

Nejpoužívanější matematické funkce při trendovém vyrovnání/extrapolaci

1. Lineární trend $y_t = \beta_0 + \beta_1 t$

indikace přítomnosti: první diference $y_{t+1} - y_t$ jsou přibližně konstantní

2. Kvadratický trend $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$

indikace přítomnosti: druhé diference $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$ jsou zhruba konstantní

3. Kubický trend $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$

indikace přítomnosti: třetí diference $y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t$ jsou zhruba konstantní

3. Polynomický trend s-tého stupně $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \dots + \beta_s t^s$

indikace přítomnosti: diference s-tého stupně jsou přibližně konstantní

4. Mocninný trend $y_t = \beta_0 t^{\beta_1}$

indikace přítomnosti:

5a Logaritmický trend $y_t = \beta_0 + \beta_1 \ln(t)$

indikace přítomnosti:

5. Exponenciální trend $y_t = \alpha \beta^t$ [$\alpha > 0, zpravidla \beta > 1$]

indikace přítomnosti: podíly sousedních hodnot y_{t+1} / y_t resp. první diference logaritmu $\ln y_{t+1} - \ln y_t$ jsou přibližně konstantní.

6. Modifikovaný exponenciální trend $y_t = \gamma + \alpha \beta^t$

indikace přítomnosti: podíly sousedních prvních diferencí $(y_{t+2} - y_{t+1}) / (y_{t+1} - y_t)$ jsou přibližně konstantní

7. Logistický trend $y_t = \frac{\gamma}{1 + \alpha \cdot \beta^t}$ s parametry $\beta > 0, \gamma > 0$

indikace přítomnosti: a) histogram prvních diferencí $y_{t+1} - y_t$ je tvarem podobná křivce (hustotě) normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$.

b) podíly sousedních prvních diferencí reciprokových hodnot $(1/y_{t+2} - 1/y_{t+1}) / (1/y_{t+1} - 1/y_t)$ jsou přibližně konstantní.

Inflexní bod logistické křivky je v bodě $t^* = -\frac{\ln(\alpha)}{\ln(\beta)}$

8. Gompertzův trend $\ln(y_t) = \gamma + \alpha \cdot \beta^t$ nebo ekvivalentně $y_t = \exp(\gamma + \alpha \cdot \beta^t)$ [$\beta > 0$]

indikace přítomnosti: podíly prvních logaritmovaných diferencí $(\ln y_{t+2} - \ln y_{t+1}) / (\ln y_{t+1} - \ln y_t)$ jsou přibližně konstantní

Inflexní bod má Gompertzova křivka v bodě $t^* = -\frac{\ln(-\alpha)}{\ln(\beta)}$

9a. Odmocninný trend $y_t = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{t}$

9b. Hyperbolický trend

$$y_t = \beta_0 + \frac{\beta_1}{t}$$

4. Mocninný trend

$$y_t = \beta_0 t^{\beta_1} \quad \ln y_t = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln(t)$$

indikace přítomnosti:

$$y_{t+1} = \beta_0 (t+1)^{\beta_1}$$

$$y_{t+1} / y_t = \beta_0 (t+1)^{\beta_1} / \beta_0 (t)^{\beta_1} = \left(\frac{t+1}{t}\right)^{\beta_1} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\beta_1}$$

$$\ln y_{t+1} = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln(t+1) \quad \ln y_t = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln(t)$$

$$\ln y_{t+1} - \ln y_t = \beta_1 \ln(t+1) - \beta_1 \ln(t) = \beta_1 \ln \frac{t+1}{t} = \beta_1 \ln \left(1 + \frac{1}{t}\right) \quad \text{závisí na } t.$$

Diferencované logaritmy konvergují s rostoucím t k nule

5a Logaritmický trend

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(t) \quad \exp y_t = \exp \beta_0 \cdot t^{\beta_1}$$

indikace přítomnosti:

$$y_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(t+1)$$

$$y_{t+1} - y_t = \beta_1 \cdot \ln(t+1) - \beta_1 \cdot \ln(t) = \beta_1 \ln \frac{t+1}{t}$$

$$e^{y_{t+1}} - e^{y_t} = \beta_1 \cdot \ln(t+1) - \beta_1 \cdot \ln(t) = \beta_1 \ln \frac{t+1}{t} \quad \text{závisí na } t.$$

Diference expomocnin konvergují s rostoucím t k nule

(4E) výpočet parametrů mocninného trendu

(41) $y_t = \beta_0 t^{\beta_1}$ $[\beta_0 > 0]$ zpravidla $[\beta_1 > 0]$

Logaritmováním (41) obdržíme: $\ln y_t = \ln \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln t$

Řešíme linerizovanou regresí s logaritmovaným regresandem, parametr β_1 získáme přímo, parametr β_0 vyexponujeme. Výsledek:

Mocninný trendový model: OLS, za použití pozorování 1950:1-2000:4 (T = 204)

Závisle proměnná: l_realgdp

HAC standardní chyby, šířka okénka 4 (Bartlettovo jádro)

	Koeficient	Směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
Const	6,31863	0,287481	21,9793	<0,00001	***
l_time	0,459833	0,0631059	7,2867	<0,00001	***
Střední hodnota závisle p		8,312311	Sm. odchylka závisle pr.		0,487764
Součet čtverců reziduí		9,142454	Sm. chyba regrese		0,212743
Koeficient determinace		0,810702	Adjustovaný koeficient determinace		0,809765
F(1, 202)		53,09593	P-hodnota(F)		7,00e-12
Logaritmus věrohodnosti		27,26603	Akaikovo kritérium		-50,53207
Schwarzovo kritérium		-43,89583	Hannan-Quinnovo kritérium		-47,84759
Medián závisle proměnné		0,935246	Durbin-Watsonova statistika		0,018616
Součet absolutních hodnot reziduí		5,64082			

Mocninný trendový model LAD, za použití pozorování 1950:1-2000:4 (T = 204)

Závisle proměnná: l_realgdp

	Koeficient	Směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
Const	5,64082	0,273109	20,6541	<0,00001	***
l_time	0,598398	0,0580218	10,3133	<0,00001	***
Medián záv. proměnné		8,328980	Sm. odch.záv. proměnné		0,487764
Součet absolutních hodnot reziduí		30,99214	Součet čtverců reziduí		13,90851
Logaritmus věrohodnosti		39,01279	Akaikovo kritérium		-74,02558
Schwarzovo kritérium		-67,38934	Hannan-Quinnovo kritérium		-71,34110

Nelineární metoda nejmenších čtverců *NLLS* v gretlu

Mocninový trendový model: *NLLS*, za použití pozorování 1950:1-2000:4 (T = 204)

$$\text{realgdp} = b_0 * \text{time}^{b_1}$$

	<i>Odhad</i>	<i>Směr. chyba</i>	<i>t-podíl</i>	<i>p-hodnota</i>	
b0	102,105	10,0882	10,1213	<0,00001	***
b1	0,822439	0,0199321	41,2620	<0,00001	***
Sřední hodnota závisle p	4562,646	Sm. odchylka závisle p.		2113,962	
Součet čtverců reziduí	58455427	Sm. chyba regrese		537,9436	
Koeficient determinace	0,935563	Adjustovaný koeficient determinace		0,935244	
Logaritmus věrohodnosti	-1571,160	Akaikovo kritérium		3146,321	
Schwarzovo kritérium	3152,957	Hannan-Quinnovo		3149,005	
rho (koeficient autokorelace)	0,989162	Durbin-Watsonova statistika		0,006941	

počáteční hodnoty byly získány z linearizované verze rovnice

gener b0 = 554.

gener b1 = 0.46

$$\text{realgdp} = \alpha * \text{time}^{\beta}$$

nebo

$$\text{realgdp} = b_0 * \text{time}^{b_1}$$

params alpha beta

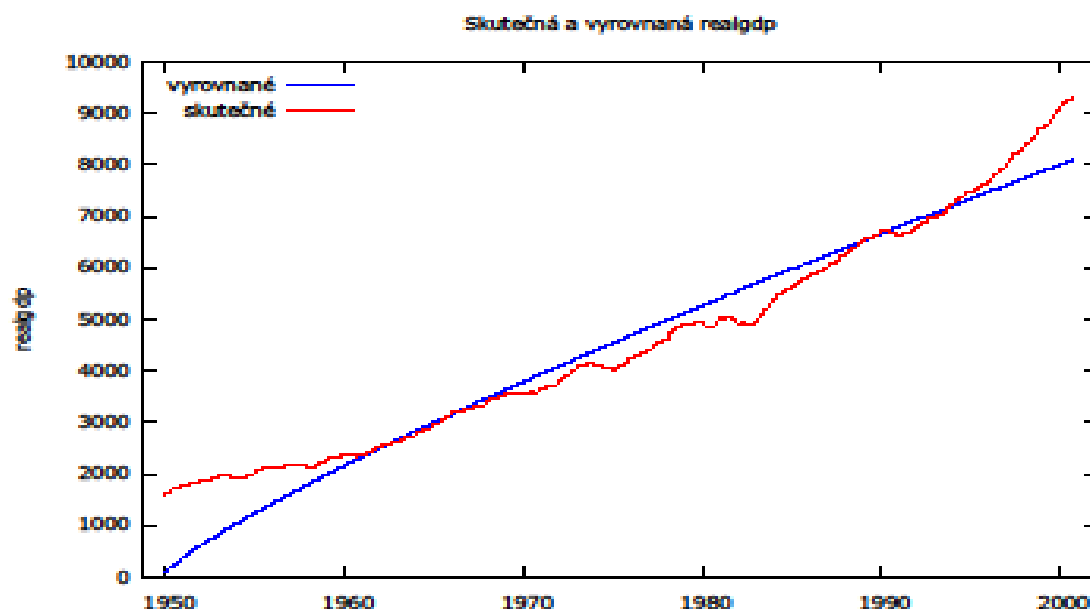
params b0 b1

$$\text{deriv alpha} = \text{time}^{\beta}$$

$$\text{deriv b1} = \text{time}^{\beta} \ln(\text{time})$$

$$\text{deriv beta} = \alpha * \beta * \text{time}^{\beta-1}$$

$$\text{deriv b2} = b_0 * b_1 * \text{time}^{b_1-1}$$



Zobecněný mocninný trendový model: NLLS, za použití pozorování 1950:1-2000:4 (T = 204)

$$\text{realgdp} = b_2 + b_0 \cdot \text{time}^{b_1}$$

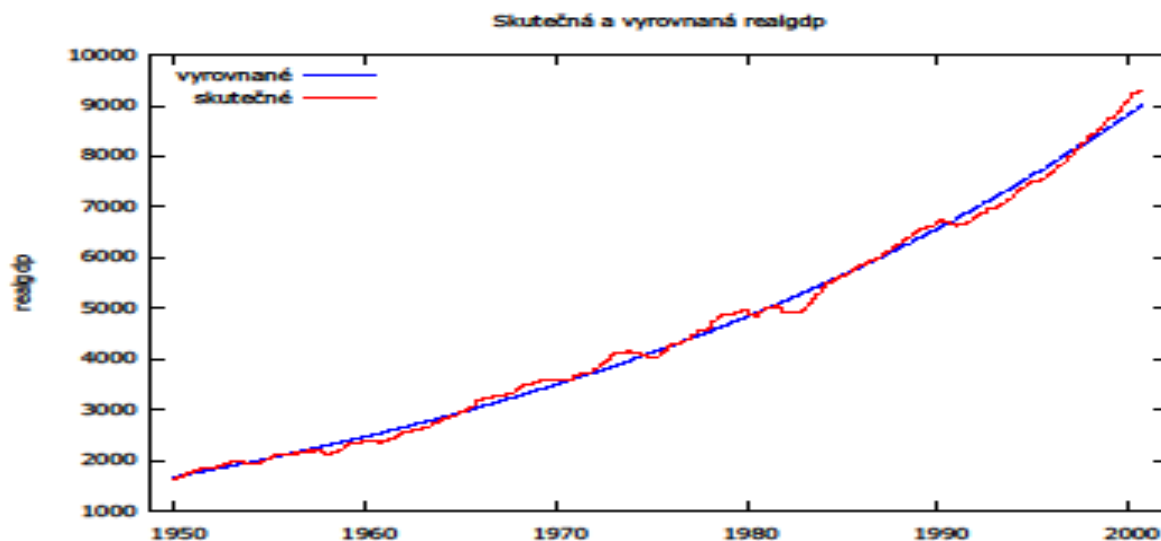
	Odhad	Směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
b0	1,32874	0,157326	8,4458	<0,00001	***
b1	1,61086	0,0222217	72,4904	<0,00001	***
b2	1871,6	29,1946	64,1077	<0,00001	***
Sřední hodnota závisle proměnné	4562,646	Sm. odchylka závisle proměnné		2113,962	
Součet čtverců reziduí	4991128	Sm. chyba regrese		157,5801	
Koeficient determinace	0,994498	Adjustovaný koeficient determinace		0,994443	
Logaritmus věrohodnosti	-1320,179	Akaikeovo kritérium		2646,358	
Schwarzovo kritérium	2656,312	Hannan-Quinnovo kritér.		2650,384	
rho (koeficient autokorelace)	0,980169	Durbin-Watsonova statistika		0,065016	

počáteční hodnoty byly získány z linearizované verze rovnice

genr b0 = 554.

genr b1 = 0.46

genr b2 = 0.



(5E) výpočet parametrů exponenciálního trendu

(51)

$$y_t = \beta_0 \beta_1^t$$

$[\beta_0 > 0]$ zpravidla $[\beta_1 > 1]$

Logaritmováním (51) obdržíme: $\ln y_t = \ln \beta_0 + t \cdot \ln \beta_1$

Řešíme linerizovanou regresí s logaritmovaným regresandem, parametry β_0, β_1 získáme vyexponováním.

Exponenciální trendový model: OLS, za použití pozorování 1950:1-2000:4 (T = 204)

Závisle proměnná: l_realgdp

HAC standardní chyby, šířka okénka 4 (Bartlettovo jádro)

	Koeficient	Směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
Const	7,46811	0,011538	647,2646	<0,00001	***
time	0,00823608	8,46729e-05	97,2694	<0,00001	***
Střední hodnota závisle p		8,312311	Sm. odchylka závisle pr.		0,487764
Součet čtverců reziduí		0,307790	Sm. chyba regrese		0,039035
Koeficient determinace		0,993627	Adjustovaný koeficient determinace		0,993596
F(1, 202)		9461,334	P-hodnota(F)		1,2e-171
Logaritmus věrohodnosti		373,1751	Akaikeovo kritérium		-742,3502
Schwarzovo kritérium		-735,7140	Hannan-Quinnovo kritérium		-739,6657
rho (koeficient autokorelace)		0,953708	Durbin-Watsonova statistika		0,065356

Exponenciální trendový model: LAD, za použití pozorování 1950:1-2000:4 (T = 204)

Závisle proměnná: l_realgdp

	Koeficient	Směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
const	7,46381	0,00865612	862,2588	<0,00001	***
time	0,00825376	7,24964e-05	113,8506	<0,00001	***
Medián závisle proměnné		8,328980	Sm. odchylka závisle proměnné		0,487764
Součet absolutních hodnot reziduí		6,637274	Součet čtverců reziduí		0,309272
Logaritmus věrohodnosti		353,3834	Akaikeovo kritérium		-702,7667
Schwarzovo kritérium		-696,1305	Hannan-Quinnovo kritérium		-700,0823

nelineární metoda nejmenších čtverců v gretlu

Exponenciální trendový model: NLLS, za použití pozorování 1950:1-2000:4 (T = 204)

	Odhad	Směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
b_0	1821,78	12,6724	143,7599	<0,00001	***
b_1	1,00796	4,46657e-05	22566,7834	<0,00001	***
Střední hodnota závisle proměnné	4562,646		Sm. odchylka závisle proměnné		2113,962
Součet čtverců reziduí	4496526		Sm. chyba regrese		149,1979
Koeficient determinace	0,995043		Adjustovaný koeficient determinace		0,995019
Logaritmus věrohodnosti	-1309,534		Akaikeovo kritérium		2623,069
Schwarzovo kritérium	2629,705		Hannan-Quinnovo krit.		2625,753
rho (koeficient autokorelace)	0,961289		Durbin-Watsonova statistika		0,069048

genr $b_0 = 1751$.

genr $b_1 = 1.008$

realgdp = alpha * beta^time

nebo

realgdp = $b_0 * b_1^{time}$

params alpha beta

params $b_0 b_1$

deriv alpha = beta^time

deriv $b_1 = b_2^{time}$

deriv beta = alpha * beta^time * log(beta)

deriv $b_2 = b_1 * b_2^{time} * \log(b_2)$

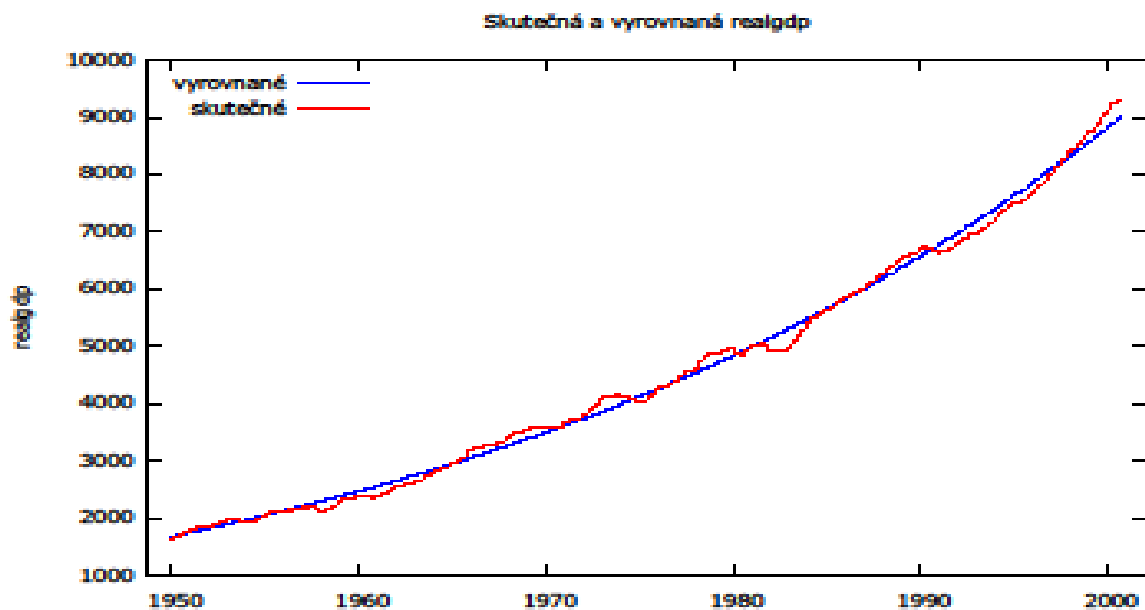
počáteční hodnoty byly získány z linearizované verze rovnice

genr $b_0 = 1751$.

genr $b_1 = 1.008$

realgdp = $b_0 * b_1^t$

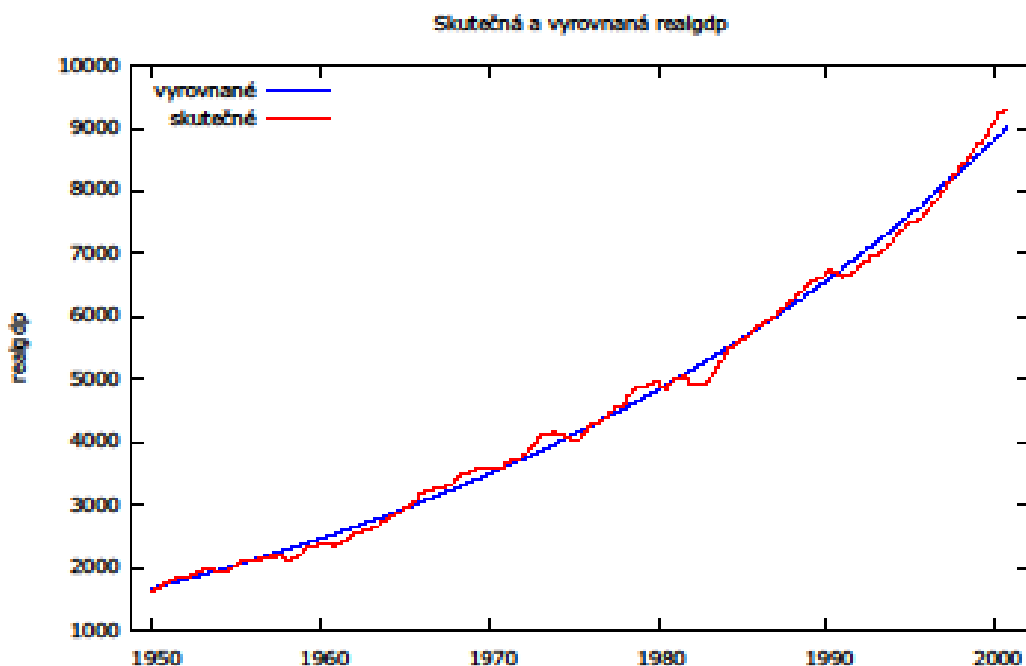
params $b_0 b_1$



Modifikovaný exponenciální trendový model: NLLS, za použití pozorování 1950:1-2000:4 (T = 204)

$$\text{realgdp} = b_2 + b_0 \cdot b_1^{\text{time}}$$

	Odhad	Směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
b0	2613,88	123,049	21,2425	<0,00001	***
b1	1,00659	0,000173154	5813,2866	<0,00001	***
b2	-956,251	142,7	-6,7011	<0,00001	***
Střední hodnota závisle proměnné	4562,646		Sm. odchylka závisle proměnné	2113,962	
Součet čtverců reziduí	3430419		Sm. chyba regrese	130,6398	
Koeficient determinace	0,996219		Adjustovaný koeficient determinace	0,996181	
Logaritmus věrohodnosti	-1281,931		Akaikeovo kritérium	2569,862	
Schwarzovo kritérium	2579,816		Hannan-Quinnovo krit.	2573,889	
rho (koeficient autokorelace)	0,963863		Durbin-Watsonova statistika	0,091104	



počáteční hodnoty byly získány z linearizované verze rovnice pro exponenciální trend

genr $b_0 = 1751$.

genr $b_1 = 1.008$

genr $b_2 = 0$

$\text{realgdp} = b_0 \cdot b_1^t + b_2$

params $b_0 \ b_1 \ b_2$

Logistický trendový model: NLLS, za použití pozorování 1950:1-2000:4 (T = 204)

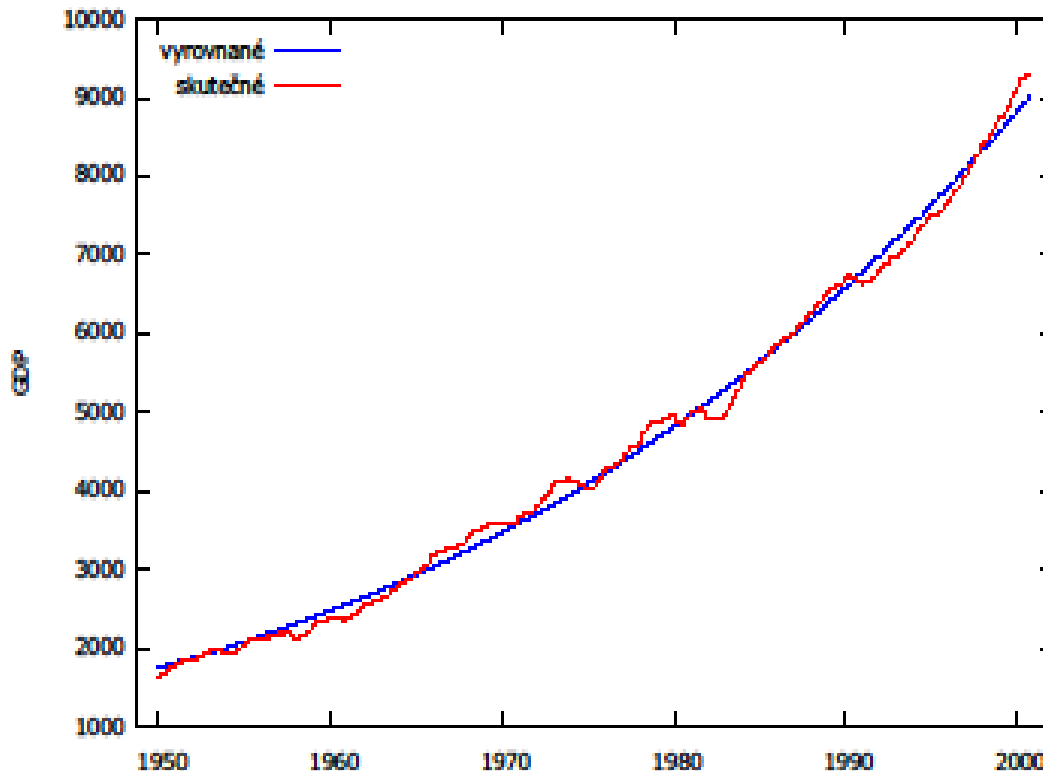
$$\text{realgdp} = 1/(b_2 + b_0 \cdot b_1^{\text{time}})$$

$$\text{GDP} = 1/(b_2 + b_0 * b_1^{\text{time}})$$

	Odhad	Směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
b0	0,000550894	4,14048e-06	133,0508	<0,00001	***
b1	0,990872	0,000212008	4673,7490	<0,00001	***
b2	2,60351e-05	3,78326e-06	6,8816	<0,00001	***

Střední hodnota závisle proměnné	4562,646	Sm. odchylka závisle proměnné	2113,962
Součet čtverců reziduí	3849654	Sm. chyba regrese	138,3926
Koeficient determinace	0,995756	Adjustovaný koeficient determinace	0,995714
Logaritmus věrohodnosti	-1293,692	Akaikeovo kritérium	2593,383
Schwarzovo kritérium	2603,338	Hannan-Quinnovo krit.	2597,410
rho (koeficient autokorelace)	0,966575	Durbin-Watsonova statistika	0,081637

Skutečná a vyrovaná GDP



počáteční hodnoty byly získány metodou pro odhad modif.expon. trendu v CIPRA str.265-7

genr b0 = 0.0005544 (zaokrouhlo na 0.0006)

genr b1 = 0.9889054 (zaokrouhlo na 0.99)

genr b2 = 0.0000589 (zaokrouhlo na 0.00006)

realgdp = $1/(b_2 + b_0 * b_1^{\text{time}})$

params b0 b1 b2

Gompertzův trendový model: NLLS, za použití pozorování 1950:1-2000:4 (T = 204)

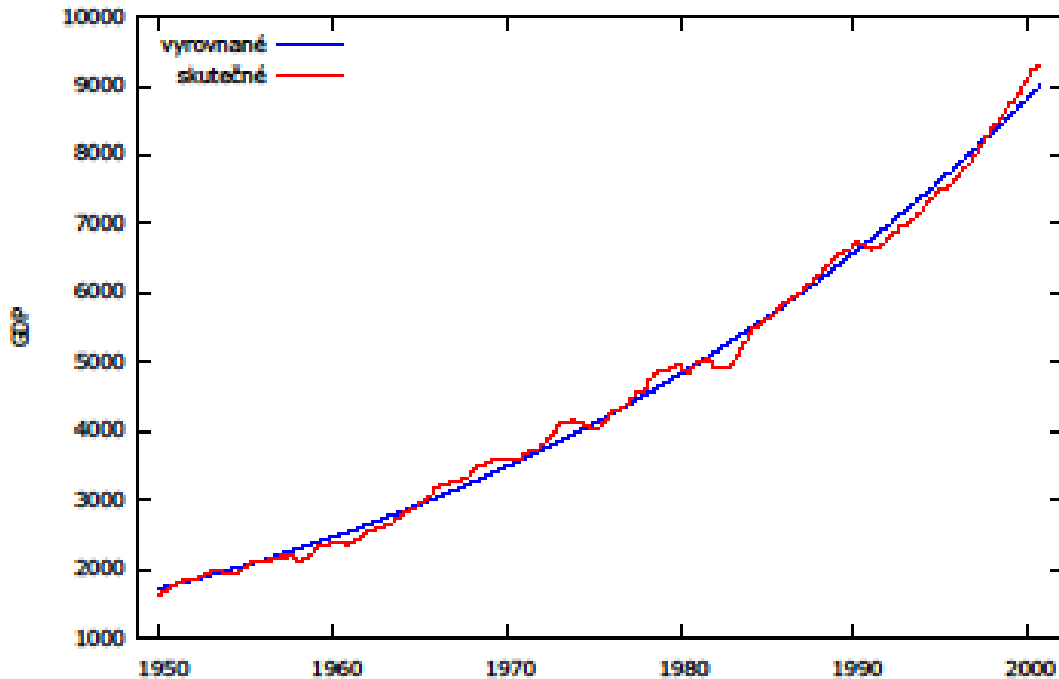
$$\text{realgdp} = \exp(b_2 + b_0 * b_1^{\text{time}})$$

$$\text{GDP} = \exp(b_2 + b_0 * b_1^{\text{time}})$$

	Odhad	Směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
b0	-7,01606	0,825865	-8,4954	<0,00001	***
b1	0,998669	0,000186859	5344,4939	<0,00001	***
b2	14,4536	0,835876	17,2916	<0,00001	***

Střední hodnota závisle proměnné	4562,646	Sm. odchylka závisle proměnné	2113,962
Součet čtverců reziduí	3621553	Sm. chyba regrese	134,2299
Koeficient determinace	0,996008	Adjustovaný koeficient determinace	0,995968
Logaritmus věrohodnosti	-1287,461	Akaikeovo kritérium	2580,923
Schwarzovo kritérium	2590,877	Hannan-Quinnovo krit.	2584,949
rho (koeficient autokorelace)	0,965638	Durbin-Watsonova statistika	0,086576

Skutečná a vyrovnaná GDP



počáteční hodnoty byly získány metodou pro odhad modif.expon. trendu v CIPRA str.265-7

genr b0 = -4.129661 (zaokrouhlo na -4.13)

genr b1 = 0.9974011 (zaokrouhlo na 0.997)

genr b2 = 11.512396 (zaokrouhlo na 11.51)

realgdp = $\exp(b_2 + b_0 * b_1^{\text{time}})$

params b0 b1 b2

Logistický trendový model: výpočet parametrů podle CIPRA str.269-270

Pomocí **metody nejmenších čtverců** nejprve získáme v **lineárním regresním modelu**

$$(75^*) \quad \frac{\Delta y_t}{y_t} = -\ln \beta_1 + \frac{\ln \beta_1}{\beta_2} y_t + \varepsilon_t$$

$$(75^{**}) \quad z_t = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = \alpha_1 + \alpha_2 y_t + \varepsilon_t, \text{ kde } \alpha_1 = -\ln \beta_1 \quad \alpha_2 = \ln \beta_1 / \beta_2$$

odhady $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ pro α_1, α_2 a odtud následně odhady parametrů β_1, β_2 jako

$$(76) \quad b_1 = \hat{\beta}_1 = \exp(-\hat{\alpha}_1) \text{ a pro } b_2 = \hat{\beta}_2 = \frac{-\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}$$

Řešíme tedy regresní rovnici (75**) **gretlem** s výsledkem:

$$z_t = 0,0101467 - 3,10145 \cdot 10^{-7} \cdot y_t$$

(druhý koeficient ale není signifikantní, R^2 přitom pouze 0,004238)

Nyní přímo vypočteme první dva z trojice parametrů logistického trendu

$$b_1 = \exp(-0,0101467) = 0,989905$$

$$b_2 = \frac{-0,0101467}{-3,10145 \cdot 10^{-7}} = \frac{0,0101467 \cdot 10^7}{3,10145} = \frac{101467}{3,10145} = 32715,99$$

Pro odhad posledního parametru β_0 , aproximujeme trendovou složku Tr_t skutečnými pozorováními y_t a upravíme tento vztah do tvaru

$$(77) \quad \beta_0 \beta_1^t \approx \frac{\beta_2}{y_t} - 1$$

Po zlogaritmování máme $\ln \beta_0 + t \cdot \ln \beta_1 = \ln \left(\frac{\beta_2}{y_t} - 1 \right)$

a sečtením těchto vztahů přes $t = 1, 2, \dots, n$ dostaneme **Rhodesův vzorec**

$$(78) \quad \ln \beta_0 = -\frac{(n+1) \ln \beta_1}{2} + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left(\frac{\beta_2}{y_t} - 1 \right) \quad . \text{ Vyčíslením (78) máme}$$

$$(78) \quad \ln \beta_0 = -\frac{205 \cdot (-0,0101467)}{2} + \frac{1}{204} \sum_{t=1}^{204} \ln \left(\frac{32716}{y_t} - 1 \right)$$

$$(78) \quad \ln \beta_0 = \frac{2,08007}{2} + \frac{1}{204} \sum_{t=1}^{204} \ln \left(\frac{32716}{y_t} - 1 \right) = 1,04004 + \frac{1}{204} \sum_{t=1}^{204} \ln \left(\frac{32716}{y_t} - 1 \right)$$

$$(78) \quad \ln \beta_0 = 1,04004 + \frac{1}{204} 393,765303 = 1,04004 + 1,9302221 = 2,970262$$

Z něho se už snadno vypočte odhad parametru β_0 „vyexponováním“:

$$b_0 = \exp(2,970262) = 19,49703$$

b_0

0,000550894 4,14048e-06

b1	0,990872	0,000212008
b2	2,60351e-05	3,78326e-06

genr b0 = \$coeff(0)

genr b1 = \$coeff(time)