Holtova adaptivní vyrovnávací metoda[1]

Jistým zobecněním dvojitého exponenciálního vyrovnávání je tzv. *Holtova metoda*, ve které se uplatňují dvě vyrovnávací konstanty $0 < \alpha, \gamma < 1$

α **pro vyrovnání úrovně** L_t

γ **pro vyrovnání směrnice** T_t **téže řady**

(81) $$L_t = \alpha . y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

Vyhlazení úrovně je tedy definováno jako konvexní kombinace poslední pozorované hodnoty v čase t a odhadu této hodnoty vzatého v předchozím čase $t-1$.

(82) $$T_t = \gamma .(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma).T_{t-1}$$

Pro vyrovnání, resp. predikci zde platí předpisy:

(83) $$\hat{y}_t = L_t$$

(84) $$\hat{y}_{t+\tau}(t) = L_t + T_t . \tau \quad \textit{pro} \quad \tau > 0$$

Jako volby počátečních hodnot se doporučují:

(85A) $$L_0 = y_1$$

(85B) $$T_0 = y_2 - y_1$$

Za pozornost stojí, že *Holtova metoda* byla nejprve navržena jako *ad hoc* **postup na základě prosté logické úvahy. Teprve později bylo prokázáno, že *Brownovo dvojité exponenciální vyrovnávání* se zvolenou vyrovnávací konstantou α je speciálním případem *Holtova metody*, jejíž vyrovnávací konstanty jsou** pak

(86) $$\alpha_H = \alpha_B(2-\alpha_B) \quad , \quad \gamma_H = \frac{\alpha_B}{2-\alpha_B}$$

Za pozornost stojí, že *Holtova metoda* byla nejprve navržena jako *ad hoc* **postup na základě prosté logické úvahy. Teprve později bylo prokázáno, že *Brownovo dvojité exponenciální vyrovnávání* se zvolenou vyrovnávací konstantou α je speciálním případem *Holtova metody*, jejíž vyrovnávací konstanty jsou** pak

$\alpha_B = 0{,}1$ ***, potom*** $\alpha_H = 0{,}1.(2-0{,}1) = 0{,}19$ $\quad \gamma_H = \frac{0{,}1}{2-0{,}1} = \frac{0{,}1}{1{,}9} = 0{,}0527$

$\alpha_B = 0{,}2$ ***, pak*** $\alpha_H = 0{,}2.(2-0{,}2) = 0{,}36$ $\quad \gamma_H = \frac{0{,}2}{2-0{,}2} = \frac{0{,}1}{1{,}9} = 0{,}111111$

$\alpha_B = 0{,}3$ ***, odtud*** $\alpha_H = 0{,}3.(2-0{,}3) = 0{,}51$ $\quad \gamma_H = \frac{0{,}3}{2-0{,}3} = \frac{0{,}3}{1{,}7} = 0{,}17647$

---

[1] **Postup je popsán v textu: Holt, C.,C: Forecasting seasonal and trends by exponentially weighted moving averages . Res. mem. No 52. *Carnegie Institute of Technology. Pittsburg 1957*.**

Holtova-Wintersova metoda

Jedná se o rozšíření *Holtovy metody* tak, aby vedle lokálně lineárního trendu byla adaptivně zohledněna také sezónnost. Proto *aditivní i multiplikativní verze Holtovy-Wintersovy metody* používají dokonce tři vyrovnávací konstanty:

- α pro vyrovnání úrovně procesu
- γ pro vyrovnání směrnice procesu
- δ pro vyrovnání sezónní složky dané řady se sezónou rovnou *s*

Aditivní verze Holtovy-Wintersovy metody

Rekurentní vzorce *aditivní verze Holtovy-Wintersovy metody* mají tvar

vyrovnání úrovně $L_t = \alpha(y_t - S_{t-s}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$

vyrovnání směrnice $T_t = \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1}$

vyrovnání sezónnosti $S_t = \delta(y_t - L_t) + (1-\delta)S_{t-s}$

vyrovnání celkem $\hat{y}_t = L_t + S_t$

predikce $\hat{y}_{t+\tau}(t) = L_t + T_t.\tau + S_{t+\tau-s}$ pro $\tau = 1,2,\ldots,s$

$\hat{y}_{t+\tau}(t) = L_t + T_t.\tau + S_{t+\tau-2s}$ pro $\tau = s+1, s+2, \ldots, 2s$

Podobně jako *Holtova metoda* byla i *Holtova-Wintersova metoda* nejprve navržena jako *ad hoc* postup pouze na základě intuitivních úvah. Např. eliminace sezónní složky dané řady v čase t se získá jako konvexní kombinace dvou položek, a to

(1) *odhadu této sezónní složky aktuálně zkonstruované v čase* t očištěním pozorované hodnoty y_t od úrovňové trendové složky jako $y_t - L_t$ a

(2) odhadu této sezónní složky zkonstruované v čase $t-s$ tím způsobem, že se užije její nejaktuálnější odhad S_{t-s} z předchozí sezóny.

Podobně se přistupuje k očištění pozorované hodnoty y_t od sezónní složky $y_t - S_t$ jako a k předpovědím $\hat{y}_{t+\tau}(t)$, kdy je nutné rozlišit, o jakou sezónu se jedná (samozřejmě pro předpovědní sezóny velmi vzdálené od aktuálního času *t* do budoucnosti mohou být předpovědi již značně nespolehlivé).

Realizace rekurentních vzorců *Holtovy-Wintersovy metody* předpokládá volbu počátečních hodnot konstant $L_0, T_0, S_{-s+1}, S_{-s+2}, S_{-s+3}, S_0$ a volbu vyrovnávacích konstant α, γ, δ :

(1) Počáteční hodnoty vyrovnávacích konstant

lze stanovit modelováním sezónnosti pomocí kvalitativních proměnných při multiplikativním určení sezónnosti (ale bez normalizace sezónních indexů)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 .t + \alpha_2 x_{t2} + \alpha_3 x_{t3} + \ldots \alpha_s x_{ts} + \varepsilon_t$$

pomocí regrese s umělými (*dummy)* proměnnými $x_2, x_3, \ldots, x_s$

$$L_0 = b_0 \quad T_0 = b_1 \quad S_{-s+1} = 0 \quad S_{-s+2} = a_2 \quad S_{-s+3} = a_3 \text{ ,......, } S_0 = a_s$$

Počáteční hodnoty L_0, T_0 získáme přímo jako odhady regresních koeficientů úrovně a sklonu v běžné regresi lineárního trendu. Parametr směrnice je přímo roven T_0 , protože odstup mezi pozorováními je 1 (období).

(2) Při volbě vyrovnávacích konstant α, γ, δ se využívá:

a) pevná volba (v běžných postupech se doporučuje

$$\alpha = 0{,}4,\ \gamma = 0{,}1, \delta = 0{,}4$$

b) odhad α, γ, δ podobně jako pro exponenciální vyrovnávání minimalizací kritéria *SSE*

Multiplikativní verze Holtovy-Wintersovy metody

Rekurentní vzorce *aditivní verze Holtovy-Wintersovy metody* mají tvar

vyrovnání úrovně: $L_t = \alpha(y_t / Sz_{t-s}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$

vyrovnání trendu: $T_t = \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1}$

vyrovnání sezónnosti: $Sz_t = \delta(y_t / L_t) + (1-\delta)Sz_{t-s}$

vyrovnání celkem: $\hat{y}_t = L_t . Sz_t$

predikce: $\hat{y}_{t+\tau}(t) = (L_t + T_t.\tau).Sz_{t+\tau-s}$ **pro** $\tau = 1,2,\ldots,s$

$\hat{y}_{t+\tau}(t) = (L_t + T_t.\tau).Sz_{t+\tau-2s}$ **pro** $\tau = s+1, s+2,\ldots,2s$

Z výše uvedených modifikací je zřejmé, že – v porovnání s aditivní verzí metody **– se příslušné součty/rozdíly ve vztahu k sezónností nahradí příslušnými analogickými násobky/podíly.**

Abychom mohli iniciovat rekurentní formule této verze metody, musíme i zde určit pravidlo pro určení jejich počátečních hodnot $L_0, T_0, Sz_{-s+1}, Sz_{-s+2}, \ldots Sz_0$**:**

Doporučuje se tato volba:

[***s*** **je počet pozorování/sezón za rok,** ***m*** **je počet let/**každé **sezóny časové řady]**

$\bar{y}_1$ **je průměr hodnot za první rok** $\bar{y}_1 = \sum_{j=0}^{s-1} y_{1+j}$

$\bar{y}_m$ **je průměr hodnot za poslední m-tý rok** $\bar{y}_m = \sum_{j=s.(m-1)}^{s.m-1} y_{1+j}$

a) počáteční hodnota sklonu $T_0 = \dfrac{\bar{y}_m - \bar{y}_1}{(m-1).s}$ **, kde**

$(m-1)s$ **je počet období mezi oběma spočtenými průměry, takže** T_0 **vyjadřuje průměrnou změnu sklonu za 1 období (čtvrtletí, měsíc) během úseku pozorování.**

b) počáteční hodnota úrovně $L_0 = \bar{y}_1 - \dfrac{s+1}{2}.T_0$

$(s+1)/2.T_0$ **je průměrná** (centrovaná na střed roku) **změna úrovně za 1 období spočtená z celého úseku pozorování.**

c) počáteční hodnota sezónnosti

$$Sz_{j-s} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} \frac{y_{j+s.i}}{\tilde{y}_{i+1} - \left(\dfrac{s+1}{2} - j\right).T_0} \qquad j = 1,2,\ldots,s$$ **, kde**

$\tilde{y}_1$ je průměr hodnot za první sezónu $\tilde{y}_1 = \sum_{i=0}^{m-1} y_{1+si}$

$\tilde{y}_s$ je průměr hodnot za poslední s-tou sezónu $\bar{y}_m = \sum_{i=0}^{m-1} y_{s+s.i}$

$\tilde{y}_i$ je aritmetický průměr pozorování přes *i*-tou sezónu (délky *s*) a *m* je celkový počet těchto sezón.

Doporučení:Předpovědní interval pokrývající $(1-p).100\%$ očekávaných hodnot se zkonstruuje následovně:

$$\left(y_{n+\tau}(n) - u_{1-p/2}.d_\tau.MAE \quad ; y_{n+\tau}(n) + u_{1-p/2}.d_\tau.MAE\right)$$, kde pro

$$\theta = max\{\alpha, \gamma, \delta\}, \nu = 1-\theta$$

$$d_\tau = 1{,}25.\left(\frac{1+\frac{\theta}{(1+\nu)^3}.\left[\left(1+4\nu+5\nu^2\right)+2\theta(1+3\nu)\tau+2\theta^2\tau^2\right]}{1+\frac{\theta}{(1+\nu)^3}.\left[\left(1+4\nu+5\nu^2\right)+2\theta(1+3\nu)+2\theta^2\right]}\right)^{1/2},$$

Výpočet MAE se liší dle toho, zda jde o aditivní nebo multiplikativní verzi metody:

Pro aditivní verzi:

$$MAE = \frac{1}{n-s}\sum_{t=s+1}^{n}\left|y_t - L_{t-1} - T_{t-1} - Sz_{t-s}\right|$$

Pro multiplikativní verzi:

$$MAE = \frac{1}{n-s}\sum_{t=s+1}^{n}\left|\frac{y_t}{Sz_{t-s}} - L_{t-1} - T_{t-1}\right|$$

Pro volbu trojice konstant α, γ, δ platí tatáž pravidla jako v případě aditivní verze této metody.

Literatura:

Abraham,B. a Ledolter,J. [1983]: Statistical Methods for Forecasting. *Wiley. New York 1983.*

Bowerman,B.,L a O´Connell,R.T [1987]: Time Series Forecasting. *Duxbury Press. Boston 1987.*

Montgomery a Johnson [1976]: Forecasting and Time Series Analysis. *McGraw-Hill. New York 1976.*