Teorie portfolia

Kvantifikace očekávaného výnosu a změny výnosu portfolia

Téma přednášky

- návrat k předchozímu cvičení
- historická metoda kvantifikace očekávaného výnosu a rizika daného aktiva
- expertní metoda kvantifikace očekávaného výnosu a rizika daného aktiva
- očekávaný výnos portfolia
- riziko očekávaného výnosu portfolia

Návrat k předchozímu cvičení

- jak upravit funkci Excelu (2007 a starší) pro výpočet kovariance v případě výběrového souboru s počtem prvků <=30?
- proč v případě výběrového souboru s počtem prvků <=30 kovarianční matice nevycházela správně, ale korelační ano?

Historická metoda

- známe-li pravděpodobnostní strukturu, to znamená, že budeme znát s jakou pravděpodobností (p_1, p_2, …, p_n), bude *i*-tý cenný papír nabývat hodnot r_1, r_2, …, r_n , potom pro *střední míru zisku* (očekávanou výnosnost) cenného papíru můžeme psát

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} r_j \cdot p_j = r_1 \cdot p_1 + r_2 \cdot p_2 + \cdots + r_n \cdot p_n$$

Historická metoda

- *riziko změny výnosnosti cenného papíru* potom bude

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(r_j - \bar{r}_i\right)^2 \cdot p_j}$$

- v praxi však většinou není pravděpodobnostní struktura známa
- proto se míra zisku i riziko změny míry zisku odhaduje z minulých pozorovaných hodnot pomocí *aritmetického průměru* a *směrodatné odchylky* (resp. *výběrové směrodatné odchylky*)

Historická metoda

- za hodnoty r_j dosadíme tzv. pozorované hodnoty výnosnosti cenného papíru

$$r_j = \frac{P_t - P_{t-k} + D}{P_{t-k}}$$

- vzhledem k tomu, že v ekonomice je obvykle dividendový výnos mnohem menší než výnos kapitálový, budeme dále uvažovat pouze výnos kapitálový

Historická metoda

- očekávaný výnos z portfolia za dobu jeho trvání je tvořen součtem krátkodobých výnosů akcií za tuto dobu trvání
- historický přístup patří i přes určitá negativa k základním orientačním způsobům kvantifikace výnosu
- je v podstatě jediným způsobem jak kvantifikovat kovariance mezi náhodnými veličinami, které popisují výnos jednotlivých aktiv
- tuto metodu jsme dělali na prvním cvičení

Expertní metoda

- jedná se o odhady expertů tržních cen jednotlivých aktiv v okamžiku realizace portfolia
- budeme u každého experta předpokládat, že provede odhad pro všechny cenné papíry, které chceme mít v portfoliu
- dále nebudeme uvažovat úročení nebo diskontování toku výnosů, které plynou z tohoto portfolia během jeho držení

Expertní metoda

- budeme používat následující značení
- TC_i – tržní cena *i*-tého aktiva v době vzniku portfolia
- N_e – počet expertů
- N_{i_j} – celkový počet odhadů budoucí tržní ceny c_{ijk} a d_{ijk} *i*-tého aktiva, které provedl *j*-tý expert
- p_{ijk} - pravděpodobnost, že *i*-té aktivum dosáhne podle *j*-tého experta v okamžiku realizace portfolia *k*-tého výnosu z doby jeho trvání

Expertní metoda

- na trhu je známá velikost současných tržních cen všech aktiv, které jsou platné v okamžiku vzniku portfolia
- vybraní experti odhadnou čísla $c_{i_{jk}}$ a $d_{i_{jk}}$ a pravděpodobnosti jejich dosažení pro i = 1, 2, 3, …, n; j = 1, 2, …, N_e; k = 1, 2, …, N_{i_j}
- každý expert odhadne pravděpodobnosti tak, aby platilo

$$\sum_{k=1}^{N_{i_j}} p_{i_{jk}} = 1$$

Expertní metoda

- pravděpodobnost realizace konkrétní hodnoty tržní ceny v době realizace portfolia je dána vztahem

$$p_{i_k} = \frac{1}{N_e} \cdot \sum_{j=1}^{N_e} p_{i_{jk}}$$

- očekávaná výnosnost i-tého aktiva při realizaci portfolia v případě tržní ceny $c_{i_{jk}}$ je

$$r_{i_{jk}} = \frac{c_{i_{jk}} + d_{i_{jk}} - TC_i}{TC_i}$$

Expertní metoda – příklad

- předpokládejme, že jsme dostali od tří nezávislých expertů informace o odhadu velikosti tržních cen *i*-té akcie v okamžiku realizace portfolia spolu s pravděpodobnostmi, že bude dosažena jimi odhadnutá cena
- dále pro jednoduchost a přehlednost budeme uvažovat, že dividendy z tohoto cenného papíru budou rovny nule
- dále předpokládejme, že současná hodnota *i*-té akcie bude 100 Kč

Expertní metoda – příklad

c_{i_j}	$r_{i_{jk}} = \frac{c_{i_{jk}} - TC_i}{TC_i}$	$p_{i_{1k}}$	$p_{i_{2k}}$	$p_{i_{3k}}$	$\sum_{j=1}^{N_e} p_{i_{jk}}$	$p_{i_k} = \frac{1}{N_e} \cdot \sum_{j=1}^{N_e} p_{i_{jk}}$
90	**-0,1**	5	0	0	5	**5/3**
100	**0**	80	20	0	100	**100/3**
110	**0,1**	5	30	50	85	**85/3**
130	**0,3**	0	40	20	60	**60/3**
160	**0,6**	10	10	20	40	**40/3**
180	**0,8**	0	0	10	10	**10/3**

Expertní metoda – příklad

- v posledním sloupci je pravděpodobnostní rozložení pro hodnoty v druhém sloupci
- spočítáme charakteristiky aktiva (očekávanou výnosnost a riziko) a výsledkem je očekávaná výnosnost 19,33% s rizikem 23,01% (výpočet v Excelu)

Očekávaný výnos portfolia

- mějme portfolio složené z *n* akcií
- i-tá akcie má v portfoliu váhu (podíl) X_i a očekávanou výnosnost $\bar{r}_i$
- každá akcie přispěje k očekávané výnosnosti portfolia svým „dílem“, můžeme tedy psát

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \cdot X_i = \bar{r}_1 \cdot X_1 + \bar{r}_2 \cdot X_2 + \cdots + \bar{r}_n \cdot X_n$$

Riziko očekávaného výnosu portfolia

- mějme 2 aktiva – A a B
- předpokládejme 3 možné situace na trhu – dobrou (D), průměrnou (P) a špatnou (Š)
- A má následující výnosnosti pro uvedené situace – D – 16%, P – 10%, Š – 4%
- B má následující výnosnosti pro uvedené situace – D – 1%, P – 10%, Š – 19%
- sestavíme portfolio – 60% A a 40% B

Riziko očekávaného výnosu portfolia

Stav trhu	Aktivum A	Aktivum B	Portfolio – 60% A + 40% B
Dobrý (D)	1,16	1,01	0,6*1,16+0,4*1,01 = **1,1**
Průměrný (P)	1,10	1,10	0,6*1,10+0,4*1,10 = **1,1**
Špatný (Š)	1,04	1,19	0,6*1,04+0,4*1,19 = **1,1**

Riziko očekávaného výnosu portfolia

- pro výpočet rizika očekávané výnosnosti portfolia použijeme rozptyl (resp. směrodatnou odchylku)
- vyjdeme ze vzorce pro výpočet rozptylu

$$D^2(X) = E\left[X - E(X)\right]^2$$

- po úpravě a zobecnění dostáváme směrodatnou odchylku

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij}}$$

Riziko očekávaného výnosu portfolia

- pokud jsou cenné papíry v portfoliu nezávislé, potom se riziko portfolia blíží 0 s rostoucím počtem cenných papírů v portfoliu
- vzorec pro rozptyl portfolia můžeme přepsat na

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 \cdot \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left(X_j \cdot X_k \cdot \sigma_{jk} \right)$$

- pokud předpokládáme stejné váhy pro všechny cenné papíry v portfoliu, vzorec upravíme na

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^2}{n} + \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{\sigma_{jk}}{n \cdot (n-1)} \qquad \sigma_p^2 = \frac{1}{n} \overline{\sigma}_j^2 + \frac{n-1}{n} \overline{\sigma}_{jk}$$

Riziko očekávaného výnosu portfolia

- oba výrazy jsou průměry – druhý představuje průměrnou kovarianci – počet kovariancí je n*(n-1)
- příspěvek k riziku portfolia rizik jednotlivých cenných papírů se s jejich počtem blíží k nule
- příspěvek k riziku portfolia, který přináší kovariance, se s rostoucím počtem blíží k „průměrné kovarianci“
- individuální riziko jednotlivých cenných papírů může být zcela odstraněno