**Metoda exponenciálního vyrovnávání[[1]](#footnote-1)**

**[R.G.Brown - R.F.Meyer]**

**Je dalším z  přístupů, který je řazen** (vedle metody klouzavých průměrů) **k adaptivním technikám určení trendové složky časové řady .**

***Výchozí úvahou této techniky je, že se k predikci nové hodnoty časové řady :***

***a) berou v úvahu všechna dostupná pozorování časové řady***

***b) starší pozorování jsou z hlediska síly ovlivnění aktuálních předpovědí***

***brána s nižší významností než pozorování nová (aktuální).***

**Váhová struktura, která je při *Brownově exponenciálním vyrovnávání* uplatněna, je představována geometrickým rozdělením. Váhy jsou tedy stanoveny podle vzorce**

**(1) ****

**Je patrné, že váhy splňují podmínku , neboť**

****.**

# **Nechť nepřekvapí, že váhová struktura se řídí rozdělením, které je definováno na neomezeném oboru, přestože počet pozorování časové řady, kterým jsou váhy přiřazovány je vždy konečný -** z matematického hlediska nepředstavuje tato okolnost žádný problém.

*Název exponenciální by odpovídal zespojitění situace, neboť obdobou diskrétního geometrického rozdělení je ve spojitém případě rozdělení exponenciální. Název tedy nemá nic společného s exponenciálním průběhem trendu.*

**Podobně jako *metoda klouzavých průměrů* je i *exponenciální vyrovnávání*  založeno na lokáním vyrovnání časové řady jednoduchou matematickou křivkou** (na rozdíl od metody klouzavých průměrů se však vzatá pozorování neváží „symetricky„).

***Podle typu vyrovnávající křivky rozlišujeme tři základní verze tohoto postupu :***

**1. Jednoduché (konstantní) exponenciální vyrovnávání (lokálně vyrovnávající**

**křivkou je** po částech ***konstantní funkce*).**

**2. Dvojité (**také **lineární) exponenciální vyrovnávání (zde je lokálně vyrovnávající**

**křivkou *lineární funkce*).**

**3. Trojité (**také **kvadratické) exponenciální vyrovnání (uplatňuje se parabola 2.**

**stupně lokálně vyrovnávající křivkou *kvadratická funkce*)**

## Všechny verze exponenciálního vyrovnávání se opírají o následující úvahu :

**V kterémkoliv bodě (pevně zvoleném okamžiku *t* ) máme k dispozici jednak :**

**- poslední pozorování analyzované časové řady,** tedy  ****

**- předpověď téhož pozorování** ** **(určenou** dříve **na základě předtím**, tj. do

času t-1 **dostupných pozorování, tedy do hodnoty včetně).**

## Předpověď pro “opravenou hodnotu“ tedy nyní vytvořme pomocí váženého průměru

**(2)** 

## tzn. že nová předpověď je konstruována jako vážený aritmetický průměr skutečné hodnoty “nového” pozorování a „staré„ předpovědi tohoto pozorování yt\* (při informaci dostupné do okamžiku t-1 včetně). Hodnota “váhové” konstanty α rozhoduje o tom, které z obou uplatňujících se informací přisoudíme větší význam (resp. v jaké proporci budeme tyto informace brát).

**Opakovanou substitucí dostáváme ze vztahu (2) výraz**





 atd., až po

**(3)** 

**Při dostatečně velkém n** (teoreticky pro n → ∞ ) **dospějeme k nekonečnému součtu**

**(4) * ,* což je**

**vlastně *aritmetický průměr*** (o nekonečném počtu členů) ***„vyrovnaných hodnot“* s vahami ve tvaru (1) .**

###### Výraz (2) , kde je vyrovnávací konstanta

###### lze dále jednoduchou úpravou přepsat na tvar

,

**který bývá nazýván jako chybový či korekční:**

**pro opravu předchozí vyrovnané hodnoty  použijeme (jakmile dostaneme pozorování  ) příslušně upravenou chybu předpovědi  o jeden krok dopředu (konstruovanou v čase t -1)**

**(2´)  ** , kde **

**což lze interpretovat tak, že novou předpověď  pro  dostaneme jako součet**

***skutečné hodnoty pozorování*  a určitého (100**x**α) procentního podílu chyby**

**předpovědi  téže veličiny  určené na základě informací známých jen do minulého období *t-1*** (predikce je sestrojená toliko z hodnot ) **.**

## Důležitou otázkou je v tomto kontextu volby „vyrovnávající konstanty„ α: zpravidla se omezujeme na rozsah mezi (0,1 – 0,3). Někdy je však vyrovnávací konstanta pojímána jako doplněk do 1, stanoví se tedy . Čím je hodnota blíže k 1 tím váhy přiřazované jednotlivým pozorováním směrem do minulosti klesají pomaleji.

## O rychlosti klesání dává představu toto srovnání s konstantou :

## k = 1 2 3 4 5 6 10

## Srovnejme: 0,9 0,81 0,729 0,6561 0,59049 0,531441 ………………... 0,34868

**0,8 0,64, 0,512 0,4096 0,32768 0,262144 ………………... 0,1342177**

**0,7 0,49, 0,343 0,2401 0,16807 0,117649 ………………... 0,02709**

### Zatímco podíl vah u nejčerstvějších (nezpožděných) pozorování je 9/7 = 1,2857 : 1, je u desátých pozorování (tj. se zpožděním 9) tento poměr již 0,3487/ 0282 tj. 12,34/1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0,7 | 0,49 | 0,343 | 0,2401 | 0,16807 | 0,117649 | 0,082354 | 0,057648 | 0,040354 | 0,028248 |
| 0,9 | 0,81 | 0,729 | 0,6561 | 0,59049 | 0,531441 | 0,478297 | 0,430467 | 0,38742 | 0,348678 |

#### Přirozenou otázkou je, zda existují užitečná vodítka pro určení konstanty α :

##### **a) Pravidla vyvozená ze statistických požadavků na odhady** obecně **:**

##### **a1) Jedna možnost vychází z volby vyrovnávací konstanty ze vztahu**

**(5)**  pro n v rozsahu 6-20**, odkud pro******dostaneme (5A)**

**vyvození: přechod od (5) k (5A):**

** odtud  dále  a následně  □ .**

**n=4:  n=6:  n=8: **

**n=10:  n=14:  n=18 **

##### **a2)** Další z možností vychází z variantního modelu **(vyrovnání parabolou k-tého řádu), na základě kterého se volí α0 tak, aby vyhovovalo vztahu**

##### **(6) αk** je tzv. **ekvivalentní vyrovnávací konstanta.**

##### **a3)** Ještě jiná možnost vychází z**nejlépe vyrovnávajícího** (pozorované hodnoty časové řady) **klouzavého průměru délky . Pak se stanoví** **jako**

##### **pro konstantní/jednoduché exponenciální vyrovnávání** a stejně tak

**(7A) pro dvojité exponenciální vyrovnávání (klouzavý průměr) **

**(7B) pro trojité exponenciální vyrovnávání 2 , kde**

##### **je délka (počet členů) nejlépe vyrovnávajícího klouzavého průměru .**

##### **b) Simulační způsob: interval 0,7 - 1 se rozdělí např. na 30 úseků po 0,01, provedou se predikce na několik kroků dopředu, spočte se průměrná** nebo střední **kvadratická chyba predikce a vyhledá se taková hodnota** **, při které je tato chyba predikce nejmenší.**

Poznámka: Výpočtové vzorce (zejména *u trojitého exponenciálního vyrovnávání*) jsou již natolik (technicky) složité, že je uživatel zpravidla odkázán na některý ze softwarových produktů určených k analýze časových řad, které zpravidla všechny tři verze exponenciálního vyrovnávání obsahují. Proto je daleko vhodnější pořídit si příslušné software *(STATGRAPHICS, SPSS, RATS apod.)*, než pracně počítat hodnoty vyrovnání a předpovědí (rekurentně) tabulkovými procesory, kalkulačkou nebo dokonce ručně.

**Komparační zhodnocení: čím je vyrovnávací konstanta  vzdálenější od 1** (tedy blíže k nule)**, tím je vyrovnání flexibilnější a provedená následná predikce vykazuje vyšší rozkolísanost.**

**Podobný rys vykazuje také *trojité exponenciální vyrovnávání* ve srovnání s *dvojitým* a zejména vůči  *jednoduchému*, které dává velmi rigidní předpovědi (tj. po částech konstantním trendem) .**

**1. Jednoduché (konstantní) exponenciální vyrovnávání**

**Formulace modelu je založena na představě, že pro dané pevné  a hodnoty zpoždění  lze uplatnit konstantní trend tvaru**

**(11) ** pro **j = 0, 1, 2, 3, …., kde**

** je** (jediný) **neznámý parametr. Tato domněnka** (o konstantnosti vývoje) **není příliš realistická, avšak jednoduchost modelu (11) umožňuje přiblížit postup odhadu parametrů . i u složitějších modelů.**

**Výchozím předpokladem modelu (11) je tedy trend ve tvaru *po částech konstantní funkce*.**

## Minimalizační kritérium má zde tvar

**(12) **

**ve kterém se uplatňuje trendový model tvaru (** tedy ***konstantní trend* ).**

**Odhad parametru realizovaný *váženou metodou nejmenších čtverců* (*WLS*) je** pak **dán vztahem**

**(13) **

**ověření: Derivací výrazu (12) podle  dostaneme:**

**(12A) **

**Upravíme-li krácením  a položíme-li derivaci rovnou nule, dostaneme**

**(12A) **

**Pak s využitím toho, že součet řady , obdržíme (13). .**

U tohoto typu mohou být vysloveny námitky, že model s konstantním trendem (11) je pro většinu reálných situací stěží použitelný, poněvadž trend časové řady se zpravidla vyvíjí jiným způsobem než *po částech konstantní funkcí*.

**(14) vyrovnání pro aktuální období  : **

**(15) predikce na τ období dopředu  : **

*Předpovídané hodnoty na libovolné období dopředu jsou tedy shodné s poslední pozorovanou hodnotou (je zřejmé, že tato zásada není vhodná pro situace, kdy časová řada vykazuje jakýkoliv znatelný trend).*

**Lze ještě užít tzv. *chybový vzorec:***

**(14A) **

**Volba vyrovnávací konstanty  pro jednoduché exponenciální vyrovnávání: Omezujeme se zde zpravidla na interval  a** podobně jako pro dvojité se užívá

**a) fixní volba  nebo  .** (Volba  se téměř neužívá.)

**b) volba , kde  je délka klouzavých průměrů adekvátní této řadě (odvozena z požadavku, aby tzv. *střední věk vah* jednoduchých klouzavých průměrů této délky, tj.  a střední věk vah jednoduchého exponenciálního vyrovnávání, tj.  byly shodné. Přístup ale není ideální, protože stejně musíme vyjít z vhodné délky klouzavého průměru.**

**c) Jako možné hodnoty  se vezmou hodnoty z intervalu  a vybere se ta hodnota, která nejlépe predikuje ve smyslu minimální hodnoty *SSE*.**

** předpovědní interval pro jednoduché exponenciální vyrovnávání**

**V případě, že rozdělení náhodné složky uvažované řady je alespoň přibližně normální, lze v rámci exponenciálního vyrovnávání vedle bodových předpovědí konstruovat také předpovědní intervaly. Jako  předpovědní interval pro jednoduché vyrovnávání se doporučuje konstruovat interval ve tvaru**

**(16)  , kde**

**libovolné  je**

** .... kvantil normovaného normálního rozdělení**

** definováno jako  sloužící k převodu ** na **.**

**** je *střední absolutní chyba*** *vyrovnání***, tedy ****

***2. Dvojité (lineární) exponenciální vyrovnávání***

**Formulace modelu je založena na představě, že pro dané pevné  a hodnoty zpoždění  lze uplatnit lokálně lineární trend tvaru**

**(21) ** pro ***j = 0, 1, 2, 3, ….***

## Minimalizační kritérium má v tomto případě tvar

**(22) **

***ve kterém se uplatňuje lineární trendový model tvaru* .**

**Výchozím předpokladem modelu (22) je** tedy **trend ve tvaru *po částech lineární funkce*.**

## V tomto případě jsou předmětem odhadu dva parametry - jako odhad parametru - a -jako odhad parametru .

**Odhad** obou **parametrů *v* (22) *získáme řešením soustavy normálních rovnic***

**(25A) ****

**(25B) ****

**ověření platnosti (25A), (25B): Derivací výrazu (22) podle  dostaneme**

**(23A) **

**Podobně, derivací výrazu (22) podle  dostaneme obdobně:**

**(23B) **

**Upravíme-li (23 A) a položíme-li příslušnou derivaci rovnou nule:**

**(24A)  , neboli**

**(24A\*) **

**a s využitím toho, že součet řady  a součet řady **

**obdržíme **

**a následně vynásobením  získáme (25A) .**

**Krátíme-li (23B) výrazem  a položíme-li levostrannou derivaci rovnou nule:**

**(24B)  .**

**Výrazy s neznámými  přemístíme v rovnici nalevo**

**(24B\*) **

**a s využitím toho, že součty řad , **

**máme  , což**

**po vynásobení  dává (25B). .**

Máme tedy soustavu dvou *normálních* rovnic pro výpočet parametrů , 

**(25A) ****

**(25B) ****

**kterou můžeme vyjádřit v maticovém tvaru**

**(26)** , **takže**

**(27) , kde**

**determinant matice soustavy (27) je roven . Takže**

**(28)  ,**

**načež po roznásobení determinantem matice**

**(29) .**

**Odtud máme výsledné výrazy pro odhadované parametry**

**(30A) ****

**(30B) ****

**Přímý (alternativní nematicový) výpočet parametrů ze soustavy (25A), (25B):**

**(25A) ****

**(25B) ****

**Vyjděme z (25A), (25B) a vyjádřeme z obou těchto vztahů např. :**

**(31A) ****

**(31B) ****

**Porovnáme obě strany a máme**

******

***,* odečteme**

***,***

******

**a dostaneme výsledný výraz pro **

******

**Pro výpočet druhého parametru  nyní užijeme vztah (31A):**

******

**a postupnými substitucemi dostaneme**

**tedy ****

**tedy ****

**tedy ****

**tedy ****

**tedy ****

**tedy ****

**tedy **  .**

**Pokud pracujeme s konečným počtem pozorování, dostaneme soustavu normálních rovnice ve tvaru:**

**(35A) ****

**(35B) ****

Jejím řešením dostaneme odhady parametrů ve tvaru

**(35A) ****

**(35B) *.***

**Srovnání výsledných odhadů s ( ), ( ) dostaneme takto:**

**Vyčíslíme výrazy bez ypsilonových členů s využitím toho, že platí**

**(61)  , (62)  , (63) **

**Výraz ve jmenovatelích (35A) (35B) je rovný**



**Potom dle (35A)**

****

****

****

****

**a podle (35B)**

****

******

**Ta je srovnatelná s (25A), (25B) , protože pokud n je dostatečně velké, lze nahradit**

**(36A) ****

**(36B) . tj.**

**(37A) ****

**(37B) , což po vynásobení**

**první rovnice  a druhé rovnice  dává přesně**

**(25A) **

**(25B) . .**

**Zavedeme-li pomocné veličiny**

**(51a) **

**(51b) , nebo též **

***lze zapsat výsledné odhady parametrů  také jako***

**(26A)  **

**(26B) **

***V případě dvojitého a trojitého exponenciálního vyrovnávání je užitečné definovat dvě*** *tzv.* ***"vyrovnávací statistiky" : viz CIPRA se záměnou gama za beta:***

**(16a) ** jednoduchá vyrovn. statistika

**(16b) ** dvojitá vyrovnávací statistika

***Pro tyto vyrovnávací statistiky platí následující vztahy :***

**(17a) **

**(17b)  **

**ověření (17a),(17b):**

**Rozvedením prvních dvou členů definičního výrazu (16a) dostaneme:**

** ,**

**přičemžjsme užili dosazení  , z čehož **

**Definiční výraz (16b) lze podobně dekomponovat jako**

** □.**

***se stejnou substitucí indexů j a k.***

**Výpočet obou těchto statistik se provádí rekurentně počínaje .**

**Má přitom platit**

**(26A)    tj. **

**(26B)  tj. **

**tj.   □ .**

**ověření (18a):**

**Z (26A), (26B) můžeme naopak vyjádřit obě vyrovnávací statistiky:**

** a tedy **

** a tedy  neboli **

**a následně porovnáním  tj **

**a následně **

**srovnejme s (26A)  **

**a s (26B)   , takže si to plně odpovídá.**

**vyrovnání pro aktuální období * :***

**(24) **

predikce na τ období dopředu *je dána vztahy*

**(25)  neboli**

**(25a) **

***Model dvojitého exponenciálního vyrovnávání* (21) *je*** *pro řadu situací* ***dobrým predikčním nástrojem, pokud se při volbě vyrovnávací konstanty řídíme některým z výše uvedených pravidel.***

***Při výpočtu statistik  postupujeme rekurentně, přičemž jejich počáteční hodnoty pro***  ***získáme ze vztahů :***

**(26A)  **

**(26B)  **

***Počáteční hodnoty odhadů  získáme prostou lineární regresí tak, že několik*** *(cca 6-10)* ***počátečních pozorování řady proložíme regresní přímkou. **je*** *příslušná* ***úrovňová konstanta, je parametr sklonu regresní přímky.***

**(22) **

**Derivací výrazu (22) podle  a jeho anulováním dostaneme:**

** krátíme výrazem **

****

** .**

**Výrazy s neznámými přemístíme nalevo**

** což zapíšeme jako**

****

**Protože dle (52) , u neznámé  máme člen **

**Dále dle (53)  u neznámé  máme**

****

**Tedy **

** (12B) ****

**Volba vyrovnávací konstanty: omezujeme se zde zpravidla na interval  a** podobně jako pro jednoduché se užívá

**a) fixní volba , kde  je délka klouzavých průměrů adekvátní**

**b) pro danou řadu (vyplývá opět z porovnání středních věku vah jednoduchých klouzavých průměrů a vah dvojitého exp. vyrovnávání).**

**c)Jako vhodné hodnoty  se vyšetří hodnoty z intervalu  a vybere se ta hodnota, která nejlépe predikuje ve smyslu míry *SSE*.**

**Jako  předpovědní interval se doporučuje konstruovat ve tvaru**

** , kde pro**

**libovolné  je  definováno jako**

****

**Výpočetní postup (zde pro dvojité exponenciální vyrovnávání) je tedy následující:**

**Nejprve se určí dvojice počátečních parametrů , a to** nejčastěji **prostou lineární regresí tak, že několik** (cca 5-9) **počátečních pozorování řady proložíme regresní přímkou: je** regresí spočtená **úrovňová konstanta, je parametr sklonu regresní přímky.**

**Poté následuje dle výrazu (26A) výpočet počáteční jednoduché vyrovnávací statistiky  a dle výrazu (26B) výpočet počáteční dvojité vyrovnávací statistiky  .**

**(26A)  **

**(26B)  **

**Následně postupně konstruujeme posloupnosti jednoduchých a dvojitých vyrovnávacích statistik  a  dle rekurentních vztahů (17a) a (17b).**

**(17a) **

**(17b)  **

**Posloupnosti obou parametrů  a  , které slouží k výpočtům vyrovnaných, resp. předpovídaných hodnot pomocí dvojitého exponenciálního vyrovnání nakonec obdržíme ze vztahů**

**(26A), (26B) , .**

**Predikce (pro každé pevné *t*) konstruujeme (při znalosti obou parametrů pro dané *t*)**

**již snadno pomocí predikčního schématu vycházejícího z (21), tj.:**

** pro * .***

**3. Trojité (kvadratické) exponenciální vyrovnávání**

**je třetím užívaným typem exponenciálního vyrovnávání, které se uplatňuje především u časových řad vyznačujících se ve svém dosavadním vývoji úseky se zřetelnou akcelerací nebo naopak decelerací průběhu v čase.**

## Minimalizační kritérium má u toho typu vyrovnání tvar

**(31) **

***ve kterém se uplatňuje trendový model tvaru***

**(32) **

***Zde máme co do činění*** *již* ***se třemi konstantami *** *coby* ***s odhady trojice neznámých parametrů kvadratické funkce ***.

**Odhady těchto parametrů se opět obdrží vyvozením ze soustavy** (tří) **normálních rovnic. Ve výrazech se** tentokrát **uplatňují** již **tři vyrovnávací statistiky :**

***jednoduchá vyrovnávací statistika* **

***dvojitá vyrovnávací statistika***

**(33) **

**s vlastností **

***trojitá vyrovnávací statistika* **

***Pomocí nich se dají vyjádřit jak vyrovnané, tak předpovídané hodnoty :***

**vyrovnání pro aktuální období  * :***

**(34) **

**predikce na τ období dopředu * :***

**(35) **

**Predikce pomocí trojitého exponenciálního vyrovnání jsou** (zejména při nízké volbě konstanty  - tj. blízké 0,7) **značně citlivé na chování posledních 2-3 pozorovaných hodnot řady. Vykazují-li tato pozorování zřetelný odklon oproti předchozímu průběhu časové řady, poskytne kvadratické vyrovnání zpravidla nepoužitelné předpovědi (tyto se vychylují buď příliš nahoru nebo příliš dolů podle směru vychýlení právě posledních** nejčerstvějších **pozorování).**

**Při určování počátečních odhadů se v tomto případě doporučuje volit delší úsek (až 1/2 počtu všech pozorování). Vyrovnání se zde provádí (*pomocí prosté metody nejmenších čtverců*) kvadratickým trendem.**

**Derivací výrazu (31) podle  a jeho anulováním dostaneme:**

** neboli**

**(41A) **

**(41A) upravíme dále na **

**Po vyčíslení sumací máme **

**Derivací výrazu (31) podle  a jeho anulováním dostaneme:**

** neboli**

**(41B) **

**(41B) upravíme dále na **

**Po vyčíslení sumací máme **

**Derivací výrazu (31) podle  a jeho anulováním dostaneme:**

** neboli**

**(41C) **

**(41C) upravíme na **

**Po vyčíslení sumací máme **

**Nyní můžeme** standardně **postupovat tak, že řešíme soustavu rovnic pro neznámé parametry ,  a . Její maticové schéma je následující:**

****

**No ale, jak patrno, výpočet parametrů** (založený na inverzi této matice) **nebude nic příjemného: v principu přes determinant a vygenerování matice algebraických doplňků. Výsledek-vzorec pro parametry e nicméně obsažen v Brownově monografii.**

**Poznámka: Při výpočtech součtů konvergentních nekonečných řad, které se vyskytují v *normálních rovnicích* u různých verzí exponenciálního vyrovnávání, lze užitečně uplatnit poznatky odvozené z  teorie mocninných řad.**

**Máme-li pro argument  definovánu funkci resp. *mocninnou řadu***

**(51) , pak**

***výpočet derivací této funkce*** *(do čtvrté derivace včetně)* ***vede k těmto výsledkům:***

**(52) **

**(53) **

**(54) **

**(55) **

**Všimněme si, že sumace derivovaných prvků mocninné řady (výrazy v součtech v (51,52,53,54) se získají velmi prostým způsobem tím, že derivujeme funkci  . Platí to pro první, druhou i třetí** (případně i vyšší) **derivaci.**

***Vezmeme-li za argument z******vyrovnávací konstantu*** ** ***-*** *to je přípustné, neboť její hodnoty rovněž leží v intervalu (0,1)* ***- dostaneme :***

**(61)  ,**

**(62)  ,**

**(63)  , což vypočteme z rozvoje**



**Dále máme ještě**

****

****

****

****

****

** □ .**

****

**Pro informaci ještě připojme součty tří dalších mocninných řad typu  :**

** .**

** .**

 *Uvedené vztahy se aktivně uplatňují při výpočtu výrazů, které vedou v jednotlivých typech exponenciálního vyrovnávání k určení odhadů parametrů  .*

Holtova vyrovnávací metoda[[2]](#footnote-2)

**Jistým zobecněním *dvojitého exponenciálního vyrovnávání* je tzv. *Holtova metoda*, ve které se uplatňují dvě vyrovnávací konstanty** **

** pro vyrovnání *úrovně/interceptu* **

** pro vyrovnání *směrnice/sklonu* lineární přímky  téže řady**

**(71) **

**Vyhlazení úrovně je tedy definováno jako konvexní kombinace poslední pozorované hodnoty v čase ** a odhadu této hodnoty vzatého v předchozím čase ** z tehdy dostupných pozorování.**

**(72)** **

**Pro vyrovnání, resp. predikci zde platí předpisy:**

**(73)** **

**(74)** * pro *

**Jako volby počátečních hodnot se zde doporučují:**

**(75A)** **

**(75B)**  **

Za pozornost stojí, že *Holtova metoda* byla nejprve navržena jako *ad hoc* postup na základě prosté logické úvahy. Teprve později bylo prokázáno, že *Brownovo dvojité exponenciální vyrovnávání* se zvolenou  vyrovnávací konstantou  je speciálním případem *Holtova metody* , jejíž vyrovnávací konstanty jsou pak

**(76)** * , *

*** , potom  ***

*** , pak  ***

*** , odtud  ***

1. **Postup všech typů exponenciálního vyrovnávání je zevrubně popsán v monografii:**

   **Brown,R.,G.: Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series. *London, Prentice-Hall 1963.* popř. v článku**

   **Brown,R.,G.,Meyer, R.,F.“: The fundamental theory of exponential smoothing. *Operations Research 9/1961 str. 673-684.*** [↑](#footnote-ref-1)
2. **Postup je popsán v textu: Holt, C.,C: Forecasting seasonal and trends by exponentially weighted moving averages . Res. mem. No 52. *Carnegie Institute of Technology. Pittsburg 1957***. [↑](#footnote-ref-2)