\phi_2 \text{ a zároveň (B) } \left| \frac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2} \right| > 1, \text{ tedy}$$

$$(B1) \quad \left| \frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2} \right| > 1 \quad \text{a současně také} \quad (B2) \quad \left| \frac{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2} \right| > 1$$

Pokud je  $\phi_2 > 0$ , pak je podmínka (A) splněna vždy a neznamená reálné omezení.

První kořen  $z_1 = \frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$  je kladný, protože (při kladném jmenovateli) má kladný čitatel.

Podmínka stacionarity je tedy:  $\frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2} > 1$  neboli  $-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} > 2\phi_2$

$$\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} > 2\phi_2 + \phi_1 \quad \phi_1^2 + 4\phi_2 > 4\phi_2^2 + 4\phi_1\phi_2 + \phi_1^2 \quad \phi_2 > \phi_2^2 + \phi_1\phi_2 \quad \text{tj. } 1 > \phi_2 + \phi_1$$

Druhý kořen  $z_2 = \frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}$  je záporný, neboť (při kladném jmenovateli) má záporný čítec (bez

ohledu na znaménko  $\varphi_1$  odčítáme odmocninu, jejíž abs.hodnota je při  $\varphi_2 > 0$  větší než abs.hodnota  $-\varphi_1$ .)

Podmínka stacionarity je tedy:  $\frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} < -1$  neboli  $-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} < -2\varphi_2$

$$2\varphi_2 - \varphi_1 < \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} \quad 4\varphi_2^2 + \varphi_1^2 - 4\varphi_2\varphi_1 < \varphi_1^2 + 4\varphi_2 \quad \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 < \varphi_2 \quad \text{tj. } \varphi_2 - \varphi_1 < 1$$

Takže v tomto případě musejí parametry splňovat nerovnosti  $1 > \varphi_2 + \varphi_1$ ,  $\varphi_2 < 1 + \varphi_1$ ,  $\varphi_2 > 0$ .

Útvarem, který tato omezení pokrývá, je trojúhelník tvořený body  $A = [-1, 0]$ ,  $B = [1, 0]$  a  $C = [0, 1]$

Pokud je  $\varphi_2 < 0$ , pak podmínka (A) představuje reálné omezení  $\varphi_1^2 > -4\varphi_2$  neboli  $-\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2 < \varphi_2$ .

Tento útvar je vymezen plochou ležící mezi (nad) parabolou  $\varphi_2 = -\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2$  a osou  $\varphi_2 = 0$

Znaménko prvního kořene  $z_1 = \frac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}$  závisí ale na znaménku parametru  $\varphi_1$ , přičemž

absolutní hodnota výrazu v odmocnině je vždy menší než absolutní hodnota  $\varphi_1$ :

Jestliže uvažujeme  $\varphi_1 > 0$  (nacházíme se v pravém dolním kvadrantu),

- pak kořen  $z_1$  je kladný, protože (při záporném jmenovateli) má záporný čítec .

Podmínka stacionarity tedy zní  $z_1 = \frac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} > 1$ , tj.  $-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} < 2\varphi_2$

$$\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} < 2\varphi_2 + \varphi_1, \text{ tedy } \varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 4\varphi_2^2 + 4\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2, \text{ tedy } \varphi_2 < \varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2, \text{ tj. } 1 > \varphi_2 + \varphi_1$$

- a kořen  $z_2$  je též kladný, protože (při záporném jmenovateli) má i tento záporný čítec (menší než parametr  $\varphi_1$ )

Podmínka stacionarity tedy zní  $z_2 = \frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} > 1$ , tj.  $-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} < 2\varphi_2$

$-(2\varphi_2 + \varphi_1) < \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}$ , tj.  $4\varphi_2^2 + 4\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2 < \varphi_1^2 + 4\varphi_2$ , tedy  $\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2 < \varphi_2$ , neboli při  $\varphi_2 < 0$  dostáváme  $\varphi_2 + \varphi_1 > 1$  tj. nerovnost přesně opačnou než byla podmínka vyozená pro kořen  $z_1$ .

Jestliže uvažujeme naopak  $\varphi_1 < 0$  (nacházíme se v levém dolním kvadrantu),

- pak kořen  $z_1$  je záporný, protože (při záporném jmenovateli) má kladný čítec .

Podmínka stacionarity zde tedy zní  $z_1 = \frac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} < -1$  tj.  $-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} > -2\varphi_2$

$$\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} > -2\varphi_2 + \varphi_1, \text{ tedy } \varphi_1^2 + 4\varphi_2 > 4\varphi_2^2 - 4\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2, \text{ tj. } \varphi_2 > \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 \text{ a při } \varphi_2 < 0$$

$$1 < \varphi_2 - \varphi_1$$

- a kořen  $z_2$  je také záporný, protože (při záporném jmenovateli) má i tento kladný čítec (menší než kořen  $\varphi_1$ )

Podmínka stacionarity tedy zní  $z_2 = \frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} < -1$  tj.  $-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} > -2\varphi_2$

$-\varphi_1 + 2\varphi_2 > \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}$ , tj.  $4\varphi_2^2 - 4\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2 > \varphi_1^2 + 4\varphi_2$ , tedy  $\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 > \varphi_2$ , neboli při  $\varphi_2 < 0$  dostáváme  $\varphi_2 - \varphi_1 < 1$  tzn. nerovnost přesně opačnou než byla podmínka vyvozená pro kořen  $z_1$ .

Znamená to tedy, že pokud je  $\varphi_2 < 0$  nelze ani v případě  $\varphi_1 > 0$  ani v opačném případě  $\varphi_1 < 0$  nalézt žádnou dvojici komplexně sdružených kořenů, která by vyhovovala podmínkám kladeným na stacionaritu procesu AR(2).

b) Jsou-li kořeny komplexně sdružené pak musí být splněny podmínky

(A\*)  $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 0$ , tedy  $\varphi_1^2 < -4\varphi_2$  tj.  $-\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2 > \varphi_2$  a současně (B)  $\left| \frac{-\varphi_1 \pm \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} \right| > 1$ , tedy

(B1)  $\left| \frac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} \right| > 1$  a současně také (B2)  $\left| \frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} \right| > 1$

Zřejmě (pro komplexně sdružené kořeny) nemůže být  $\varphi_2 > 0$ , neboť podmínka (A\*) by nebyla splněna nikdy

Pro případné komplexně sdružené kořeny tedy musí platit  $\varphi_2 < 0$ .

Podmínka  $\varphi_1^2 < -4\varphi_2$  představuje zde relevantní omezení.

Kořeny mají tedy tvar

$$z_1 = \frac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} = \frac{-\varphi_1}{2\varphi_2} + i \cdot \frac{\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}$$

$$z_2 = \frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} = \frac{-\varphi_1}{2\varphi_2} - i \cdot \frac{\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}$$

Absolutní hodnoty obou komplexně sdružených kořenů spočteme jako

$$|z_1, z_2| = \sqrt{\left(\frac{-\varphi_1}{2\varphi_2}\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\varphi_1^2}{4\varphi_2^2} + \frac{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}{4\varphi_2^2}} = \sqrt{\frac{2\varphi_1^2 + 4\varphi_2}{4\varphi_2^2}}$$

Podmínka představující požadavek, aby oba ležely vně jednotkového kruhu, je dána nerovností

$$\sqrt{\frac{2\varphi_1^2 + 4\varphi_2}{4\varphi_2^2}} > 1, \text{ tj. } \frac{2\varphi_1^2 + 4\varphi_2}{4\varphi_2^2} > 1, \text{ tj. } 2\varphi_1^2 + 4\varphi_2 > 4\varphi_2^2, \text{ tj. } \varphi_1^2 + 2\varphi_2 > 2\varphi_2^2$$

neboli při záporném  $\varphi_2 < 0$   $\varphi_1^2 > 2\varphi_2(\varphi_2 - 1)$ , tj.  $|\varphi_1| > \sqrt{2\varphi_2(\varphi_2 - 1)}$ .

Vyšetřujeme tedy množinu bodů, pro které současně platí tyto tři nerovnosti:

$$\varphi_1^2 > 2\varphi_2(\varphi_2 - 1), \quad \varphi_1^2 < -4\varphi_2 \quad \text{a také} \quad \varphi_2 < 0$$

splňujících složené podmínky  $\sqrt{2\varphi_2(\varphi_2 - 1)} < |\varphi_1| < 2\sqrt{-\varphi_2}$

Omezení vyplývající z toho (aby pravá strana intervalu přípustných hodnot byla větší než levá)

$$2\varphi_2(\varphi_2 - 1) < \varphi_1^2 < -4\varphi_2, \text{ odtud } 2\varphi_2^2 < -2\varphi_2, \text{ tedy } \varphi_2 > -1.$$

Z hraniční podmínky pro  $\varphi_2 = -1$  odtud dále vyplývá omezení pro  $\varphi_1$ :

$$2(-1)(-1-1) \leq \varphi_1^2 \leq 4\sqrt{-(-1)} \quad \text{tj.} \quad 2 = \sqrt{4} \leq |\varphi_1| \leq 2\sqrt{1} = 2$$

Takže obor komplexně sdružených kořenů je zde dán oborem parametrů  $\varphi_1, \varphi_2$ , kde  $\varphi_2 < 0$  a kde se navíc  $\varphi_2$  může pohybovat jen v rozmezí  $\varphi_2 \in (-1, 0)$  a  $\varphi_1$  v rozmezí  $\varphi_1 \in (-2, 2)$ . První nerovnost v prvním omezení pak ještě vede k podmínce  $|\varphi_1| > \varphi_2 - 1$ , která se projeví dvěma lineárními omezeními  $\varphi_2 < \varphi_1 - 1$  a  $\varphi_2 < \varphi_1 + 1$ .

Řešením je tedy oblast tvořící lichoběžník s body  $A = [-1, 0]$ ,  $B = [1, 0]$ ,  $D = [-2, -1]$ ,  $E = [2, -1]$ ,

Útvarem, který pokrývá jak oblast dvojice reálných, tak komplexně sdružených kořenů, je trojúhelník tvořený body  $D = [-2, -1]$ ,  $B = [1, 0]$  a  $E = [2, -1]$ ,

c) By-li by kořen reálný dvojnásobný, pak musí být diskriminant nulový, tj.  $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 = 0$ , neboli

$\varphi_1^2 = -4\varphi_2$ , čili  $\varphi_1 = 2\sqrt{-\varphi_2}$ , což mj. implikuje, že  $\varphi_2 < 0$  V tomto případě je kořen roven

$$z = (z_1 = z_2) = \frac{-\varphi_1}{2\varphi_2}, \text{ tedy s respektováním podmínky } \varphi_1^2 = -4\varphi_2 \text{ máme } z = \frac{-\varphi_1}{\frac{\varphi_1^2}{2}} = \frac{2}{\varphi_1}.$$

Pokud tedy  $\varphi_1 > 0$ , je kořen  $z = \frac{2}{\varphi_1}$  kladný a podmínka stacionarity zde zní  $z = \frac{2}{\varphi_1} > 1$ . Odtud

plyne  $\varphi_1 < 2$ , tedy  $0 < \varphi_1 < 2$  a k němu příslušný  $\varphi_2$  musí ležet v rozmezí  $\varphi_2 \in (-1, 0)$

Pokud naopak  $\varphi_1 < 0$ , je kořen  $z = \frac{2}{\varphi_1}$  záporný a podmínka stacionarity zní  $\frac{2}{\varphi_1} < -1$ . Odtud

plyne  $2 > -\varphi_1$ , tedy  $-2 < \varphi_1 < 0$  a k němu příslušný  $\varphi_2$  musí ležet v rozmezí  $\varphi_2 \in (0, 1)$ .

Je třeba si ale uvědomit, že v těchto případech by byl proces  $AR(2)$  určen vlastně jen jedním

parametrem, protože oba jsou pevně svázány vztahem  $\varphi_1^2 = -4\varphi_2$ .

## Smišený proces ARMA [autoregressive and moving averages process]

Smišený proces řádu  $p$  a  $q$  značený jako  $ARMA(p, q)$  má tvar:

$$(41) \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad \text{neboli}$$

$$(41A) \quad \phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t,$$

kde operátory  $\phi(B)$  a  $\theta(B)$  byly zavedeny v procesech  $AR(p)$  a  $MA(q)$ . Podmínka stacionarity (resp. invertibility) smišeného procesu  $ARMA(p, q)$  je shodná s podmínkou procesu  $AR(p)$  (resp. invertibility procesu  $MA(q)$ .)

**Stacionární proces  $ARMA(p, q)$  má nulovou střední hodnotu a jeho autokorelační funkce splňuje diferenční rovnici**

$$(42) \quad \rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \text{pro } k \geq q + 1$$

s řešením

$$(43) \quad \rho_k = \alpha_1 z_1^{-k} + \alpha_2 z_2^{-k} + \dots + \alpha_p z_p^{-k} \quad \text{pro } k \geq \max(0, q - p + 1),$$

kde  $z_1, z_2, \dots, z_p$  jsou navzájem různé kořeny polynomu  $\phi(z)$ ,  $(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_p|) > 1$ .

**Autokorelační funkce procesu  $ARMA(p, q)$  nemá bod useknutí a je** v podstatě lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami, ale s výjimkou počátečních hodnot  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{q-p}$  (tato výjimka se uplatní jen v případě  $q \geq p$ ).

**Parciální autokorelační funkce procesu  $ARMA(p, q)$  nemá bod useknutí a je** omezena lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami, ale s výjimkou počátečních hodnot  $\rho_{00}, \rho_{11}, \rho_{22}, \dots, \rho_{p-q, p-q}$  (výjimka se uplatní, jen když  $p \geq q$ ).

**Proces  $ARMA(1, 1)$  je představován zápisem**

$$(44) \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

a je stacionární pro  $|\phi_1| < 1$ . V tom případě má nulovou střední hodnotu a **rozptyl roven**

$$(45) \quad \sigma_y^2 = \frac{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2} \cdot \sigma_\varepsilon^2.$$

**ověření (45):** Z definice procesu  $ARMA(1, 1)$  ve (44) víme, že platí

$$y_t \cdot y_t = (\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}), \quad \text{takže}$$

$$E y_t \cdot y_t = E(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2, \quad \text{po roznásobení pak}$$

$$E(y_t)^2 = \phi_1^2 E(y_{t-1})^2 + E(\varepsilon_t)^2 + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1})^2 + 2\phi_1 E(y_{t-1} \cdot \varepsilon_t) + 2\theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_t) + 2\theta_1 \phi_1 E(y_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-1}).$$

Z nekorelovanosti  $y_{t-1}$  vůči  $\varepsilon_t$  a  $\varepsilon_t$  vůči  $\varepsilon_{t-1}$  dostáváme  $E(y_{t-1} \cdot \varepsilon_t) = 0$  a  $E(\varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_t) = 0$

$$(46) \quad E(y_t)^2 = \phi_1^2 E(y_{t-1})^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + 2\theta_1 \phi_1 E(y_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-1}).$$

Vztah (46) nyní podělíme rozptylem veličiny  $y_t$  Dostaneme:

$$\frac{E(y_t^2)}{\sigma_y^2} = \frac{\phi_1^2 E(y_{t-1}^2)}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{\theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{2\theta_1 \phi_1 E(y_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-1})}{\sigma_y^2} \quad \text{a následně, protože}$$

$$E(y_{t-1}^2) = \sigma_y^2 \quad \text{a} \quad E(y_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$(47) \quad 1 = \phi_1^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{\theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{2\theta_1 \phi_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}, \quad \text{po úpravě}$$

$$(1 - \phi_1^2) \sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + 2\theta_1 \phi_1 \sigma_\varepsilon^2$$

a následně obdržíme shodu s (45)

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + 2\theta_1 \phi_1 \sigma_\varepsilon^2}{(1 - \phi_1^2)} = \frac{(1 + \theta_1^2 + 2\theta_1 \phi_1) \sigma_\varepsilon^2}{(1 - \phi_1^2)}$$

a má **autokorelační funkci**

$$(48) \quad \rho_1 = \frac{(1 + \phi_1 \theta_1)(\phi_1 + \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1}$$

$$(49) \quad \rho_k = \phi_1 \cdot \rho_{k-1} \quad \text{pro} \quad k \geq 2$$

bez bodu useknutí ve tvaru klesající geometrické posloupnosti s výjimkou  $\rho_0$   
ověření (48):

podle (...) a (44) máme

$$(50) \quad \rho_1 = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-1})}{\sigma_y \cdot \sigma_{y-1}} = \frac{E(y_t y_{t-1})}{\sigma_y^2} = \frac{E(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})}{\sigma_y^2}$$

Výraz v čitateli předchozího zlomku (50) lze rozepsat následovně:

$$\begin{aligned} & E(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}) = \\ & = E(\phi_1^2 y_{t-1} y_{t-2}) + E(\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + E(\phi_1 y_{t-1} \theta_1 \varepsilon_{t-2}) \\ & + E(\varepsilon_t \phi_1 y_{t-2}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t \cdot \theta_1 \varepsilon_{t-2}) + \\ & + E(\theta_1 \varepsilon_{t-1} \phi_1 y_{t-2}) + E(\theta_1 \varepsilon_{t-1}^2) + E(\theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-2}) \end{aligned}$$

Vyjádříme-li jednotlivé členy předchozího devítičlenu, dostaneme:

$$(c1) \quad E(\phi_1^2 y_{t-1} y_{t-2}) = \phi_1^2 \cdot E(y_{t-1} y_{t-2}) = \phi_1^2 \rho_1 \cdot \sigma_y^2 = \phi_1^2 \rho_1 \cdot \frac{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1}{1 - \phi_1^2} \cdot \sigma_\varepsilon^2$$

$$(c2) \quad E(\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) = \phi_1 \cdot E(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) = \phi_1 \cdot \sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{protože} \quad E(y_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-1}) = E(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} \cdot \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1})^2 = \sigma_\varepsilon^2$$

$$(c3) \quad E(\phi_1 y_{t-1} \cdot \theta_1 \varepsilon_{t-2}) = \phi_1 \theta_1 \cdot E(y_{t-1} \varepsilon_{t-2}) = \phi_1 \theta_1 (\phi_1 + \theta_1) \sigma_\varepsilon^2$$

$$\begin{aligned} E(y_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-2}) & = E(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} \cdot \varepsilon_{t-2}) = E(\phi_1 y_{t-2} \varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-2}) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-2} \cdot \varepsilon_{t-2}) = \\ & = \phi_1 E(y_{t-2} \varepsilon_{t-2}) + 0 + \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 = (\phi_1 + \theta_1) \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\text{protože} \quad E(y_{t-2} \cdot \varepsilon_{t-2}) = E(\phi_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3} \cdot \varepsilon_{t-2}) = E(\varepsilon_{t-2})^2 = \sigma_\varepsilon^2$$



- (c4)  $E(\varepsilon_t \phi_I y_{t-2}) = \phi_I \cdot E(\varepsilon_t y_{t-2}) = 0$  v důsledku nekorelovanosti  $\varepsilon_t$  a  $y_{t-2}$ .
- (c5)  $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$  v důsledku nekorelovanosti  $\varepsilon_t$  a  $\varepsilon_{t-1}$ .
- (c6)  $E(\varepsilon_t \theta_I \varepsilon_{t-2}) = \theta_I \cdot E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) = 0$  v důsledku nekorelovanosti  $\varepsilon_t$  a  $\varepsilon_{t-2}$ .
- (c7)  $E(\theta_I \varepsilon_{t-1} \phi_I y_{t-2}) = \theta_I \phi_I \cdot E(\varepsilon_{t-1} \cdot y_{t-2}) = 0$  v důsledku nekorelovanosti  $\varepsilon_{t-1}$  a  $y_{t-2}$ .
- (c8)  $E(\theta_I \varepsilon_{t-1}^2) = \theta_I E(\varepsilon_{t-1}^2) = \theta_I \cdot \sigma_\varepsilon^2$
- (c9)  $E(\theta_I^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) = \theta_I^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) = 0$  v důsledku nekorelovanosti  $\varepsilon_{t-1}$  a  $\varepsilon_{t-2}$ .

Nyní postupně vše nenulové dosadíme do (50) :

$$\rho_I = \frac{\phi_I^2 \cdot \rho_I \cdot \sigma_y^2 \cdot \sigma_\varepsilon^2 + \phi_I \sigma_\varepsilon^2 + \phi_I \theta_I^2 \cdot \sigma_\varepsilon^2 + \phi_I \theta_I (\phi_I + \theta_I) \sigma_\varepsilon^2 + \theta_I \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$

$$\rho_I = \frac{[\phi_I^2 \cdot \rho_I \cdot \sigma_y^2 + \phi_I + \phi_I \theta_I (\phi_I + \theta_I) + \theta_I] \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$

$$\rho_I \sigma_y^2 = [\phi_I^2 \cdot \rho_I \cdot \sigma_y^2 + \phi_I + \phi_I \theta_I (\phi_I + \theta_I) + \theta_I] \sigma_\varepsilon^2$$

$$\rho_I \sigma_y^2 (1 - \phi_I^2) = [\phi_I + \phi_I \theta_I (\phi_I + \theta_I) + \theta_I] \sigma_\varepsilon^2$$

$$\rho_I = \frac{[\phi_I + \phi_I \theta_I (\phi_I + \theta_I) + \theta_I] \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2 (1 - \phi_I^2)}$$

Dále dosadíme z (45)  $\sigma_y^2 (1 - \phi_I^2) = (1 + \theta_I^2 + 2\phi_I \theta_I) \sigma_\varepsilon^2$  a konečně máme

$$\rho_I = \frac{[\phi_I + \phi_I \theta_I (\phi_I + \theta_I) + \theta_I] \sigma_\varepsilon^2}{(1 + \theta_I^2 + 2\phi_I \theta_I) \sigma_\varepsilon^2} = \frac{(1 + \phi_I \theta_I)(\phi_I + \theta_I)}{(1 + \theta_I^2 + 2\phi_I \theta_I)}$$

$$(50) \rho_k = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-k})}{\sigma_y \cdot \sigma_{y-k}} = \frac{E(y_t y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \frac{E(\phi_I y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_I \varepsilon_{t-1}) \cdot (\phi_I y_{t-k} + \varepsilon_{t-k} + \theta_I \varepsilon_{t-k-1})}{\sigma_y^2}$$

Výraz v čitateli předchozího zlomku (50) lze rozepsat následovně:

$$\begin{aligned} & E(\phi_I y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_I \varepsilon_{t-1}) \cdot (\phi_I y_{t-k} + \varepsilon_{t-k} + \theta_I \varepsilon_{t-k-1}) = \\ & = E(\phi_I^2 y_{t-1} y_{t-k}) + E(\phi_I y_{t-1} \varepsilon_{t-k}) + E(\phi_I y_{t-1} \cdot \theta_I \varepsilon_{t-k-1}) \\ & + E(\varepsilon_t \phi_I y_{t-k}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) + E(\varepsilon_t \cdot \theta_I \varepsilon_{t-k-1}) + \\ & + E(\theta_I \varepsilon_{t-1} \cdot \phi_I y_{t-k}) + E(\theta_I \cdot \varepsilon_{t-1} \cdot \theta_I \cdot \varepsilon_{t-k}) + E(\theta_I^2 \varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-k-1}) \end{aligned}$$

Při  $k \geq 2$  je všech 6 posledních členů rovných nule. První člen je roven

$$\begin{aligned} E(\phi_I^2 y_{t-1} y_{t-k}) &= \phi_I^2 \cdot E(y_{t-1} y_{t-k}) = \phi_I^2 \cdot \rho_{k-1} \cdot \sigma_y^2 \\ E(\phi_I y_{t-1} \varepsilon_{t-k}) &= \phi_I E(y_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-k}) = \phi_I E(\phi_I y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_I \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k}) = \\ &= \phi_I^2 E(y_{t-2}, \varepsilon_{t-k}) + \phi_I \theta_I \cdot E(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k}) = \phi_I^2 E(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k}) + \phi_I \theta_I E(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k}) \\ E(\phi_I y_{t-1} \cdot \theta_I \varepsilon_{t-k-1}) &= \phi_I \theta_I \cdot E(y_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-k-1}) = \\ & \phi_I \theta_I \cdot E(\phi_I y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_I \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k-1}) = \phi_I^2 \theta_I \cdot E(y_{t-2} \varepsilon_{t-k-1}) + \phi_I \theta_I^2 E(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k-1}) \end{aligned}$$

**Podmínkou invertibility procesu ARMA(1,1) je  $|\phi_I| < 1$ .**

Parciální  $\rho_{kk}$  autokorelační funkce procesu  $ARMA(1,1)$  je omezena klesající geometrickou posloupností počínaje od  $\rho_{11}$ .

### Zobecnění stacionární proces s úrovní konstantou

Dosud uvedené stacionární procesy se vyznačovaly nulovou střední hodnotou. Jejich zobecnění pro situace, kdy je střední hodnota nenulová (ale zůstává v čase neměnná) není však nijak obtížné:

Vezmeme-li

Proces klouzavých součtů řádu  $MA(q)$  se střední hodnotou  $\mu$  má tvar

$$(51) \quad y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \mu + \theta(B) \cdot \varepsilon_t$$

Smišený proces  $ARMA(p, q)$  se střední hodnotou  $\mu$  má tvar

$$(52) \quad y_t - \mu = \phi_1 (y_{t-1} - \mu) + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p (y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \cdot \varepsilon_{t-q}$$

neboli

$$(52A) \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \cdot \varepsilon_{t-q}, \text{ kde}$$

$$\alpha = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) \cdot \mu$$

### Konstrukce modelů v Boxově-Jenkinsově metodologii

Podobně jako v ekonometrii, sestává úplná tvorba modelu v **Boxově-Jenkinsově metodologii** z následujících třech kroků:

**(A) identifikace modelu** Znamená to např. že pro analyzovanou časovou řadu  $y_1, y_2, \dots, y_n$  identifikujeme jí adekvátní model  $AR(1)$

**(B) odhad parametrů (kvantifikace) modelu.** V rámci modelu  $AR(1)$  se (dejme tomu) jedná o model tvaru  $y_t = 0,72 y_{t-1} + \varepsilon_t$  při  $\sigma_\varepsilon^2 = 8,92$

**(C) diagnostika modelu.** V rámci odhadnutého modelu v (b) je tento model verifikován na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  a prověří se jeho verifikační schopnosti.

Pokud diagnostické výsledky z kroku (C) nejsou dostatečně přesvědčivé, je potřebné všechny tři kroky zopakovat pro alternativní model (často se ale jedná jen o korekci zamítnutého modelu, ke které nám provedená diagnostika poskytla dílčí návod).

## (A) - Identifikace modelu

Příspěvek **autokorelační a parciální autokorelační funkce** k identifikaci modelu:

Obecnější poznatky o tvaru autokorelační a parciální autokorelační funkce stacionárních a invertibilních procesů  $AR(p)$ ,  $MA(q)$ ,  $ARMA(p, q)$  přináší tabulka:

	$AR(p)$	$MA(q)$	$ARMA(p, q)$
$\rho_k$	neexistuje $k_0$ $\rho_k$ ve tvaru U-křivky	$k_0 = q$	neexistuje $k_0$ $\rho_k$ ve tvaru U-křivky po prvních $q-p$ hodnotách
$\rho_{kk}$	$k_0 = p$ $\rho_k$ omezená U-křivkou	neexistuje $k_0$	$\rho_k$ omezená U-křivkou po prvních $p-q$ hodnotách

Odpovídající identifikační postup pak spočívá v prohlídce grafického záznamu odhadnutého **korelogramu** a **parciálního korelogramu** modelované časové řady, kdy se snažíme řadě přiřadit nejvhodnější typ modelu právě pomocí charakteristik z tabulky. V případě pochybností testujeme potenciální bod useknutí  $k_0$  pomocí **Bartlettovy aproximace** s přibližným (asymptotickým) kritickým oborem (nejčastěji na hladině  $\alpha = 0,05$ ) pro autokorelační funkci

$$(53) \quad |r_k| \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \left( 1 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{k_0} r_j^2 \right)} \quad \text{pro některé } k > k_0$$

Druhou možností je aplikovat **Quenouilleovu aproximaci** s kritickým oborem (na hladině  $\alpha = 0,05$ ) pro parciální autokorelační funkci

$$(54) \quad |r_{kk}| \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} \quad \text{pro některé } k > k_0 .$$

## Identifikace pomocí informačních kritérií

Jde o modernější přístup k identifikaci, který snižuje míru subjektivity posuzování analytika a v jistém smyslu identifikaci automatizuje. K problému identifikace obecného modelu  $ARMA(p, q)$  pro danou časovou řadu se zde přistupuje jako k problému odhadu parametrů  $p, q$  na základě optimalizačního kritéria

$$(60) \quad (\hat{p}, \hat{q}) = \arg \min_{(k, l)} A(k, l), \text{ kde}$$

$A(k, l)$  je vhodné kritérium, k jehož konstrukci musíme pro danou řadu odhadnout model  $ARMA(k, l)$ , přičemž minimalizaci provádíme pro předem zvolenou síť hodnot  $k = 0, 1, 2, \dots, K \quad l = 0, 1, 2, \dots, L$ .

Adekvátnější než předchozí postup (60) je však uplatnit některé z **kritérií teorie informace**, kdy se penalizují zbytečně vysoké řády  $l$  a  $k$  a často tak docílít u odhadů jejich konzistence. Nejběžnější kritéria založená na tomto principu jsou

**(A) AKAIKEho informační kritérium** [Akaike information criterion 1974]

$$(61) \quad AIC(k, l) = \ln \hat{\sigma}_{k, l}^2 + 2 \cdot \frac{k + l}{n}$$

**(B) SCHWARTZovo informační kritérium** [Schwartz (Bayesian) information criterion 1978]

$$(62) \quad SIC(k, l) = \ln \hat{\sigma}_{k, l}^2 + \ln(n) \cdot \frac{k + l}{n}$$

**(C) Hannanovo-Quinnovo kritérium** [Hannan-Quinn information criterion 1979]

$$(63) \quad SIC(k, l) = \ln \hat{\sigma}_{k, l}^2 + 2 \ln(\ln(n)) \cdot \frac{k + l}{n}$$

**(A) modifikované AKAIKEho informační kritérium** [Hurwich a Tsai criterion 1989]

$$(64) \quad AICC(k, l) = \ln \hat{\sigma}_{k, l}^2 + 2 \cdot \frac{k + l}{1 - \frac{k + l + 1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \text{ pro krátké řady, kde}$$

$\hat{\sigma}_{k, l}^2$  je odhadnutý rozptyl bílého šumu procesu  $ARMA(p, q)$  a v čitateli druhého členu je počet odhadovaných parametrů (se započtením eventuálně nenulové úrovně konstanty  $\mu$ , přičemž  $n$  je délka dané řady). Korektně by ale místo prvních členů v (61), resp. (62) měla být použita minimální hodnota logaritmované věrohodnostní funkce daného modelu vynásobená koeficientem  $(-2/n)$ .

**Kritérium BIC** sice poskytuje silně **konzistentní odhad** řádu modelu (který konverguje skoro jistě, tj. s pravděpodobností 1), ale s velkým rozptylem (tj. odhad ale postrádá **vydatnost**).

**U kritéria AIC** je tomu přesně naopak: příslušný **odhad řádu modelu** je zde bohužel **nekonzistentní, ale je vydatný**.

## Odhad parametrů ARMA modelu

V počáteční fázi kvantifikace modelu se postupuje tak, že se využijí existující vztahy mezi parametry daného modelu a jeho autokorelacemi, kdy např. v modelu  $AR(1)$  platí, že  $\phi_1 = \rho_1$ . Takovéto odhady odvozené z momentů se však zpravidla považují jen za předběžné a slouží tedy jako počáteční odhady pro vlastní odhadové procedury, prováděné většinou iteračně vhodnou numerickou metodou.

model	momentové odhady	kontrolní nerovnosti pro $r_k$
AR(1)	$\hat{\phi}_1 = r_1, \hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_y^2 (1 - \hat{\phi}_1 r_1)$	$ r_1  < 1$
AR(2)	$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}, \hat{\phi}_2 = \frac{r_2-r_1^2}{1-r_1^2}, \hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_y^2 (1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2)$	$ r_2  < 1, r_1^2 < \frac{1+r_2}{2}$
MA(1)	$\hat{\theta}_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4r_1^2}}{2r_1}, \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_y^2}{1 + \hat{\theta}_1^2}$	$ r_1  < 1/2$
MA(2)	$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = 0,1, \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_y^2}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2}$	$r_1 + r_2 > -1/2, r_2 - r_1 > -1/2$
ARMA(1,1)	$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1}, \hat{\theta}_1 = \frac{\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - 4}}{2}$	$r_1^2 < 4r_2(1 - 2r_2), 2r_1^2 -  r_1  < r_2 <  r_1 $
	$\hat{b} = \frac{1 - 2r_2 + \hat{\phi}_1^2}{r_1 - \hat{\phi}_1}, \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_y^{2*}}{1 + \hat{\theta}_1^2}, \text{ kde } \hat{\sigma}_y^{2*} = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t^* - \bar{y}^*)^2}{n}, \text{ kde } y_t^* = y_t - \phi_1 y_{t-1}$	

**Dílčí doplnění DM:** Jak patrně, momentové odhady vycházejí ze vztahů vyvozených pro teoretické hodnoty mezi parametry a rozptyly  $\bar{\sigma}_\varepsilon^2, \bar{\sigma}_y^2$ , jenže jsou uvažovány „inverzně“:

Např. vzorec pro rozptyl bílého šumu u procesu MA (1)  $\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\bar{\sigma}_y^2}{1 + \theta_1^2}$  je vyvozen z výrazu pro rozptyl  $\sigma_y^2$  procesu MA(1)  $\sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)$  uplatněného ve vzorci pro autokorelační funkci tohoto procesu.

Stejně tak je tomu u procesu MA (2)  $\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\bar{\sigma}_y^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$ , neboť zde  $\sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$ .

Podobně, vzorec pro rozptyl bílého šumu u procesu AR (1)  $\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \bar{\sigma}_y^2 (1 - \phi_1 r_1)$  je vyvozen ze vztahu (28)  $\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$  pro výpočet rozptylu tohoto procesu s uvažováním toho, že navíc platí  $\rho_1 = \phi_1$

Stejně tak je tomu u procesu AR (2)  $\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\bar{\sigma}_y^2}{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2}$ , neboť zde  $\sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 - \phi_1 r_1 - \phi_2 r_2)$ .

Odhadové procedury pro konstrukci finálních odhadů v uvažovaných modelech jsou vysloveně závislé na metodách nasazených v příslušném software. Např. v  $AR(p)$  modelu zapsanému ve tvaru

$$(21) \quad y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

lze použít klasický OLS-odhad spolu s klasickým OLS-odhadem jeho kovarianční matice, který je za předpokladu stacionarity procesu konzistentní. Lze totiž ukázat, že regresory v (21) splňují podmínku  $T \rightarrow \infty \text{plim} \left( \frac{1}{T} X' X \right) = V$ , kde  $V$  je regulární

matice a stejně tak i podmínku ortogonality  $T \rightarrow \infty \text{plim} \left( \frac{1}{T} X' \varepsilon \right) = 0$ . Z vyjádření stacionárního procesu  $AR(p)$  ve tvaru lineárního procesu (1) speciálně plyne, že

$$(63) \quad \text{cov}(y_{t-1}, \varepsilon_t) = \text{cov}(y_{t-2}, \varepsilon_t) = \dots = \text{cov}(y_{t-p}, \varepsilon_t) = 0.$$

V případě stacionárního a invertibilního  $ARMA(p, q)$  modelu (vyjádřeného pro jednoduchost s nulovou střední hodnotou)

$$(41) \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

se nejčastěji používají *NLLS* –odhady realizované pomocí některé z *metod Gauss-Newtonovy třídy*.

Příslušná *NLLS* –odhadová procedura zde spočívá v minimalizaci součtu čtverců

$$(64) \quad \min_{\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q} \sum_{t=p+1}^n e_t(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)^2, \text{ kde}$$

$$\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$$

$$e_t(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q) = e_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

pro  $t = p+1, p+2, \dots, n$  s vhodně zvolenými hodnotami  $e_{p-q+1}, e_{p-q+2}, \dots, e_p$ .

*Odhad rozptylu bílého šumu*  $\sigma_\varepsilon^2$  se potom obvykle získá tak, že minimální hodnotu (64) vydělíme délkou řady  $n$ . Za předpokladu normality a při dost velkém  $n$  jsou odhadové výsledky velmi blízké ML-odhadu (podmíněnému volbou  $e_{p-q+1}, e_{p-q+2}, \dots, e_p$ ) získanému maximalizací logaritmované *věrohodnostní funkce*

$$(65) \quad L^*(\phi_1, \dots, \theta_q) = -\frac{n-p}{2} \ln(2\pi) - \frac{n-p}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^n e_t(\phi_1, \dots, \theta_q)^2$$

<sup>3</sup> Poznámka výchozí (nelogaritmovaná) věrohodnostní funkce má tvar

$$L(\phi_1, \dots, \theta_q) = \prod_{t=1}^{n-p} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^n e_t(\phi_1, \dots, \theta_q)^2 \right\}$$

**Tabulka: Přibližné hodnoty směrodatných odchylek odhadnutých parametrů ve vybraných stacionárních a invertibilních modelech Boxovy-Jenkinsovy metodologie:**

AR(1)	$\hat{\sigma}(\phi_1) = \sqrt{\frac{1 - \hat{\phi}_1^2}{n}}$	
AR(2)	$\hat{\sigma}(\phi_1) = \hat{\sigma}(\hat{\phi}_2) = \sqrt{\frac{1 - \hat{\phi}_2^2}{n}}$	
MA(1)	$\hat{\sigma}(\theta_1) = \hat{\sigma}(\hat{\theta}_2) = \sqrt{\frac{1 - \theta_1^2}{n}}$	
MA(2)	$\hat{\sigma}(\hat{\phi}_1) = \hat{\sigma}(\hat{\theta}_2) = \sqrt{\frac{1 - \hat{\theta}_2^2}{n}}$	
ARMA(1,1)	$\hat{\sigma}(\phi_1) = \sqrt{\frac{(1 - \hat{\phi}_1^2)(1 + \hat{\phi}_1\hat{\theta}_1)^2}{n(\hat{\phi}_1 + \hat{\theta}_1)^2}}$	$\hat{\sigma}(\hat{\theta}_1) = \sqrt{\frac{(1 - \hat{\theta}_1^2)(1 + \hat{\phi}_1\hat{\theta}_1)^2}{n(\hat{\phi}_1 + \hat{\theta}_1)^2}}$

### Diagnostika modelu

Diagnostika modelu je v rámci **Box-Jenkinsovy metodologie** velmi propracovaná. Spočívá v tom, že pomocí různých diagnostických/verifikačních nástrojů ověřujeme adekvátnost sestaveného modelu (tj. prověřujeme, zda je skutečně konformní s analyzovanými daty). Přitom obvykle musíme brát v úvahu několik aspektů:

#### 1. kontrola stacionarity modelu.

Především zde kontrolujeme, zda odhadnutý model skutečně splňuje **podmínku stacionarity**, tj. zda kořeny jeho odhadnutého autoregresního polynomu leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině (resp. zda ekvivalentně jejich převrácené hodnoty, což jsou kořeny autoregresního polynomu zapsaného s opačným uspořádáním mocnin leží uvnitř takového kruhu). Je také možné řadu rozdělit do několika úseků a testovat shodnost odhadnutých úrovní, rozptylů a autokorelací (popř. momentů vyšších řádů, zejména šikmost mezi jednotlivými úseky).

Jiný postup (tzv. **impuls response**) spočívá v analýze toho, jakou odezvu má v odhadnutém modelu impuls  $\underline{m}$  (většinou standardizovaný na velikost jedno nebo vícenásobek směrodatné odchylky bílého šumu), který nastal v jediném časovém okamžiku nebo opakovaně od daného časového okamžiku a přirozeně určuje následné hodnoty procesu – odhadnutá ARMA struktura se převede do tvaru lineárního procesu (1) a od daného okamžiku se sem dosazuje **inovační proces** s jedinou nenulovou hodnotu v tomto okamžiku nebo **inovační proces** se stále stejnými nenulovými hodnotami od tohoto okamžiku. Je-li analyzovaná řada stacionární, měla by s rostoucí časovou vzdáleností od okamžiku impulsů:

**(1) odezva pro jediný impuls postupně odeznít až na nulovou hodnotu**

(2) odezva pro opakovaný impuls se stabilizovat na určité (nenulové) úrovni.

## 2. kontrola struktury ARMA procesu

Rozumí se jí především shoda korelační struktury odhadnuté z dat (tj. **autokorelační a parciální autokorelační funkce**) s korelační strukturou vypočtenou z odhadnutého modelu, který ověřujeme. Jiná kontrola struktury modelu souvisí s testováním nekorelovanosti pro vypočtený bílý šum pomocí **Q-testů**. (nazývaných také jako **portmanteau testy**)

## 3. grafická prohlídka vypočteného bílého šumu

Velmi důležitým diagnostickým nástrojem je vypočtený bílý šum  $e_t = \hat{\varepsilon}_t$  z odhadnutého modelu řady (analogicky jako rezidua v regresním model). Jeho **grafický průběh**, odhadnutý **korelogram** apod. mohou indikovat případné vady modelu (ve standardní situaci obvykle očekáváme pro vypočtený bílý šum nulovou hodnotu, konstantní rozptyl, nekorelovanost a normalitu).

## 4. Testování nekorelovanosti bílého šumu

Používá se např. **Batlettova aproximace** nebo **Q-testy**.

## Typy nestacionarity

V podstatě lze rozlišit dva základní typy nestacionarity:

1) **Deterministická nestacionarita** představovaná deterministickým trendem, např.:

$$(71) \quad y_t = \alpha + \beta \cdot t + \varepsilon_t, \text{ kde } \varepsilon_t \text{ je bílý šum s rozptylem } \sigma_\varepsilon^2$$

Po eliminaci tohoto (lineárního) trendu se řada stane stacionární (v daném případě ve formě bílého šumu).

2) **Stochastická nestacionarita** představovaná určitým typem stochastického procesu pro  $y_t$  nebo  $\varepsilon_t$ , např.  $AR(1)$ :

$$(72) \quad y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ kde } \varepsilon_t \text{ je opět bílý šum s rozptylem } \sigma_\varepsilon^2, \text{ kde se obvykle předpokládá, že } \varepsilon_t \approx i.i.d.$$

**Nestacionaritu (72) lze v jistých případech modelovat pomocí speciálních stochastických modelů a s využitím těchto modelů následně stacionarizovat. Konkrétně model (72) je tzv. náhodná procházka s driftem [random walk with drift]. Příslušnou časovou řadu lze v tomto případě jednoduše stacionarizovat přechodem k řadě prvních diferencí  $\Delta y_t$ , protože dle modelu (71) je**

$$(73) \quad \Delta y_t = \alpha + \varepsilon_t, \text{ tzn. jedná se o bílý šum posunutý na úroveň } \alpha, \text{ což je evidentně stacionární řada. Podstata stochastické nestacionarity modelu (72) je ale lépe viditelná při jeho přepisu do tvaru}$$

$$(74) \quad y_t = y_1 + \alpha \cdot (t-1) + \sum_{\tau=2}^t \varepsilon_\tau.$$

Řada má tedy nejen deterministický trend (zde lineární se sklonem  $\alpha$ ), ale také stochastický trend spočívající v postupné kumulaci hodnot bílého šumu.



Interpretačně zajímavé jsou také podmíněné hodnoty:

$$(75) \quad E(\Delta y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1) = \alpha$$

$$(76) \quad E(y_t | y_1) = y_1 + \alpha \cdot (t-1), \quad \text{var}(y_t | y_1) = \sigma^2 (t-1) \quad \text{corr}(y_{t-k}, y_t | y_1) = \sqrt{\frac{t-k-1}{t-1}} :$$

ověření:  $E(y_t | y_1) = E\left(y_1 + \alpha \cdot (t-1) + \sum_{\tau=2}^t \varepsilon_\tau | y_1\right) = y_1 + \alpha \cdot (t-1) + \sum_{\tau=2}^t (E\varepsilon_\tau = 0) = y_1 + \alpha \cdot (t-1)$

ověření:  $\text{var}(y_t | y_1) = \text{var}\left(y_1 + \alpha \cdot (t-1) + \sum_{\tau=2}^t \varepsilon_\tau | y_1\right) = \text{var}\left(\sum_{\tau=2}^t \varepsilon_\tau | y_1\right) = \sum_{\tau=2}^t (\text{var} \varepsilon_\tau | y_1) = \sigma^2 (t-1)$

ověření:  $\text{corr}(y_{t-k}, y_t | y_1) = \text{corr}\left(y_1 + \alpha \cdot (t-k-1) + \sum_{\tau=2}^t \varepsilon_{\tau-k} | y_1, y_1 + \alpha \cdot (t-1) + \sum_{\tau=2}^t \varepsilon_\tau | y_1\right) =$   
 $\text{corr}\left(\sum_{\tau=2}^t \varepsilon_{\tau-k} | y_1, \sum_{\tau=2}^t \varepsilon_\tau | y_1\right) = \sqrt{\frac{t-k-1}{t-1}}$

Ze vztahu (75) je vidět, že řada má tendenci nevracet se k předchozí úrovni, ale v průměru směřovat k vyšším hodnotám pro  $\alpha > 0$  nebo k nižším hodnotám pro  $\alpha < 0$ . I kdyby platilo  $\alpha = 0$ , pak tato náhodná procházka bez driftu protne na rozdíl od bílého šumu vodorovnou osu s nulovou úrovní jen zřídka. Ze vztahů (76) zase vyplývá, že střední hodnota a rozptyl (volatilita) této řady jsou neomezené, zatímco autokorelační funkce má hodnoty velmi blízké jedné a k nule klesá tempem pomalejším než lineárním.

**Poznámka 1** Uvažujme poněkud obecnější zápis vztahu (72)

$$(72^*) \quad y_t = \alpha + \phi_1 \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t .$$

Je patrné, že (72\*) je speciální zápis (72\*) při  $\phi_1 = 1$ . Je-li  $\phi_1 < 1$ , pak se zřejmě jedná o stacionární proces  $AR(1)$  s nenulovou střední hodnotou  $\mu = \frac{\alpha}{1-\phi_1}$

$$(77) \quad y_t - \mu = \phi_1 \cdot (y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t . , \text{ který lze také přepsat pomocí prvních diferencí jako}$$

$$(78) \quad \Delta y_t = (\phi_1 - 1) \cdot (y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t .$$

Pro podmíněnou střední hodnotu (75) stacionárního procesu  $AR(1)$  tedy zřejmě platí:

$$(79A) \quad E(\Delta y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) < 0 \text{ pro } y_{t-1} > \mu ,$$

$$(79B) \quad E(\Delta y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) > 0 \text{ pro } y_{t-1} < \mu , \text{ tzn. na rozdíl od } \mathbf{náhodné}$$

**procházký s driftem** má nyní proces tendenci nedriftovat a vracet se k předchozí úrovni [tzv. **mean reverting**]. Konečně zbývající případ  $|\phi_1| > 1$  je již velmi neobvyklý a specifický, minimálně se vyskytující v reálných situacích: v tomto případě se jedná o **explozivní proces** [tzv. **explosive process**], který roste s mocninami  $\phi_1^k$  - např. proces  $y_t = 3y_{t-1} + \varepsilon_t$  začne být od určitého času  $t$  srovnatelný s deterministickou posloupností  $3^t$  bez ohledu na tvar bílého šumu  $\varepsilon_t$ .

**Poznámka 2** Pro předchozí modely ještě jednou odlišnost jejich stacionarizace:

V modelu (71)  $y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$  s deterministickým trendem pro dosažení stacionarity stačí pomocí regrese eliminovat trend. Diferencování by se zde pro stacionarizaci nemělo používat, neboť vede k modelům s reziduální složkou ve tvaru (neinvertibilního) MA-procesu

$$(80) \quad \Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

V modelu (72)  $y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t$  náhodné procházky s driftem stačí pro dosažení stacionarity jednou diferencovat. Pokud jde o případnou regresní eliminaci stochastického trendu, není zde jasné, co vlastně eliminovat. Mohli bychom sice přejít k ještě obecnějšímu rozšíření modelu (77) do tvaru

$$(77^*A) \quad y_t = \alpha + \beta t + \phi_1 \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \text{ . nebo } \Delta y_t = \alpha + \beta t + (\phi_1 - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t$$

s deterministickým i stochastickým trendem, ale zde by případná eliminace trendu pomocí regrese narazila na již zmíněný problém, že t-poměr nemusí mít (ani asymptoticky) t-rozdělení Model (77\*) se také zapsat ve tvaru

$$y_t - \beta_0 + \beta_1 t = \phi_1 (y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 (t-1)) + \varepsilon_t \text{ , kde } \beta_1 = \frac{\beta}{1 - \phi_1} \text{ , } \beta_0 = \frac{\alpha - \phi_1 \beta_1}{1 - \phi_1} \text{ ,}$$

tzn., že speciálně při  $|\phi_1| < 1$  se vlastně jedná o stacionární AR(1) proces s lineárním trendem.

### Testy na jednotkový kořen [unit root tests]

Možnost stacionarizace časové řady pomocí diferencování svědčí o přítomnosti (přibližně) jednotkového kořene v autoregresním operátoru příslušného modelu. Např. v modelu (72) má autoregresní operátor zřejmě jako svůj jediný kořen právě kořen rovný 1. Rozhodnutím o přítomnosti takového jednotkového kořene (nebo vícenásobného) je často klíčovým bodem analýzy. Na přítomnost jednotkového kořene by asi bylo možné soudit z tvaru odhadnutého korelogramu, kdy indikací jeho přítomnosti je velmi pomalý pokles korelogramu od jednotkové hodnoty k nule (jednotlivé odhadnuté autokorelace s rostoucí délkou řady konvergují v nestacionárním modelu k jedné). Protože ale subjektivním pohledem na korelogram by se nedaly odlišit nestacionární modely typu  $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$  od stacionárních s téměř jednotkovým kořenem  $y_t = 0,96 y_{t-1} + \varepsilon_t$ , je žádoucí použít vyvinuté statistické testy na příslušné hladině významnosti.

### Dickey-Fullerův test

**Dickey-Fullerův test** byl prvním z testů vyvinutých pro testování jednotkového kořene. Přitom byly navrženy tři jeho verze označované souhrnně jako  $\tau$ -testy.

(1)  $\tau$ -test tvaru  $H_0 : y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$  proti alternativě  $H_1 : y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$  pro  $\phi_1 < 1$ , tzn. *jednostranný test náhodné procházky proti stacionárnímu AR(1) procesu*, neboť případná nestacionarita při  $\phi_1 \leq -1$  je v realitě málo významná.

(2)  $\tau$ -test tvaru  $H_0 : y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$  proti alternativě  $H_1 : y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$  pro  $\phi_1 < 1$ , tzn. **jednostranný test náhodné procházky proti  $AR(1)$  procesu s nenulovou hladinou.**

(3)  $\tau$ -test tvaru  $H_0 : y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$  proti alternativě  $H_1 : y_t = \alpha + \beta.t + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$  pro  $\phi_1 < 1$ , tzn. **jednostranný test náhodné procházky proti  $AR(1)$  procesu s lineárním trendem.**

Zápis nulové hypotézy je pro všechny tři vyšetřované případy tentýž, tzn.:

$$(81) \quad H_0 : \Delta y_t = \psi \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{při } \psi = 0 ,$$

zatímco obecný zápis alternativy je

$$(82) \quad H_1 : \Delta y_t = \alpha + \beta t + \psi \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{při } \psi < 0 ,$$

kde  $\psi = \phi_1 - 1$  a

$$(1) \quad \alpha = \beta = 0$$

$$(2) \quad \beta = 0$$

Přitom v případě alternativ (2) nebo (3) jde jen o to, zda  $\psi < 0$  a vůbec nás nezajímá případná významnost úrovně konstanty  $\alpha$  ani parametru sklonu  $\beta$ , tím spíše ne jejich číselné hodnoty, které by při výskytu *nestacionarity* stejně nemusely být korektně spočteny.

Testovou statistikou je ve všech třech variantách **Dickey-Fullerova testu** klasický **t-poměr** (prostě se testuje významnost regresního parametru  $\psi$  v modelu (81) tzn.

$DF = \frac{\hat{\psi}}{\hat{\sigma}(\hat{\psi})}$ , kde odhady parametrů získáme metodami získanými dříve a s kritickým oborem

$$DF \leq t_{1-\alpha}^*(n) .$$

Zde však (za platnosti nulové hypotézy stacionarity) statistika DF nemá (a to ani asymptoticky a ani při platnosti  $\varepsilon_t \approx i.i.d.$ ) t-rozdělení jako v případě klasického t-poměru, ale má nestandardní (a nepojmenované) rozdělení, pro které bylo nutné kritické hodnoty naprogramovat simulačně a zvláště pro jednotlivé typy alternativ (1),(2),(3) a pro různé délky řad n. viz tabulka níže.

Obecně zde platí, že dané rozdělení má tlustší konce než příslušné *t-rozdělení*, takže jeho kritické hodnoty jsou v absolutní hodnotě více než dvojnásobně v porovnání s odpovídajícími hodnotami t-rozdělení.

Např. 5% kritická hodnota a při  $n \rightarrow \infty$  je kritická hodnota -3,41 v absolutní hodnotě více než 2x větší než adekvátní kritická hodnota -1,645 po klasický t-test), tj. pro zamítnutí nulové hypotézy  $\psi = 0$  proto potřebujeme významnější hodnotu t-poměru (pracujeme totiž s nestacionárním regresorem). Kritické hodnoty uvedli poprvé již **Dickey a Fuller**, většina software ale využívá sofistikovanější výpočet odpovídajících p-hodnot podle **McKinnona [1996]**.

hladina významnosti	10%=0,1	5%=0,05	1%=0,01
kritické hodnoty pro $\tau$ -test	-1,62	-1,95	-2,58
kritické hodnoty pro $\tau_\mu$ -test	-2,57	-2,86	-3,43
kritické hodnoty pro $\tau_\tau$ -test	-3,12	-3,41	-3,96

### Rozšířený Dickey-Fullerův test

Předchozí test je aplikovatelná jen tehdy, jestliže reziduální složka představuje nezávislý bílý šum. Jestliže závisle proměnná  $\Delta y_t$  obsahuje autokorelovanost, která není v modelu – řádně zohledněna, potom má **DF-test** chybu prvního druhu (tj. pravděpodobnost zamítnutí  $H_0$ ) větší než deklarované  $\alpha$ . Pro takový případ byl navržen **Rozšířený Dickey-Fullerův test (ADF-test)** [augmented DF-test], který místo (81) formuluje nulovou hypotézu jako

$$(83) \quad H_0 : \Delta y_t = \psi \cdot y_{t-1} + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{pro} \quad \psi = 0 ,$$

Přičemž testová statistika a kritické hodnoty pro jednotlivé varianty (1),(2),(3) tj. po  $\tau$ -test,  $\tau_\mu$ -test,  $\tau_\tau$ -test zůstávají stejné jako před rozšířením (test se opět týká jen parametru  $\psi$ , přidané autoregresní členy v jen absorbují dynamickou strukturu obsaženou v závisle proměnné. Pro stanovení řádu p přidaných autoregresních členů se doporučuje aplikovat informační kritéria uvedená výše.

### Phillipsův-Perronův test

PF\_test je podobný ADF -testu s tou odlišností, že zohlednění případné neautokorelovanosti reziduí se neprovádí rozšířením o autoregresní člen jako tam, ale přímo korekcí odhadnuté směrodatné odchylky ve jmenovateli původního **DF-testu**. V podstatě se jedná o aplikaci **Neweyové-Westova odhadu** typu HAC (typu **heteroskedasticity and autocorrelation consistent estimator**), jako v případě autoregresního modelu s autokorelovanými reziduy.

### KPSS-test [Kwaitkovski, Phillips, Schmidt, Shin [1992]

Tento test reaguje na skutečnost, že **DF-test** někdy mívá slabou rozlišovací schopnost. Má-li teoretický model tvar  $y_t = 0,96y_{t-1} + \varepsilon_t$ , pak by nulová hypotéza jednotkového kořene měla být zamítnuta. Nelze-li ji zamítnout, pak to korektně znamená, že buď opravdu platí nestacionarita nebo že máme k zamítnutí jen nepostačující informaci (např. jen krátký úsek řady  $y_t = 0,96y_{t-1} + \varepsilon_t$ ). **KPSS-test** byl proto navržen tak, že hypotézy  $H_0$ ,  $H_1$  mají tvar přesně opačný, než jak je tomu u **ADF-testu** (jako nulová se testuje stacionarita vůči alternativní hypotéze nestacionarity). Přitom se doporučuje provádět **ADF-test** a **KPSS-test** vždy simultánně a za směrodatný brát pouze takový výstup, kdy

(a)  $ADF H_0$  se zamítá a současně  $KPSS H_0$  zamítnout nelze (v tom případě je potvrzena stacionarita)

(b)  $ADF H_0$  nelze zamítnout a současně  $KPSS H_0$  se zamítá (v tom případě je potvrzena nestacionarita). Zbývající dvě kombinace výsledků se berou jako neprůkazné. Uvedené testy na jednotkový kořen (včetně dalších bývají součástí moderních softwarových testovacích systémů).

### Proces ARIMA

Pro časové řady se stochastickým trendem typu (72), které lze stacionarizovat diferencováním, jsou v rámci Box-Jenkinsovy metodologie určeny procesy ARIMA.

**Integrovaný smíšený proces řádu**  $p, d, q$  značený jako  $ARIMA(p, d, q)$  [integrated] má tvar

$$(84) \quad \phi(B)w_t = \alpha + \theta(B)\varepsilon_t.$$

$$(84A) \quad w_t = \Delta^d y_t.$$

je  $d$ -tá diference časové řady  $y_t$ . a tento proces je stacionární (i invertibilní) model  $ARIMA(p, q)$ . Jiným i slovy: V takovém modelu ARIMA se nejprve provede stacionarizace pomocí vhodné difference modelované řady a takto vzniklá již stacionární řada se modeluje pomocí smíšeného modelu ARMA. Nežřídkou se ovšem pro  $ARIMA(p, d, q)$  volí souhrnný zápis tvaru

$$(85) \quad \phi(B)\Delta^d y_t = \alpha + \theta(B)\varepsilon_t.$$

Speciálním případem je **integrováný  $I(d)$  proces** zapisovaný obvykle v jednoduchém tvaru  $\Delta^d y_t = \varepsilon_t$ , který vlastně vzniká načítáním bílého šumu /odtud „integrováný“) např. pro  $d = 1$  je

$$(86) \quad y_t = y_1 + \sum_{\tau=2}^t \varepsilon_\tau.$$

**Poznámka3:** Tzv. **driftový parametr**  $\alpha$  modeluje případnou nenulovou úroveň procesu  $w_t$  tj. deterministický trend ve tvaru polynomu  $d$ -tého řádu pro původní řadu  $y_t$ . Pro  $\alpha = 0$  a  $d > 0$  je model ARIMA pro řadu  $y_t$  invariantní vůči případnému posunu řady o libovolnou konstantu. Proto je v tomto případě zbytečné řadu modelovanou jako ARIMA nejprve centrovat odečtením výběrového průměru.

**Poznámka4:** Operátor  $\phi(B)\Delta^d$  na levé straně (85) se někdy nazývá **zobecněný autoregresní operátor**. Je pro něj charakteristické to, že odpovídající polynom  $\phi(z)\Delta^d$  má  $p$  kořenů ležících vně jednotkového kruhu v komplexní rovině a navíc  $d$ -násobný jednotkový kořen. Obecnějším typem jsou modely ARUMA, které mají aspoň jeden z těchto kořenů na jednotkové kružnici, ale různý od jednotkového kořene, a explozivní modely, které mají aspoň jeden z těchto kořenů uvnitř jednotkového kruhu.

**Konstrukce modelu**  $ARIMA(p, d, q)$  je založena na tvorbě stacionárního modelu  $ARMA(p, q)$  pro příslušně diferencovanou časovou řadu (přitom ale nesmíme opomenout případnou počáteční transformaci řady za účelem její linearizace, která se provádí ještě před diferencováním). Řád diferencování  $d$  přitom v realitě obvykle nepřekročí dvojku (rutinní časové řady ekonomického a finančního charakteru obvykle mívají  $d = 1$  a speciálně řady spotřebitelských indexů či nominálních mezd mohou někdy mít  $d = 2$ ). Možností, jak stanovit řád diferencování  $d$  pro analyzovanou řadu, jsou zejména:

- *testy na jednotkový kořen*
- *subjektivní prohlídka řad  $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$  a jejich odhadnutých korelogramů a parciálních korelogramů* – speciálně pomalý (lineární) pokles odhadnutých autokorelací je indikací pro další diferencování řady
- *porovnání výběrových směrodatných odchylek (**volatilit**) řad  $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$*
- volí se ten řád diferencování, který odpovídá případu s nejmenší **volatilitou**; při vyšších hodnotách se však volatility mohou začít s navyšováním  $d$  růst a mluví se pak o tzv. **prediferencování**.
- aplikace **informačních kritérií** modifikovaných pro modely  $ARIMA$ .