Přehled základních spojitých statistických rozdělení

Normální *jednorozměrné* **rozdělení** **(střední hodnota μ, rozptyl σ^2)** $N(\mu,\sigma^2)$

hustota $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$-\infty<x<\infty \quad -\infty<\mu<\infty \quad 0<\sigma<\infty$$

Normované normální *jednorozměrné* **rozdělení** **(střední hodnota 0, rozptyl 1)** $N(0,1)$

hustota $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$-\infty<x<\infty \quad \mu=0 \quad \sigma^2=1$$

Normální *T-rozměrné* **rozdělení** **(vektor středních hodnot $\vec{\mu}$, kovarianční matice Σ)** $N(\mu,\Sigma)$

hustota $$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{T/2}|\Sigma|^{1/2}}exp\left(-\frac{(\vec{x}-\vec{\mu})'\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})}{2}\right)$$

$-\infty<x_i<\infty \quad -\infty<\mu_i<\infty \quad \Sigma$ **symetrická pozitivně definitní matice řádu T**

Pearsonovo (*též* **Helmertovo) χ^2 - rozdělení** *o n stupních volnosti* $\chi^2(n)$

hustota $$f_n(x)=\frac{x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}.\Gamma(\frac{n}{2})},$$ **pro** $x>0$ $\quad f(x)=0$ **pro** $x<0$

n **přirozené číslo,** $0\le x<\infty$**,** $\Gamma(.)$ **je hodnota gama funkce příslušného argumentu**

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$ *(zobecnění faktoriálu do reálných čísel)*

má střední hodnotu n a rozptyl 2n. Toto rozdělení má konečný součet druhých mocnin nezávisle a normálně $N(0,1)$ - rozdělených náhodných veličin

Poznámka: **při $n=2$ dostaneme exponenciální rozdělení:**

$$f_2(x)=\frac{x^0.e^{-\frac{x}{2}}}{2^1.\Gamma(1)}=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}$$ **, protože** $\Gamma(1)=1$

Studentovo t - rozdělení o n stupních volnosti *(necentrální) s parametrem h*

hustota $$f(x)=c.\sqrt{\frac{h}{n}}.\left[1+\frac{h}{n}(x-\mu)^2\right]^{-\frac{n+1}{2}}$$ **, kde** $$c=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$ n *je přirozené číslo,*

$-\infty<x<\infty, -\infty<\mu<\infty$, μ *parametr necentrality,* $\Gamma(.)$ *je hodnota gama funkce příslušného argumentu, pro kterou mj. platí:* $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$, *přičemž* $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

Funkce má jediný modus v bodě $x=\mu$. Střední hodnota existuje až pro $n>1$.

Studentovo rozdělení má střední hodnotu μ. (Je-li centrované, pak tedy 0). *Všechny* ***liché centrální momenty tohoto rozdělení jsou nulové, sudé mají hodnotu***

$$H(2r)=\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\left(\frac{n}{h}\right)^r$$ **pro** $r=1,2,\dots,n>2r$

rozptyl je tedy $\frac{n}{(n-2)h}$ ***pro*** $n\ge 3$, ***špičatost*** $\frac{3n^2}{(n-2).(n-4)h^2}$ ***pro*** $n\ge 5$

Studentovo t - rozdělení o n stupních volnosti *(centrální při h =1)* $t(n), t_n$

hustota $$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\sqrt{\frac{1}{n}}.\left[1+\frac{x^2}{n}\right]^{-\frac{n+1}{2}}$$ *, n je přirozené číslo,*

rozptyl je tedy $\frac{n}{(n-2)}$ ***pro*** $n>2$, ***špičatost*** $\frac{3n^2}{(n-2).(n-4)}$ ***pro*** $n>4$

$$H(2)=\frac{\Gamma\left(2\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.n^2$$ **pro** $r=2$

ověření:

$$H(1)=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}.n=\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{n}{2}-1\right).}.n=\frac{1}{(n-2)}.n=\frac{n}{(n-2)}$$

$$H(2)=\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}{\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}.n^2=\frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{n}{2}-1\right).\left(\frac{n}{2}-2\right)}.n^2=\frac{\frac{3}{4}n^2}{\frac{(n-2)(n-4)}{4}}=\frac{3n^2}{(n-2)(n-4)}$$

Speciálním případem *Studentova rozdělení* při n=1 je

Cauchyho rozdělení

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sigma}.\frac{1}{1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$ **, pro** $x>0$ $\quad f(x)=0$ **pro** $x<0$

$$-\infty<x<\infty \quad -\infty<\mu<\infty \quad 0<\sigma<\infty$$

standardizované (centrované) Cauchyho rozdělení ***(modus=medián=0, rozptyl 1)***

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$ **pro** $x>0$, $\quad f(x)=0$ **pro** $x<0$

Toto rozdělení nemá žádné momenty *(ani střední hodnotu)*, ***užívanou mírou variability je mezikvartilové rozpětí (taková hodnota $c > 0$, pro kterou platí***

$$F(\mu - c) = F(\mu + c) = 0{,}5\text{, zde IQR} = 2\sigma).$$

Tvrzení: ***Studentovo rozdělení o 1 stupni volnosti je totožné s*** *(centrálním)* ***Cauchyho rozdělením.***

Ověření: **Jednoduše dosadíme do vzorce pro hustotu** (centrálního) **Studentova rozdělení hodnotu** $n = 1$ (a rovněž $h = 1$). **Dostaneme:**

$$f(x) = c.\sqrt{\frac{1}{1}}.\left[1 + \frac{1}{1}x^2\right]^{-\frac{1+1}{2}}\text{, kde } c = \frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

$f(x) = c.\sqrt{1}.\left[1 + x^2\right]^{-1}$, **kde** $c = \dfrac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$, přičemž $\Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, **odtud**

$c = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}} = \dfrac{1}{\pi}$, **takže** $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$, **tedy hustota *Cauchyho rozdělení.***

neúplná gama funkce $$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.\int_0^x t^{\frac{n}{2}-1}.(1-t)^{\frac{m}{2}-1}dt \quad \textbf{pro } 0 < x < 1$$

Fisherovo-Snedecorovo F-rozdělení *(má ho* ***podíl dvou nezávislých χ^2 - rozdělení o n,m stupních volnosti dělených příslušnými stupni volnosti m,n)***

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{n+m}{2}}} \quad \textbf{pro } 0 < x < 1$$

Beta rozdělení

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x}{c}\right)^{a-1}\left(1 - \frac{x}{c}\right)^{b-1}}{B(a,b)} \quad \textbf{pro } 0 < x < 1, a,b > 0$$

$B(a,b)$ ***je beta funkce s vlastností*** $B(a,b) = B(b,a) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}dz$

standardizované Beta rozdělení pro $z = \dfrac{x}{c}$

$$f(x) = \frac{z^{a-1}(1-z)^{b-1}}{B(a,b)} \quad \textbf{pro } 0 < x < 1, a,b > 0$$

neúplná beta funkce $f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.\int_0^x t^{\frac{n}{2}-1}.(1-t)^{\frac{m}{2}-1}dt$ **pro** $0<x<1$

$0<x<1 \quad m,n$ **zpravidla celočíselná**

invertované Beta rozdělení pro $z=\frac{1}{1+u}$ **,** $u=\frac{y}{c}$**,** $0<c<\infty$

$$f(y)=\frac{\left(\frac{y}{c}\right)^{b-1}}{\left(1+\frac{y}{c}\right)^{a+b} c.B(a,b)}$$ **pro** $0<y<\infty$**,** $a,b>0$

speciálním případem pro $a=\frac{\nu_2}{2}, b=\frac{\nu_1}{2} \quad c=\frac{\nu_2}{\nu_1}$ **je Fisher-Snedecorovo F-rozdělení** o ν_1,ν_2 stupních volnosti

Gama rozdělení (obecné)s parametry α,γ $f(x)=\frac{x^{\alpha-1}.e^{-\frac{x}{\gamma}}}{\gamma^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$ **pro** $0<x<\infty$**,** $0<\alpha,\gamma$

speciálním případem gama rozdělení pro $\alpha=\frac{\nu}{2}$**,** $\gamma=2$ **je** již zmíněné

χ^2 **- rozdělení** o ν stupních volnosti s hustotou $f(x)=\frac{x^{\frac{\nu}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$

standardizované Gama rozdělení jednoparametrické **(** $z=\frac{x}{\gamma}$ **)**

$$f(z)=\frac{x^{\alpha-1}.e^{-z}}{\Gamma(\alpha)}$$ **pro** $0<z<\infty$**,** $0<\alpha$

Rovnoměrné rozdělení

$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad a\le x\le b \qquad f(x)=0$ **jinde**

má obecné momenty: $\mu_r=\int_a^b\frac{x^r}{b-a}dx$. **Tedy** $\mu_1=\frac{a+b}{2}$ $\quad \mu_2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$

rozptyl se rovná $\sigma^2=\mu_2{}^*=\frac{(b-a)^2}{12}$

Logaritmickonormální rozdělení *(rozdělení velikosti drcených částic)*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} exp\left(-\frac{(log\, x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$ **pro** $x > 0$ $\quad f(x) = 0$ **pro** $x < 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} exp\left(-\frac{\left(log\left(x / e^{\mu}\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$ **pro** $x > 0$ $\quad f(x) = 0$ **pro** $x < 0$.

Weibullovo rozdělení - diskrétní

$$f(x, \lambda, k) = \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\}$$ ***pro*** $x \geq 0$

$f(x, \lambda, k) = 0$ ***pro*** $x < 0$

$k > 0$ – ***stínový*** ***[shape]*** ***parametr***

$\lambda > 0$ – ***měřítkový*** ***[scale]*** ***parametr***

Náhodná veličina X řídící se Weibullovým rozdělením určuje rozdělení náhodné veličiny, pro kterou je míra selhání úměrná mocnině času, parametr k je tato mocnina +1.

Při k =1 je tato konstantní přes čas

Speciální případy Weibullova rozdělení

k=1: exponenciální rozdělení $f(x, \lambda, 1) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{1-1} exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^1\right\} = \frac{1}{\lambda} exp\left\{-\frac{x}{\lambda}\right\}$ ***pro*** $x \geq 0$

k=2: Rayleighovo rozdělení $f(x, \lambda, 2) = \frac{2}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^1 exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2\right\} = \frac{2x}{\lambda^2} exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2\right\}$ ***pro*** $x \geq 0$

distribuční funkce $F(x, \lambda, k) = 1 - exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\}$

střední hodnota $\mu = \lambda . \Gamma(1 + \frac{1}{k})$ ***medián*** $\tilde{\mu} = \lambda . (\ln 2)^{1/k}$ ***rozptyl*** $\sigma^2 = \lambda^2 . \Gamma(1 + \frac{2}{k}) - \mu^2$