Masarykova univerzita
Ekonomicko–správní fakulta

Matematika

studijní text

Miloslav Mikulík, Luboš Bauer, Markéta Matulová, V.Mikulík

Brno 2010

Obsah

Kapitola 1

Čísla

Každý čtenář tohoto textu pracuje s čísly. Práce s čísly je mu samozřejmostí, avšak málokdo si uvědomuje, jak je pojem čísla obtížný. Přesné zavedení pojmu čísla se vymyká našim možnostem. Tuto kapitolu je proto možné chápat jen jako připomenutí vlastností čísel a jako pokus o vytvoření náhledu na jeden způsob zavedení pojmu čísla. V této kapitole uvedeme též několik připomínek k numerickým výpočtům a zopakujeme si některé úkony s reálnými čísly. Zopakujeme si též zavedení komplexních čísel. Součástí výkladu je několik příkladů. Pokud někdo bude mít potíže s jejich řešením, doporučuji sbírky příkladů ze středoškolské matematiky.

1.1. Reálná čísla

Historicky začali lidé používat napřed *přirozená čísla*. Vyjadřuje se jimi počet prvků konečné množiny i pořadí odpočítávaných objektů. V matematické literatuře není pojem množina přirozených čísel chápán jednotně. Někteří autoři zařazují do množiny přirozených čísel i nulu. V dalším budeme pod množinou přirozených čísel rozumět jen množinu čísel $1, 2, 3, \dots$; budeme ji značit $\mathbb{N}$.

Na množině $\mathbb{N}$ je zavedena relace „$\leq$“ (menší nebo rovno) a jsou zavedeny operace sečítání, označená „$+$“, a násobení, označená „$\cdot$“. Jestliže $a, b \in \mathbb{N}$ a existuje takové číslo $c \in \mathbb{N}$, pro něž platí $a = b+c$, označíme $c = a-b$. Je tedy mezi některými prvky z $\mathbb{N}$ definována operace „$-$“, nazveme ji odečítáním. Požadavek proveditelnosti této operace pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ vede k zavedení 0 a celých záporných čísel $-1, -2, -3, \dots$. Množina $\mathbb{N}$ sjednocená s množinou $\{0\}$ a množinou celých záporných čísel se značí $\mathbb{Z}$ a nazývá *množinou celých čísel*. Operace „$+, -$“ a uspořádání „$<$“ definované na množině přirozených čísel se rozšiřují na celou množinu $\mathbb{Z}$. Na množině $\mathbb{Z}$ je pak definována operace „$-$“. (Zavedení celých čísel umožňuje pracovat nejenom s hotovostí, ale i s dluhy.)

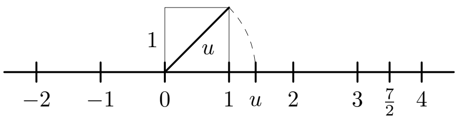
Nechť $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Jestliže existuje $x \in \mathbb{Z}$ tak, že $p = q \cdot x$, píšeme $x = \frac{p}{q}$, resp. $x = p : q$. Operaci „$:$“ nazýváme dělením. Aby dělení čísla p číslem q, $q \neq 0$, bylo vždy proveditelné, rozšiřuje se množina $\mathbb{Z}$ na množinu $\mathbb{Q}$, zvanou množina racionálních čísel. Operace „$+, -, \cdot$“ a uspořádání, definované na množině $\mathbb{Z}$, rozšiřujeme na celou množinu $\mathbb{Q}$. Na množině $\mathbb{Q}$ je pak definováno i dělení čísla p číslem q pro všechna $p, q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$. Množinu $\mathbb{Q}$ nazýváme *množinou racionálních čísel* a operace „$+, -, \cdot, :$“ nazýváme *racionálními operacemi*. Racionálním číslem je tedy každé číslo tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Jestliže $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, potom $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, jestliže $ps = rq$. Např. $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Každé celé číslo $a \in \mathbb{Z}$ lze zapsat ve tvaru $\frac{a}{1}$. (Zavedení racionálních čísel umožňuje počítat i s částmi celku.)

Zaveďme si nyní číselnou osu.

Číselná osa. Uvažujme přímku s daným bodem 0, nazveme jej počátkem. Jistý smysl přímky zvolíme jako kladný. Zvolme dále úsečku, její délku označíme jako jednotku. V textu budeme tuto přímku kreslit ve vodorovné poloze a za její kladný smysl volíme směr zleva doprava. Ke každému racionálnímu číslu přiřadíme na této přímce bod takto: ke každému přirozenému číslu n přiřadíme bod, označme jej n, a to tak, že zvolenou jednotku naneseme od počátku n-krát v kladném smyslu, to jest doprava. Ke každému celému zápornému číslu m přiřadíme bod, označme jej m, a to tak, že zvolenou jednotku naneseme od počátku $(-m)$-krát v záporném smyslu, to jest doleva. Číslu 0 přiřadíme počátek. Nechť $\frac{p}{q}$ je racionální číslo, které není celým číslem. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Úsečku, jejíž délku jsme zvolili za jednotku, rozdělme na q stejných dílků. Je-li $p > 0$, naneseme p těchto dílků doprava, je-li $p < 0$, naneseme $(-p)$ těchto dílků doleva. Obdržený bod označíme $\frac{p}{q}$. Jsou-li $\frac{p}{q}$,

$\frac{r}{s}$ taková racionální čísla, že $ps = rq$, potom je jim přiřazen tentýž bod. Čísla $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ jsou zápisy téhož racionálního čísla, např. zápisy $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ představují totéž racionální číslo. Označme $\tilde{\mathbb{Q}}$ množinu všech bodů přiřazených naznačeným způsobem k racionálním číslům. Uvedenou přímku nazveme číselnou osou. Není podstatný rozdíl mezi bodem z množiny $\tilde{\mathbb{Q}}$ a racionálním číslem, k němuž byl bod přiřazen. Budeme tedy používat pojem bod $\frac{p}{q}$ a racionální číslo $\frac{p}{q}$ ve stejném významu. Na obr. 1.1 jsou vyznačena čísla $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ a číslo $\frac{7}{2}$.



Obrázek 1.1: Číselná osa

Jestliže k číslu p je přiřazen bod na číselné ose nalevo od bodu přiřazenému k číslu q, je $p < q$, resp. $q > p$. Budeme pak říkat, že číslo p je menší než číslo q, resp. že číslo q je větší než číslo p. Řekneme, že $p \leq q$, je-li $p < q$ nebo $p = q$.

1.2. Zápis reálných čísel v desítkové číselné soustavě

K zápisu čísel v desítkové soustavě používáme deset symbolů (cifer) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ a případně desetinnou čárku (v zahraničním textu a při práci na počítači často desetinnou tečku). Tak např.

$$3,15 \tag{1.1}$$

je zkrácený zápis čísla $3+1\cdot 10^{-1}+5\cdot 10^{-2}\cdot$. Tomuto číslu odpovídá na číselné ose bod ležící mezi bodem „3“ a „4“. Vzdálenost mezi „3“ a „4“ rozdělíme na 10 dílků – jeden dílek má délku $\frac{1}{10}$ a od čísla „3“ naneseme jeden tento dílek napravo – dostaneme bod na číselné ose odpovídající číslu $3,1$. Dílek délky $\frac{1}{10}$ rozdělíme opět na 10 dílků – jeden dílek má pak délku $\frac{1}{100}$. „5“ těchto dílků naneseme od bodu „$3,1$“ napravo. Dostaneme tak bod, který odpovídá bodu „$3,15.$“

1.2.1. Zápis racionálního čísla.

Každé nenulové racionální číslo lze zapsat ve tvaru $+\frac{p}{q}$ nebo $-\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Dělením čísla p číslem q podle známého algoritmu dostaneme kde sgn je znaménko „$+$“, nebo „-“, n je přirozené číslo nebo nula, „$,$“ je tzv. desetiná čárka a $a_1, a_2, \ldots$ jsou cifry „$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$“.
Např. a) $\frac{3}{4} = 0,75$ b) $\frac{1}{3} = 0,333...$ Lehce nahlédneme, že zápis každého racionál-

ního čísla se vyznačuje tím, že buďto

- za desetinou čárkou je konečný počet nenulových cifer nebo
- existuje taková uspořádaná skupina čísel, že za každou takovou skupinou čísel bezprostředně následuje opět tato skupina čísel. Takováto čísla se nazývají periodická. Zápis je možné provést tak, že nad prvním výskytem opakující se skupiny se dá pruh a další navazující skupiny se nepíší. Tedy nahoře uvedené číslo $\frac{1}{3} = 0,333...$ lze zapsat jako $0,\overline{3}$.

Ke každému racionálnímu číslu odpovídá na číselné ose bod (Tak jak jsme to viděli s číslem „$3,15$“.

1.2.2. Iracionální čísla

Lze ukázat, že délku uhlopříčky čtverce o straně „1“ nelze vyjádřit jako racionální číslo. To znamená, že neexistuje takové racionální číslo „u“, jehož druhá mocnina je je rovna „2“ (viz.1.1). Tento nedostatek odstraníme zavedením tzv. **iracionálních čísel.** Iracionálním číslem budeme rozumět opět symbol (1.2),avšak takový, že za desetinou čárkou je nekonečně mnoho nenulových cifer a neexistuje v tomto zápisu taková uspořádaná skupina čísel, že za každou takovou skupinou čísel bezprostředně následuje opět tatáž skupina čísel.To znamená, že zápis (1.2) nepředstavuje číslo racionální. Jestliže

$$x = sgn\ n, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \tag{1.2}$$

je iracionální číslo,potom pro každé n leží číslo x mezi racionálními čísly

$$x_1 = sgn\ n, a_1 a_2 \dots a_n, \quad x_2 = sgn\ n, a_1 a_2 \dots a_n, \dots a_{n+k} + 1S, \tag{1.3}$$

kde k je nejmenší takové přirozené číslo, že $a_{n+k} \notin \{0, 9\}$. Menší z čísel (1.3), označme je x_d nazveme dolní aproximací iracionálního čísla x a větší z těchto čísel, označme je x_h, nazveme horní aproximací čísla x. Leží tedy číslo x mezi dvěma racionálními čísly, jejichž vzdálenost je $|x_h - x_d|$. S rostoucím n se čísla x_d, x_h „přibližují“ k bodu, který odpovídá iracionálnímu číslu. V dalším nebudeme dělat rozdíl mezi bodem na číselné ose a reálným bodem.

1.2.3. Aproximace čísel.

Uveďme si několik poznámek k aproximaci čísla x číslem $\tilde{x}$. Rozdíl $\tilde{x} - x$ nazýváme *absolutní chybou aproximace* $\tilde{x}$. V reálných situacích tuto chybu neznáme, ale často ji můžeme odhadnout. Odhadem absolutní chyby rozumíme číslo $\delta \geq 0$, pro něž platí $|\tilde{x} - x| \leq \delta$.

Jestliže x je iracionální číslo v desítkové soustavě a v jeho zápise ponecháme jen prvních n cifer za desetinnou čárkou, dostaneme racionální číslo $\tilde{x}$, pro než platí $|x-\tilde{x}| < 10^{-n}$.

Předpokládejme, že při měření vzdálenosti dvou míst A, B, kde A je místo v Praze a B je místo v Brně, se dopustíme chyby nejvýše $1\,\mathrm{m}$. Podobně předpokládejme, že při měření délky obdélníkové místnosti se dopustíme rovněž chyby nejvýše $1\,\mathrm{m}$. Je zřejmé, že stejný odhad chyby měření nelze použít ke srovnání přesnosti metody měření.

K posouzení „kvality“ aproximace se pro $x \neq 0$ používá často tzv. *relativní chyba*, definovaná vztahem

$$\frac{x-\tilde{x}}{x}.$$

Číslo $\delta \geq 0$, pro něž platí

$$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| \leq \delta,$$

nazýváme odhadem *relativní chyby.*

Při numerických výpočtech jsme v jistém okamžiku nuceni čísla iracionální, s nimiž se pracuje, aproximovat čísly racionálními. Provádíme-li výpočty na kalkulačce, nebo na počítači, nemáme k dispozici ani množinu všech racionálních čísel. Pracuje se jen s čísly dané reprezentace v daném rozsahu. Výsledek racionální operace $(+, -, \cdot, :)$ *s těmito čísly se aproximuje podle zabudovaného kritéria opět číslem dané reprezentace.* Tím, že nepracujeme s přesnými čísly, alae jenom s jejich apoximacemi, může vést k velkým chybám. Je tomu tak především při dělení velice malými čísly. Iracionálním říslům často přiřazujeme symboly, např. π a teprve k závěru, jeli to účelné, provádíme aproximaci racionálními čísly.

1.2.4. Vlastnosti reálných čísel

Množinu všech racionálních čísel, sjednocenou s množinou čísel iracionálních,nazýváme množinou reálných čísel a budeme ji značit $\mathbb{R}$. Aritmetické operace „$+$ – sečítání, - –odečítání, . –násobení a ; dělení pro racionální čísla rozšiřujeme i na čísla reálná. Rovněž lze rozšířit relaci $\leq$ na množinu všech reálných čísel.“ (Zavedení je možno provést využitím dolní a horní aproximace aproximace iracionálních čísel.)

Uveďme však napřed základní vlastnosti takto zavedených reálných čísel. Dále uvedené vlastnosti je možno použít k axiomatickému zavedení reálných čísel takto. Množinu $\mathbb{R}$, na níž jsou zavedeny operace „$+, \cdot$“ a uspořádání $\leq$ s následujícími vlastnostmi, nazýváme množinou reálných čísel.

Základní vlastnosti reálných čísel

(R1) $(x+y)+z=x+(y+z)$ *pro všechna* $x,y,z\in\mathbb{R}$.

(R2) $x+y=y+x$ *pro každé* $x,y\in\mathbb{R}$.

(R3) *Existuje prvek* $0\in\mathbb{R}$ *tak, že pro každé* $x\in\mathbb{R}$ *platí* $x+0=x$.

(R4) *Ke každému* $x\in\mathbb{R}$ *existuje prvek* $-x\in\mathbb{R}$ *tak, že* $x+(-x)=0$.

(R5) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ *pro všechna* $x,y,z\in\mathbb{R}$.

(R6) $x\cdot y=y\cdot x$ *pro každé* $x,y\in\mathbb{R}$.

(R7) *Existuje prvek* $1\in\mathbb{R}$ *tak, že pro každé* $x\in\mathbb{R}$ *platí* $x\cdot 1=x$.

(R8) *Ke každému* $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$ *existuje prvek* $x^{-1}\in\mathbb{R}$ *tak, že* $x\cdot x^{-1}=1$.

(R9) $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ *pro všechna* $x,y,z\in\mathbb{R}$.

(R10) *Uspořádání* $\leq$ *je lineární.*

(R11) *Je-li* $x,y,z\in\mathbb{R}$, $x<y$, *pak* $x+z<y+z$.

(R12) *Je-li* $x,y,z\in\mathbb{R}$, $x<y$, $z>0$, *pak* $x\cdot z<y\cdot z$.

(R13) *Jsou-li* $X\subseteq\mathbb{R}$, $Y\subseteq\mathbb{R}$ *neprázdné množiny a platí-li* $x\leq y$ *pro každé* $x\in X$ *a každé* $y\in Y$, *pak existuje* $a\in\mathbb{R}$ *tak, že* $x\leq a\leq y$ *pro každé* $x\in X$ *a každé* $y\in Y$.

1.2.5. Vlastnosti uspořádání reálných čísel.

Ze „základních vlastností reálných čísel" dostáváme tuto větu.

Věta 1.1. (Nerovnice) *Pro libovolná čísla x, y, z, u platí*

(1.4) *Je-li $x \leq y, z \leq u$, potom $x + z \leq y + u$.*
Slovy: Levé i pravé strany souhlasných nerovnic můžeme sečíst.

(1.5) *Je-li $x \leq y, z > 0$, pak $x \cdot z \leq y \cdot z$.*
Slovy: Násobíme-li obě strany nerovnice týmž kladným číslem, smysl nerovnice se nezmění.

(1.6) *Je-li $0 < x \leq y, 0 < z \leq u$, platí $0 < x \cdot z \leq y \cdot u$.*

(1.7) *Je-li $x \leq y, z < 0$, potom $x \cdot z \geq y \cdot z$.*
Slovy: Násobíme-li obě strany nerovnice týmž záporným číslem, změní se smysl nerovnice.

(1.8) *Je-li $0 < x \leq y$, platí $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.*
Slovy: Jestliže v nerovnici mezi kladnými čísly přejdeme k reciprokým hodnotám, změní se smysl nerovnice.

Důkaz: Dokážeme jen (1.7). Důkazy ostatních tvrzení přenechávám čtenáři. Nechť tedy

$$x \leq y, \quad z < 0.$$

Přičteme-li na obě strany vztahu $z < 0$ číslo $-z$, dostáváme podle (R11)

$$0 < -z.$$

Násobením vztahu $x \leq y$ číslem $-z$ dostáváme podle (1.6)

$$-xz \leq -yz.$$

Přičtením $xz + yz$ na obě strany této nerovnice dostáváme

$$yz \leq xz, \quad \text{to jest} \quad xz \geq yz.$$

Příklad 1.1. V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$2x + 1 < 5x - 2. \tag{1.9}$$

Řešení. Na obě strany (1.9) připočítejme $-2x + 2$. Užitím (R11) dostáváme

$$3 < 3x. \tag{1.10}$$

Násobením (1.10) číslem $\frac{1}{3}$ dostáváme

$$x > 1.$$

Tedy nerovnici (1.9) vyhovují všechna čísla $x > 1$.

1.2.6. Zavedení absolutní hodnoty reálného čísla.

Zopakujme si zavedení pojmu absolutní hodnota reálného čísla.

Definice 1.1. (Absolutní hodnota reálného čísla)
Nechť $x \in \mathbb{R}$. Položme

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{je-li } x \geq 0, \\ -x, & \text{je-li } x \leq 0. \end{cases}$$

Číslo $|x|$ nazveme *absolutní hodnotou* čísla x.

Příklad 1.2. a) $|-4| = 4$. Položíme-li $x = -4$, je $x < 0$, takže podle definice je $|-4| = |x| = -(-x) = -(-4) = 4$.

b) $|x-2|$, kde x je reálné se určí takto: Je-li $x - 2 \geq 0$, to jest, jestliže $x \geq 2$, je $|x-2| = x-2$. V případě, že $x-2 \leq 0$, to jest, jestliže $x \leq 2$, je $|x-2| = -(x-2) = 2-x$. Tedy

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{pro } x \geq 2, \\ 2-x & \text{pro } x < 2. \end{cases}$$

Pro absolutní hodnotu reálných čísel platí vztahy uvedené v následující větě. Jejich důkazy přenecháváme čtenáři.

Věta 1.2. (Pravidla pro absolutní hodnoty)
Nechť $x, y, a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. *Potom platí*

$$|x| \geq 0 \tag{1.11}$$

$$x \leq |x|, -x \leq |x| \tag{1.12}$$

$$|x| = |-x| \tag{1.13}$$

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \tag{1.14}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \tag{1.15}$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ pro } y \neq 0 \tag{1.16}$$

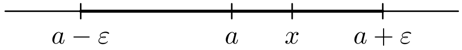
$$|x - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \tag{1.17}$$

Poznámka 1. Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ položme

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

je $\rho(x, y)$. Číslo ϱ je vzdálenost bodů x, y.

Poznámka 2. Jsou-li a, ε, kde $\varepsilon > 0$, pevná čísla, potom $|x - a|$ v (1.17) znamená, že x je od bodu a vzdáleno o méně než ε. Poněvadž body $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$ jsou od bodu a vzdáleny právě o ε, leží x mezi body $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$, tedy platí $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ (viz obr. 1.2).



Obrázek 1.2: K poznámce 2.

Příklad 1.3. V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$2x - 1 < |x - 2| < 3x + 2. \tag{1.18}$$

Řešení. Řešení rozdělme do dvou částí

α) Nechť $x - 2 \geq 0$. Potom $|x - 2| = x - 2$. Dále je

$$x \geq 2. \tag{1.19}$$

Ze vztahu

$$2x - 1 < x - 2$$

dostáváme

$$x < -1. \tag{1.20}$$

Ze vztahu

$$x - 2 < 3x + 2$$

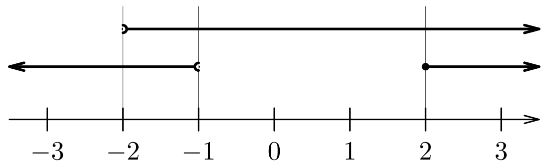
dostáváme

$$2x > -4,$$

tedy

$$x > -2. \tag{1.21}$$

Vztahy (1.19), (1.20), (1.21) vyznačíme na číselné ose.



Vidíme, že pro $x \geq 2$ nemá rovnice řešení.

β) Nechť $x - 2 < 0$. Potom $|x - 2| = -x + 2$. Podle předpokladu je

$$x < 2. \tag{1.22}$$

Ze vztahu (1.18) pro tato x dostáváme

$$2x - 1 < -x + 2.$$

Odtud dostáváme

$$3x < 3,$$

tj.

$$x < 1. \tag{1.23}$$

Ze vztahu

$$-(x-2) < 3x+2$$

dostáváme

$$4x > 0,$$

tj.

$$x > 0. \tag{1.24}$$

Ze vztahů (1.22), (1.23), (1.24) dostáváme

$$0 < x < 1.$$

Dané úloze tedy vyhovují všechna čísla, pro něž platí

$$0 < x < 1.$$

1.3. Maximum, minimum, supremum a infimum množiny reálných čísel

Zaveďme si několik pojmů spojených s množinami reálných čísel.

Ohraničené množiny. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že množina M je *shora ohraničená*, jestliže existuje takové číslo h, že

$$x \in M \;\Rightarrow\; x \leq h.$$

Číslo h nazýváme *horním ohraničením množiny* M.

Podobně řekneme, že množina M je *zdola ohraničená*, jestliže existuje takové reálné číslo d, že

$$x \in M \;\Rightarrow\; x \geq d.$$

Číslo d nazýváme *dolním ohraničením množiny* M.

Jestliže množina M je shora i zdola ohraničená, říkáme, že je *ohraničená*.

Jako příklad uveďme množinu

$$M = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, \text{ kde } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zřejmě horním ohraničením množiny M je každé reálné číslo $h \geq 1$ a dolním ohraničením množiny M je každé číslo ≤ 0.

Zaveďme si dále pojmy *maximum, minimum a pojmy suprémum a infimum množiny reálných čísel.*

Maximum číselné množiny

Řekneme, že číslo $x_{\max}$ *je* maximum *číselné množiny* M*, jestliže*

1. $x_{\max} \in M$,
2. *jestliže* $x \in M$*, potom* $x \le x_{\max}$.

Píšeme $x_{\max} = \max\limits_{x \in M} x$*, resp.* $x_{\max} = \max M$*. Jestliže takové číslo neexistuje, říkáme, že množina* M *nemá maximum.*

To znamená, že $x_{\max}$ je horním ohraničením množiny M, které do do M patří.

Minimum číselné množiny

Řekneme, že číslo $x_{\min}$ *je* minimum *číselné množiny* M*, jestliže*

1. $x_{\min} \in M$,
2. *jestliže* $x \in M$*, potom* $x \ge x_{\min}$.

Píšeme $x_{\min} = \min\limits_{x \in M} x$*, resp.* $x_{\min} = \min M$*. Jestliže takové číslo neexistuje, říkáme, že množina* M *nemá minimum.*

To znamená, že $x_{\min}$ je dolním ohraničením množiny M, které do do M patří.

Jako příklad uveďme dvě množiny U, V reálných čísel

$$U = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n^2}, \text{ kde } n \in \mathbb{N}\}, \quad (1.25)$$
$$V = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \wedge x \geq 0\}. \quad (1.26)$$

Zřejmě $\max\limits_{x \in U} x = 1$, $\min\limits_{x \in U} x$ neexistuje, $\max\limits_{x \in V} x = 2$, $\min\limits_{x \in V} x = 0$.

Všimněme si, že podle definice je maximum (minimum) číselné množiny M jejím prvkem.

Uveďme si dva podobné pojmy: supremum a infimum číselné množiny. Tyto pojmy posluchači někdy mylně zaměňují s pojmy maxima a minima číselné množiny.

Jestliže množina M je shora ohraničena, potom existuje její nejmenší horní ohraničení, označme je $supM$, a nazveme je suprémem množiny M. Toto číslo, na rozdíl od maxima množiny, nemusí patřit do množiny M.

Jako příklad uveďme množinu M=$\{$0,9; 0;99; 0.999, ...$\}$ Lehce nahlédneme, že tato množina je shora ohraničena – jejím suprémem je zřejmě číslo „1“. Toto číslo není maximem množiny M, neboť nepatří do M.

Jestliže množina M je zdola ohraničena, potom existuje její největší ohraničení zdola, označme je $inf M$, a nazveme je infimem množiny M. Toto číslo, na rozdíl od minima množiny, nemusí patřit do množiny M.

Jako příklad uveďme množinu M=$\{0{,}9;\ 0;09;\ 0.009,\ \dots\}$ Lehce nahlédneme, že tato množina je zdola ohraničena – jejím infimem je zřejmě číslo „0“. Toto číslo není minmem množiny M, neboť nepatří do M.

Všimněme si, že $\sup M$ *a* $\inf M$ *nemusí být prvky množiny* M*.* Jestliže platí $G = \sup M \in M$, potom G je maximem množiny M. Podobně, platí-li $g = \inf M \in M$, potom g je minimem množiny M.

1.3.1. Symboly $\infty, -\infty$

Rozšíření množiny reálných čísel o dva symboly $\infty, -\infty$. Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ nyní rozšíříme o dva symboly $\infty, -\infty$, (místo ∞ lze psát i $+\infty$) (čteme (plus) nekonečno a minus nekonečno). Množinu $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ budeme značit $\mathbb{R}^*$. Symboly $-\infty, \infty$ nazýváme nevlastními čísly. (Někdy z důvodu stručnosti pouze čísly.) Stejně jako místo termínu reálné číslo lze použít termín bod x, lze mluvit o bodech ∞, resp. $-\infty$.

Položme $x < \infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Jestliže množina $M \subseteq \mathbb{R}$ není shora ohraničená, položíme

$$\sup M = \infty.$$

Nevlastní číslo ∞ je nejmenší horní ohraničení množiny reálných čísel.

Položme $x > -\infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Jestliže množina $M \subseteq \mathbb{R}$ není zdola ohraničená, položíme

$$\inf M = -\infty.$$

Nevlastní číslo $-\infty$ je největším dolním ohraničením množiny přirozených čísel.

Některé racionální operace rozšíříme i na nevlastní čísla $-\infty, \infty$. Pravidla pro počítání s $-\infty, \infty$ obsahuje následující rámeček.

Nechť $a \in \mathbb{R}$, potom definujeme

$$\begin{aligned}
&a + \infty = \infty, \;\; \infty + a = \infty \\
&\infty + \infty = \infty \\
&a - \infty = -\infty, \;\; -\infty + a = -\infty \\
&-\infty - \infty = -\infty \\
&\frac{a}{\pm\infty} = 0 \\
&\infty \cdot \infty = \infty
\end{aligned}$$

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$
$$-\infty \cdot \infty = -\infty$$
$$-\infty \cdot (-\infty) = \infty$$
$$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & \textit{je-li } a > 0 \\ -\infty, & \textit{je-li } a < 0 \end{cases}$$
$$a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \textit{je-li } a > 0 \\ \infty, & \textit{je-li } a < 0 \end{cases}$$

Poznámka. *Všimněme si, že některé operace, například*

$$\infty - \infty,\ -\infty + \infty,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty),$$

jsou nadále nedefinované.

1.3.2. Zavedení pojmu interval, a pojmu okolí bodu.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $a \leq x \leq b$, budeme zapisovat jako $\langle a, b\rangle$ a nazývat *uzavřeným intervalem o koncových bodech* a, b. Číslo a (b) nazýváme levým (pravým) koncovým bodem intervalu $\langle a, b\rangle$.

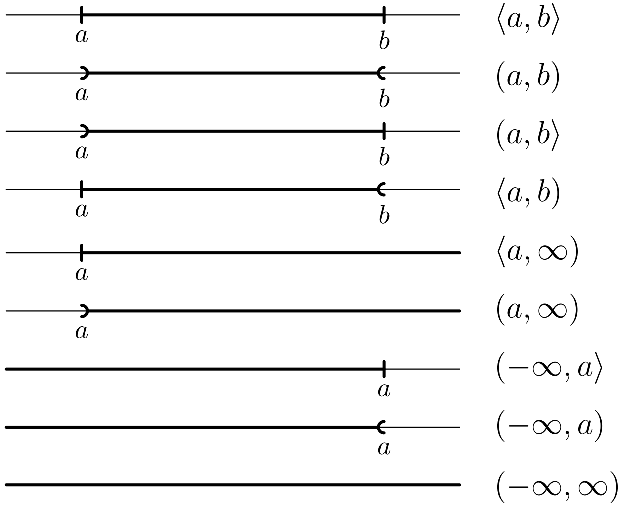
Množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $a < x < b$, budeme zapisovat jako (a, b) a nazývat *otevřeným intervalem o koncových bodech* a, b. Číslo a (b) nazýváme levým (pravým) koncovým bodem intervalu (a, b).

Množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $a \leq x < b$ ($a < x \leq b$), budeme zapisovat jako $\langle a, b)$ ($(a, b\rangle$) a nazývat *zleva uzavřeným (otevřeným) a zprava otevřeným (uzavřeným) intervalem o koncových bodech* a, b. Číslo a nazýváme levým a číslo b nazýváme pravým koncovým bodem intervalu $\langle a, b)$ ($(a, b\rangle$).

Množinu všech čísel $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $a \leq x < \infty$ ($a < x < \infty$), budeme zapisovat jako $\langle a, \infty)$ ((a, ∞)) a nazývat *zleva uzavřeným (otevřeným) intervalem o koncových bodech* a, ∞. Bod a budeme nazývat levým a bod ∞ jeho pravým koncovým bodem.

Množinu všech čísel $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $-\infty < x \leq a$ ($-\infty < x < a$), budeme zapisovat jako $(-\infty, a\rangle$ ($(-\infty, a)$) a nazývat *zprava uzavřeným (otevřeným) intervalem o koncových bodech* $-\infty, a$. Bod $-\infty$ budeme nazývat levým a bod a jeho pravým koncovým bodem.

Množinu všech reálných čísel x můžeme zapsat jako $(-\infty, \infty)$ a nazývat intervalem o koncových bodeh $-\infty, \infty$.



Obrázek 1.3: Intervaly.

Všimněme si, že levý koncový bod každého intervalu je menší než jeho pravý koncový bod. Kdybychom v definici intervalu $\langle a, b\rangle$ nahradili požadavek $a < b$ požadavkem $a \leq b$, zahrnuli bychom pod pojem intervalu též jednobodovou množinu, obsahující jediný prvek a, kterou bychom mohli zapsat jako $\langle a, a\rangle$. Na obr. 1.3 jsou vyznačeny uvedené intervaly.

Okolí bodu. Zaveďme si ještě pojem okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom interval $\langle a, a+\delta)$ budeme nazývat *pravým δ–okolím bodu* a a budeme jej většinou značit $U_\delta^+(a)$. Tedy $U_\delta^+(a) = \langle a, a+\delta)$. Kvůli zkrácení zápisu jej lze někdy označit stručně $U^+(a)$.

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom interval $(a-\delta, a\rangle$ budeme nazývat *levým δ–okolím bodu* a a budeme jej většinou značit $U_\delta^-(a)$. Tedy $U_\delta^-(a) = (a-\delta, a\rangle$. Kvůli zkrácení zápisu jej lze někdy označit stručně $U^-(a)$.

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom interval $(a-\delta, a+\delta)$ budeme nazývat *δ–okolím bodu* a a budeme jej většinou značit $U_\delta(a)$. Tedy $U_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$. Kvůli zkrácení zápisu jej lze někdy označit stručně $U(a)$.

Nechť $k \in \mathbb{R}$. Potom množinu (k, ∞) nazýváme k-okolím bodu ∞ a značíme $U_k(\infty)$, nebo stručně $U(\infty)$. Podobně množinu $(-\infty, k)$ nazýváme k-okolím bodu $-\infty$ a značíme $U_k(-\infty)$, nebo stručně $U(-\infty)$.

1.4. Komplexní čísla

Řada matematických úloh není řešitelná v oboru reálných čísel. Např. neexistuje reálné číslo x, pro něž je $x^2 = -1$. To znamená, že rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá v oboru reálných čísel řešení. Tato a celá řada jiných úloh nás inspiruje k zavedení komplexních čísel.

Definice 1.2.

Označme $\mathbb{C}$ množinu uspořádaných dvojic reálných čísel (x, y), na níž jsou zavedeny operace sečítání „$+$“ a násobení „$\cdot$“ s těmito vlastnostmi: Pro $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ položíme

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \tag{1.27}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{1.28}$$

Množinu $\mathbb{C}$ nazveme množinou komplexních čísel, její prvky nazýváme komplexními čísly.

Je-li $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, lze psát

$$z = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) \tag{1.29}$$

Číslo $(c, 0)$ lze zkráceně označit jako c pro každé $c \in \mathbb{R}$. Symbol $(c, 0)$ označuje tedy reálné číslo. Číslo $(0, 1)$ označíme symbolem i a nazveme *imaginární jednotkou*.

Potom (1.29) lze zapsat jako

$$z = a + ib. \tag{1.30}$$

Jestliže $z = a + ib \in \mathbb{C}$, potom číslo a *nazýváme jeho reálnou částí* a značíme ji $\Re(z)$, b nazýváme *imaginární částí* a značíme $\Im(z)$. Je tedy

$$\Re(a + ib) = a, \qquad \Im(a + ib) = b.$$

Nechť $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Potom číslo $a - ib$ nazýváme *číslem komplexně sdruženým* k číslu z. Budeme jej značit $\bar{z}$. Tedy $\bar{z} = a - ib$.

Vzhledem k definování součtu a součinu čísel (a_1, b_1), (a_2, b_2) dostáváme

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$
$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Příklad 1.4.

$$(2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i$$

$$(2 + 3i) \cdot (4 - i) = 11 + 10i$$

Lze ukázat, že operace sčítání a násobení komplexních čísel mají tyto vlastnosti

(1) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ pro každé $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,
(2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ pro každé $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

(3) Pro $0 = (0,0) \in \mathbb{C}$ platí $z + 0 = z$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$,
(4) Ke každému $z \in \mathbb{C}$ existuje $-z \in \mathbb{C}$ tak, že $z + (-z) = 0$,
(5) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ pro každé $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,
(6) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ pro každé $z_{1,2} \in \mathbb{C}$,
(7) Pro $1 = (1,0) \in \mathbb{C}$ a pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $1 \cdot z = z$,
(8) Ke každému $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ existuje $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tak, že $z \cdot z^{-1} = 1$,
(9) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$ pro každé $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

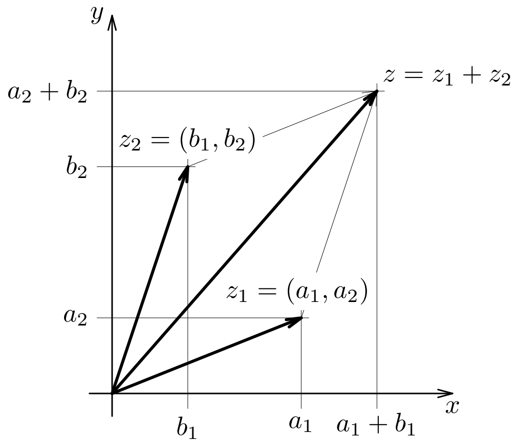
Vidíme, že operace sečítání a násobení komplexních čísel mají vlastnosti, které jsme uvedli u reálných čísel na straně 16. Komplexní čísla však nejsou lineárně uspořádaná.

Komplexní čísla se znázorňují jako body v rovině, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic, nazývá se *Gaussovou rovinou*. Každé komplexní číslo $z = x + iy$ se v ní znázorňuje jako bod o souřadnicích x, y, tedy jako $[x, y]$.

Na obr. 1.4 je graficky znázorněn součet dvou komlexních čísel.

Na obr. 1.5 je vyznačeno komplexní číslo z a k němu komplexně sdružené číslo $\bar{z}$.

Absolutní hodnota komplexního čísla. Nechť $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Potom číslo $\sqrt{a^2 + b^2}$ nazýváme *absolutní hodnotou komplexního čísla* z a značíme ji $|z|$. Je tedy $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Je to vzdálenost bodů $[0, 0]$, $[a, b]$.



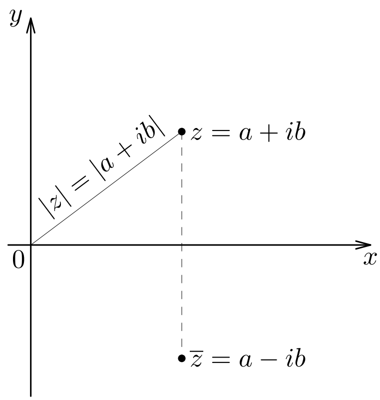
Obrázek 1.4: Součet dvou komplexních čísel.

Příklad 1.5. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \frac{1 + 2i}{3 - 4i}.$$

Řešení. Zlomek, jímž je komplexní číslo z definováno, rozšíříme číslem komplexně sdruženým k číslu ve jmenovateli, to jest číslem $3 + 4i$. Dostaneme

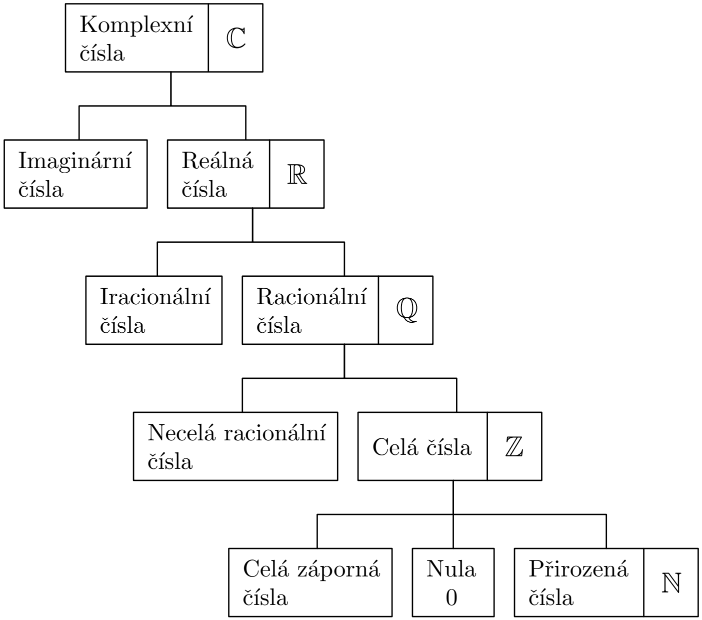
$$z = \frac{(1 + 2i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)}, \quad \text{to jest} \quad z = \frac{-5 + 10i}{25}.$$



Obrázek 1.5: Komplexně sdružená čísla.

Je tedy $\Re(z) = -\frac{1}{5}, \Im z = \frac{2}{5}$.

Z výkladu je zřejmé, že *reálná čísla jsou podmnožinou komplexních čísel*, tedy $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Komplexní čísla, která nejsou reálná, nazýváme *imaginárními*. Rozdělení komplexních čísel lze schematicky znázornit takto:



Zaveďme si ještě celočíselné mocniny komplexních čísel následovně.

Nechť $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Položme

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{n}, \tag{1.31}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ pro } a \neq 0, \tag{1.32}$$

$$a^0 = 1, \text{ pro } a \neq 0, \tag{1.33}$$

$$0^n = 0. \tag{1.34}$$

Pro celočíselné mocniny komplexních čísel platí tato pravidla.

Nechť $a, b \in \mathbb{C}, r, s \in \mathbb{Z}$. Potom platí

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \tag{1.35}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s} \tag{1.36}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \tag{1.37}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \tag{1.38}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \tag{1.39}$$

pokud má levá strana význam.

1.5. Připomenutí důležitých vzorců pro počítání s čísly.

n–faktoriál. Číslo $n!$ (čteme „n faktoriál“) definujeme takto:

$$0! = 1,$$
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Kombinační číslo. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Definujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

[Důležité vzorce] Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. *Potom platí*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.40}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.41}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{1.42}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{1.43}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{1.44}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{1.45}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \tag{1.46}$$

Binomická věta

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

Kapitola 2

Základní pojmy lineární algebry

V této kapitole se zavádějí pojmy lineární algebry jako je matice, operace s maticemi, zápis systému lineárních rovnic v maticové notaci a pojem matice inverzní.

2.1. Úvod do maticového počtu

V denním životě se často setkáváme s různými tabulkami čísel. Jedná se vlastně o skupinu čísel zapsaných do několika řádků a několika (třeba jiného počtu) sloupců. Jako příklad si uveďme následující tabulku.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
tuk	$0,00$	$0,4$	$0,3$	$0,6$	$0,6$
kakao	$0,05$	$0,2$	$0,1$	$0,1$	$0,0$
cukr	$0,10$	$0,2$	$0,2$	$0,1$	$0,2$

Tabulka 2.1: Tabulka pro výrobu v čokoládovně

Tato tabulka charakterizuje výrobu v čokoládovně při výrobě 5 druhů výrobků, označených jako V_1, V_2, V_3, V_4, V_5. V našem příkladě se uvádí spotřeba surovin S_1, S_2, S_3, to jest po řadě tuku, kakaa a cukru v kg na $1\,\mathrm{kg}$ každého z výrobků $V_1, \ldots, V_5$. Např. při výrobě $1\,\mathrm{kg}$ výrobku V_2 spotřebujeme $0,4\,\mathrm{kg}$ tuku.

Vynecháme-li záhlaví v tabulce, jedná se o uspořádanou skupinu 15 čísel, zapsaných do tří řádků a pěti sloupců. Pro takové uspořádané skupiny čísel si zavedeme následující definicí pojem *matice*.

Zavedení pojmu matice. *Maticí typu* (m, n) *budeme rozumět každou uspořádanou skupinu* $m \cdot n$ *reálných čísel resp. funkcí, definovaných na nějaké množině, zapsaných do* m *řádků a* n *sloupců. Každé z těchto čísel, resp. každou z těchto funkcí, budeme nazývat prvkem matice. Abychom vyznačili, že tato čísla, resp. funkce, vytvářejí matici, budeme tuto skupinu čísel dávat do kulatých závorek.*

V dalším se omezíme na matice, jejíž prvky jsou čísla.

Označování. Matice budeme označovat většinou velkými tučně vytištěnými písmeny, např. $\boldsymbol{A}$. Prvek matice umístěný v jejím i–tém řádku a v j–tém sloupci, budeme většinou označovat malým písmenem, odpovídajícímu označení matice, s indexy i, j, umístěnými u jeho dolního pravého rohu. Tedy $a_{i,j}$ bude značit prvek matice $\boldsymbol{A}$ v jejím i–tém řádku a v j–tém sloupci. Pokud nemůže dojít k chybě, lze čárku mezi indexy vynechat.

Příklad 2.1. Výše uvedenou tabulku vyznačíme tedy jako matici typu $(3, 5)$ následovně:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,10 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

V této matici je např. $a_{2,3} = 0,1; a_{1,3} = 0,3$.

Zápis obecné matice $\boldsymbol{A}$ typu (m, n). *Matici $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) můžeme tedy zapsat takto*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Jestliže matice $\boldsymbol{A}$ je typu $(1, n)$, to jest, jestliže

$$\boldsymbol{A} = (a_{1,1}\ a_{1,2}\ \ldots a_{1,n}), \tag{2.3}$$

potom ji nazýváme též řádkovým vektorem. Budeme jej většinou označovat tučně vytištěným malým písmenem. Poněvadž u všech prvků je první index stejný, roven 1, lze jej většinou vypouštět. Místo nahoře uvedené matice(2.3) můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{a} = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n).$$

Prvky tohoto řádkového vektoru budeme nazývat složkami vektoru. Tedy a_i je $i-$tá složka vektoru $\boldsymbol{a}$.

Podobně, jestliže matice $\boldsymbol{A}$ je typu $(m, 1)$, to jest, jestliže

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

potom ji můžeme nazývat též sloupcovým vektorem. Budeme jej většinou označovat tučně vytištěným malým písmenem. Poněvadž u všech prvků je druhý index stejný, roven 1, budeme jej většinou vypouštět. Místo (2.4), můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \\ a_m \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Řádky matice typu (m, n) jsou řádkovými vektory a sloupce matice jsou sloupcovými vektory.

Příklad 2.2. V následujícím příkladě je $\boldsymbol{A}$ maticí typu $(2, 3)$, vektor $\boldsymbol{b}$ je řádkový vektor se 4 složkami, $\boldsymbol{c}$ je sloupcový vektor se 4 složkami.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Je tedy např. $a_{2,3} = 7$.

Příklad 2.3. Označme D_1, D_2 místa, z nichž se provádí rozvoz do míst Z_1, Z_2, Z_3. Označme c_{ij} náklady v Kč na dopravu 1 tuny zboží z místa D_i do místa Z_j pro $i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3$. Z čísel c_{ij} utvoříme matici, např.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2000 & 1500 & 1800 \\ 800 & 50000 & 1000 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Jde o matici typu $(2, 3)$. V této matici je např. $c_{1,3} = 1800$, to znamená, že náklady na dopravu jedné tuny zboží z místa D_1 do místa Z_3 jsou 1800 Kč.

Příklad 2.4. Uveďme matici popisující cenu v \$ tří druhů zboží V_1, V_2, V_3 ve čtyřech různých zemích Z_1, Z_2, Z_3, Z_4.

$$C = \begin{pmatrix} 230 & 450 & 100 \\ 200 & 420 & 90 \\ 210 & 430 & 80 \\ 235 & 435 & 95 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Zde c_{ij} značí cenu zboží V_j v \$ v zemi Z_i. Poněvadž $c_{23} = 90$, je cena zboží V_3 v zemi Z_2 rovna $90\,\$$.

Uveďme ještě příklady matic, které obsahují jenom jeden řádek, tedy příklady řádkových vektorů.

Příklad 2.5. Uvažujme výrobní závod, v jehož dvou provozovnách se vyrábějí stejné čtyři různé výrobky, označme je V_1, V_2, V_3, V_4. Označme a_i počet výrobků V_i, které se mají denně vyrobit v první provozovně a b_i počet výrobků V_i, které se mají denně vyrobit v druhé provozovně. Potom vektor $\boldsymbol{a} = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ charakterizuje denní výrobní plán první provozovny a vektor $\boldsymbol{b} = (b_1\ \ b_2\ \ b_3\ \ b_4)$ charakterizuje denní výrobní plán druhé provozovny. Je-li tedy např.

$$\boldsymbol{a} = (1\ 5\ 8\ 6), \quad \boldsymbol{b} = (4\ 6\ 1\ 2), \tag{2.8}$$

potom např. $a_2 = 5$ znamená, že první provozovna má denně vyrobit podle plánu 5 výrobků V_2. Druhá provozovna má podle plánu vyrobit těchto výrobků $b_2 = 6$.

Zatím jsme pouze uvedli způsob zápisu uspořádané skupiny čísel, se kterými je vhodné v dalším *pracovat jako s celkem*. V dalším budeme většinou odhlížet od věcného významu jednotlivých prvků matic a ukážeme možnosti, jak lze s maticemi pracovat.

2.2. Relace mezi maticemi

Mezi maticemi téhož typu si zavedeme následující relace. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice téhož typu (m, n).

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je menší nebo rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} \leq b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je menší než matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} < b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je větší nebo rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} \geq b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je větší než matice $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} > b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Příklad 2.6. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přesvědčte se, že $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$.

Příklad 2.7. Přesvědčte se, že mezi maticemi $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

neplatí žádná z relací $<, \leq, >, \geq, =$.

2.3. Základní operace s maticemi

Zaveďme si tyto operace s maticemi.

Začněme s několika motivačními příklady. Nahoře v příkladě 2.5 jsme uvažovali vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, dané vztahy (2.8). Vektor $\boldsymbol{a}$ představuje denní výrobní plán první provozovny a $\boldsymbol{b}$ představuje denní výrobní plán druhé provozovny. Nechť a_i je denní plán výroby výrobku V_i v první provozovně a b_i je denní plán výroby výrobku V_i v druhé provozovně pro $i = 1, 2, 3, 4$. Jestliže se ve výrobním závodě vyrábějí uvedené výrobky pouze v těchto dvou provozovnách, pak denní plán výroby výrobků V_1, V_2, V_3, V_4 celého závodu představuje zřejmě

$$\boldsymbol{c} = (5\ 11\ 9\ 8),$$

kde $c_i = a_i + b_i$, je denní plán výroby celého závodu výrobku V_i pro $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Jeví se proto užitečným označit vektor $\boldsymbol{c}$ jako součet vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

Příklad 2.8. Nechť podnik vyrábí výrobky V_1, V_2, V_3 ve dvou provozovnách. Plán výroby výrobků V_1, V_2, V_3 v první provozovně podniku je pro jednotlivé kvartály charakterizován maticí $\boldsymbol{A}$ a výroba ve druhé provozovně je pro jednotlivé kvartály charakterizována maticí $\boldsymbol{B}$. Obě matice jsou typu $(4, 3)$. Nechť prvek $a_{i,j}$ matice $\boldsymbol{A}$ udává plánovaný počet výrobků V_j v i–tém kvartálu v první provozovně. Analogický význam má prvek $b_{i,j}$ matice $\boldsymbol{B}$. Tedy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} \end{pmatrix}.$$

Pokud závod vyrábí uvedené výrobky pouze v těchto dvou provozovnách, lze charakterizovat plán výroby výrobků V_1, V_2, V_3 celého podniku pro jednotlivé kvartály maticí $\boldsymbol{C}$, jejíž prvek $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ představuje plán výroby výrobku V_j v i–tém kvartálu celého podniku. Tedy

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & a_{1,3}+b_{1,3} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & a_{2,3}+b_{2,3} \\ a_{3,1}+b_{3,1} & a_{3,2}+b_{3,2} & a_{3,3}+b_{3,3} \\ a_{4,1}+b_{4,1} & a_{4,2}+b_{4,2} & a_{4,3}+b_{4,3} \end{pmatrix}.$$

Z těchto příkladů je patrno, že má smysl definovat součet dvou matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ téhož typu podle následující definice.

Definice 2.1. (Součet dvou matic)

Nechť matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou téhož typu (m, n). Součtem matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ budeme rozumět matici $\boldsymbol{C}$ typu (m, n), pro jejíž prvky $c_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, platí

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Pro operaci sečítání matic budeme používat symbolu „$+$“. Píšeme pak $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Příklad 2.9. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice typu $(3, 3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom matice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ je

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 9 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Násobení matice číslem. V příkladě 2.4 jsme uvedli matici $\boldsymbol{C}$. Číslo $c_{i,j}$ v ní značí cenu v \$ výrobku V_j v zemi Z_i. Chceme-li vyjádřit cenu jednotlivých výrobků v uvažovaných zemích v Kč, stačí násobit každý prvek matice $\boldsymbol{C}$ stejným číslem, daným kurzem dolaru. Vzniklou matici označíme $\boldsymbol{D}$.

To nás motivuje k zavedení definice součinu čísla a matice takto:

Definice 2.1. (Součin čísla a matice)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n) a α je reálné číslo. Potom součinem matice $\boldsymbol{A}$ a čísla α rozumíme matici $\boldsymbol{C}$, pro jejíž prvky $c_{i,j}$ platí

$$c_{i,j} = \alpha \cdot a_{i,j} \quad \textit{pro} \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Pro násobení matice číslem budeme používat symbol „· “. Píšeme pak $\boldsymbol{C} = \alpha \cdot \boldsymbol{A}$. Symbol „· “ lze vynechat.

Příklad 2.10. Nechť $\alpha = 3$ a nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(3, 3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\boldsymbol{C} = \alpha \cdot \boldsymbol{A} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 18 & 3 & 9 \\ -6 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Definice 2.2.
Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *jsou matice téhož typu. Potom definujme* $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ *jako matici* $\boldsymbol{A} + (-1) \cdot \boldsymbol{B}$.

Součin dvou matic. Zaveďme si ještě definici součinu dvou matic. Začneme s příkladem. Uvažujme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,10 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

V ní $a_{i,j}$ značí spotřebu v kg $i-$té suroviny S_i na výrobu jednoho kilogramu $j-$tého výrobku V_j, $i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4, 5$. Zapišme tuto matici obecně.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Má-li se vyrobit x_j kg výrobku V_j, spotřebuje se při jeho výrobě $a_{i,j} \cdot x_j$ kg suroviny S_i. Uvažujme případ, že chceme vyrobit výrobky V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 v množstvích x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 v kg a že chceme určit spotřebu suroviny S_i pro některé $i = 1, 2, 3$. Označme ji y_i. Potom y_i je součtem čísel $a_{i,j} \cdot x_j, \; j = 1, 2, 3, 4, 5$. Tedy

$$y_i = a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + a_{i,3} \cdot x_3 + a_{i,4} \cdot x_4 + a_{i,5} \cdot x_5.$$

Označme tedy $\boldsymbol{x}$ sloupcový vektor o pěti složkách, v němž x_j udává požadované množství výrobku V_j v kg. Budeme jej nazývat vektorem výroby. Označme $\boldsymbol{y}$ sloupcový vektor o třech složkách, v němž y_i vyjadřuje množství suroviny S_i v kg potřebné k výrobě výrobků $V_j, \; j = 1, 2, 3, 4, 5$ v požadovaných množstvích x_j. Nazveme jej vektorem spotřeby. Tedy

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Označme

$$y_i = a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + a_{i,3} \cdot x_3 + a_{i,4} \cdot x_4 + a_{i,5} \cdot x_5, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.12}$$

Budeme říkat, že vektor $\boldsymbol{y}$ je součinem matice $\boldsymbol{A}$ a vektoru $\boldsymbol{x}$ a budeme psát

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Pro vektor výroby

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 250 \\ 120 \\ 150 \\ 85 \\ 80 \end{pmatrix}$$

a matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,40 & 0,3 & 0,6 & 0,60 \\ 0,05 & 0,20 & 0,10 & 0,10 & 0,00 \\ 0,10 & 0,20 & 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} y_1 &= 0,00 \cdot 250 + 0,4 \cdot 120 + 0,3 \cdot 150 + 0,6 \cdot 85 + 0,6 \cdot 80, \\ y_2 &= 0,05 \cdot 250 + 0,2 \cdot 120 + 0,1 \cdot 150 + 0,1 \cdot 85 + 0,0 \cdot 80, \\ y_3 &= 0,10 \cdot 250 + 0,2 \cdot 120 + 0,2 \cdot 150 + 0,1 \cdot 85 + 0,2 \cdot 80. \end{aligned}$$

Vyčíslením obdržíme $y_1 = 192,\ y_2 = 60,\ y_3 = 103$. Tedy

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 192.0 \\ 60.0 \\ 103.5 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad nás inspiruje k zavedení pojmu součinu dvou matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ touto definicí.

Definice 2.3. (Součin matic)
Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, k) a $\boldsymbol{B}$ je matice typu (k, n). Potom součinem matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ v tomto pořadí je matice $\boldsymbol{C}$ typu (m, n) pro jejíž prvky $c_{ij}, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$, platí

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}. \tag{2.13}$$

Píšeme pak $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Poznámka 1. Ze vztahu (2.13) je patrno, že pro výpočet prvku c_{ij} matice $\boldsymbol{C}$ (tj. prvku v i–tém řádku a v j–tém sloupci matice $\boldsymbol{C}$ používáme i–tý řádek

$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,k} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

matice $\boldsymbol{A}$ a j–tý sloupec matice $\boldsymbol{B}$

$$\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \dots \\ b_{k,j} \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Říkáme, že $c_{i,j}$ je skalárním součinem řádkového vektoru (2.14) a sloupcového vektoru (2.15).

Poznámka 2. Vztah (2.13) lze zapsat takto

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^{k} a_{i,r} \cdot b_{r,j}.$$

Zde symbol $\sum_{r=1}^{k} a_{i,r} \cdot b_{r,j}$ znamená, že se provádí sečítání členů, které dostaneme tak, že do výrazu za symbolem $\sum$ dosazujeme postupně $r = 1, \dots, k$.

Poznámka 3. Pro součin dvou matic budeme používat opět symbolu „$\cdot$“. To není na závadu, neboť ze souvislostí je vždy patrno o jaké násobení se jedná. Budeme tedy psát

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Poznámka 4. Všimněme si, že počet sloupců v matici $\boldsymbol{A}$ je stejný jako je počet řádků v matici $\boldsymbol{B}$. Kdyby tomu tak nebylo, nebylo by možno aplikovat vzorec (2.13).

Příklad 2.11. Určete matici $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, jestliže

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \\ 8 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(3,4)$ a $\boldsymbol{B}$ je matice typu $(4,2)$, lze vypočíst součin $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. Podle (2.13) dostáváme

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 73 & -6 \\ 17 & -12 \end{pmatrix}.$$

Např. prvek $c_{2,1}$ dostaneme jako skalární součin druhého řádku matice $\boldsymbol{A}$, to jest řádkového vektoru

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

a prvního sloupce matice $\boldsymbol{B}$, to jest sloupcového vektoru

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem dostáváme

$$c_{2,1} = 0 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 5 \cdot (-1) = 73.$$

Poznámka 5. *Obecně matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ není rovna matici $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. Dokonce může nastat případ, že $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ existuje, avšak $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ neexistuje. Jestliže pro nějaké matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platí*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A},$$

potom matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ se nazývají zaměnitelné.

Příklad 2.12. Je-li např. matice $\boldsymbol{A}$ typu $(3, 4)$ a matice $\boldsymbol{B}$ je typu $(4, 3)$, potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ je matice typu $(3, 3)$. Avšak $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ je matice typu $(4, 4)$. Jsou tedy matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ různých typů a tedy, aniž bychom jejich součiny počítali, vidíme, že jsou navzájem různé. Matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nejsou tedy v tomto případě zaměnitelné.

Příklad 2.13. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, takže tyto matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nejsou zaměnitelné.

Příklad 2.14. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 \\ -1/6 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Pro tyto matice platí

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dané matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou tedy zaměnitelné.

Matice transponovaná.

Definice 2.4. (Matice transponovaná)
Nechť $\boldsymbol{A}$ *je matice typu* (m, n)*. Potom matici, jejíž* i*–tý řádek je roven* i*–tému sloupci matice* $\boldsymbol{A}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *nazýváme maticí transponovanou k matici* $\boldsymbol{A}$ *a budeme ji značit* $\boldsymbol{A^T}$*. Matice* $\boldsymbol{A^T}$ *je tedy typu* (n, m)*.*

Příklad 2.15. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

O transponované matici součinu dvou matic platí tato věta.

Věta 2.5. (Transponovaná matice součinu matic)

Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *jsou takové matice, že existuje* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. *Potom platí*

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}.$$

Důkaz: Důkaz přenechávám čtenáři.

Submatice. Zaveďme si pojem submatice následující definicí.

Definice 2.6. (Submatice)
Nechť $\boldsymbol{A}$ *je matice typu* (m, n) *a nechť* $\boldsymbol{u} = (i_1, \ldots, i_p)$ *je takový vektor, že* $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m$. *Dále nechť* $\boldsymbol{v} = (j_1, \ldots, j_r)$ *je takový vektor, že* $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leq n$. *Potom matici, která vznikne z matice* $\boldsymbol{A}$ *vypuštěním řádků s řádkovými indexy, které jsou složkami vektoru* $\boldsymbol{u}$ *a vypuštěním sloupců matice* $\boldsymbol{A}$ *se sloupcovými indexy, které jsou složkami vektoru* $\boldsymbol{v}$, *nazýváme submaticí matice* $\boldsymbol{A}$ *a značíme ji* $\boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$, *resp.* $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}$. *Tedy např.*$\boldsymbol{A}_{i,j}$ *značí submatici, která vznikne z matice* $\boldsymbol{A}$ *vypuštěním* i*–tého řádku a* j*–tého sloupce.*

Příklad 2.16. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom vypuštěním druhého řádku a druhého a čtvrtého sloupce matice $\boldsymbol{A}$ dostaneme submatici $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_{2,(2,4)}$. Je tedy

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zavedeme si ještě toto označování

Označení.
Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n). Potom $\boldsymbol{A}$(i, :) bude značit její $i-$tý řádek a symbol $\boldsymbol{A}$(:,j) bude značit její $j-$tý sloupec.

Význam symbolů „= , :=.“
Symbol „ $=$ “ znamená, že levá strana, tj. výraz nalevo od rovnítka, se rovná pravé straně, tj. výrazu napravo od rovnítka. Např.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

značí, že $\boldsymbol{A}$ *je matice, jejíž prvky jsou uvedeny napravo od „ $=$ “. Naproti tomu symbol „ $:=$ “ značí, že proměnné nalevo od tohoto symbolu se přiřadí hodnota výrazu napravo od tohoto symbolu. Např.*

$$\boldsymbol{A} \ := \ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \tag{2.16}$$

značí, že výsledkem tohoto přiřazení bude matice $\boldsymbol{A}$*, která vznikne ze součtu matice* $\boldsymbol{A}$ *a matice* $\boldsymbol{B}$*, před přiřazením.*

Upozornění. *Vztah (2.16) není možno chápat jako rovnici, nelze tedy např.převést matici* $\boldsymbol{A}$ *z pravé strany na levou – vzniklo by* $\mathbf{0} = \boldsymbol{B}$*. V literatuře se většinou místo „ $:=$ “ píše jenom „ $=$ “ a rozlišení se ponechává na kontextu.(V textu tomu bude rovněž tak.)*

2.4. Speciální matice a pravidla pro počítání s maticemi

Čtvercová matice. Matici $\boldsymbol{A}$ typu (n, n) budeme nazývat *čtvercovou maticí řádu* n. Místo čtvercová matice řádu n stačí říkat matice řádu n, poněvadž o řádu matice mluvíme jen u čtvercových matic.

Např. matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

je čtvercová matice řádu 3.

Nulová matice. Matici typu (m, n) budeme nazývat nulovou maticí typu (m, n), jestliže všechny její prvky jsou rovny nule. Nulovou matici budeme značit $\mathbf{0}$.

Příklad 2.17. Matice

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je nulová matice typu $(3, 4)$.

Hlavní a vedlejší diagonála v matici. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n). Budeme říkat, že její prvky $a_{ii}, i = 1, 2, \ldots, m$ leží na hlavní diagonále a její prvky a_{ij}, pro něž je $i + j = n + 1, i = 1, 2, \ldots, m$, leží na vedlejší diagonále.

Příklad 2.18. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 8 & 5 \\ -5 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom prvky „1, -3, 4“ leží na hlavní diagonále a prvky „1, 8, 0“ leží na vedlejší diagonále.

Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{E}$ řádu n je jednotková, jestliže všechny prvky na hlavní diagonále jsou rovny číslu 1 a všechny ostatní její prvky jsou rovny 0. Chceme-li zdůraznit její řád n, označíme ji $\boldsymbol{E}_n$.

Příklad 2.19. Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je jednotková matice řádu 3.

Diagonální matice. Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ je diagonální, jestliže všechny její nenulové prvky leží na hlavní diagonále.

Příklad 2.20. Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je diagonální maticí.

Horní trojúhelníková matice. Řekneme, že čtverová matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je horní trojúhelníkovou maticí, jestliže všechny její prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny 0.

Dolní trojúhelníková matice. Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je dolní trojúhelníkovou maticí, jestliže všechny její prvky nad hlavní diagonálou jsou rovny 0.

Horní schodovitá matice. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n). Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je horní schodovitá matice, jestliže existuje takové přirozené číslo $h \leq n$, že ke každému řádkovému indexu i, $i = 1, 2, \ldots, h$, existuje nejmenší sloupcový index s_i tak, že $a_{i,s_i} \neq 0$ a $s_1 < s_2 < \ldots < s_h$ a zbývající řádky $h + 1, \ldots, m$ jsou nulové.

Příklad 2.21. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

je horní schodovitou maticí. V tomto příkladě je zřejmě $s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 7$.

Poznámka. Schodovitou matici můžeme definovat ekvivalentně takto. Matice $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) je horní schodovitá matice, jestliže pro každé dva řádkové indexy p, q matice $\boldsymbol{A}$ platí:

- □ Nechť p–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je nenulový a q–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je nulový, potom $p < q$.
- □ Nechť p–tý a q–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ jsou nenulové a nechť a_{p,s_p} je první nenulový prvek matice $\boldsymbol{A}$ v p–tém řádku a a_{q,s_q} je první nenulový prvek v q–tém řádku matice $\boldsymbol{A}$. Jestliže $p < q$, potom je $s_p < s_q$.
- □ Poněvadž budeme mluvit jen o horních schodovitých maticích, můžeme slovo „horní“ vynechávat.

Pravidla pro počítání s maticemi. Pro zavedené operace s maticemi platí vztahy uvedené v následující větě.

Věta 2.7. (Pravidla pro počítání s maticemi)

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \mathbf{0}$ *jsou matice téhož typu, kde* $\mathbf{0}$ *je matice nulová, a nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Potom platí*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}, && (2.17)\\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}), && (2.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} + \mathbf{0} &= \boldsymbol{A}, && (2.19)\\ \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} &= \mathbf{0}, && (2.20)\\ 1 \cdot \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}, && (2.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{A}) &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \boldsymbol{A}, && (2.22)\\ (\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{A} &= \alpha \cdot \boldsymbol{A} + \beta \cdot \boldsymbol{A}, && (2.23)\\ \alpha \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \alpha \cdot \boldsymbol{A} + \alpha \cdot \boldsymbol{B}. && (2.24) \end{aligned}$$

Důkaz: Provedeme pouze důkaz vztahu (2.17). Ostatní vztahy se dokazují analogicky.

Prvek v i–tém řádku a j–tém sloupci matice na levé straně vztahu (2.17) je roven $a_{ij} + b_{ij}$ a prvek v i–tém řádku a j–tém sloupci matice na pravé straně vztahu (2.17) je roven $b_{ij} + a_{ij}$ pro všechna i, j. Platí tedy (2.17).

Věta 2.8. (Pravidla pro počítání s maticemi)

Nechť typy matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\mathbf{0}$ *(nulová matice),* $\boldsymbol{E}$ *(jednotková čtvercová matice) jsou takové, že operace ve vztazích* (2.25)—(2.30) *mají význam. Potom platí*

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{A} &= \mathbf{0},\ \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, && (2.25)\\ \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}, && (2.26)\\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{A}, && (2.27)\\ (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}), && (2.28)\\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}, && (2.29)\\ \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}. && (2.30) \end{aligned}$$

Poznámka. *Jestliže pro matice* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *platí* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$, *nemusí být žádná z matic* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *nulovou maticí.*

Např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5. Systémy lineárních algebraických rovnic, úvod

Uvažujme výrobu čtyř výrobků V_1, V_2, V_3, V_4. K jejich výrobě jsou potřebné suroviny S_1, S_2, S_3. Jejich množství v kg potřebné při výrobě jednoho kilogramu každého z výrobků V_1, V_2, V_3, V_4 je uvedeno v následující tabulce. Ve sloupci označeném písmenem Z jsou uvedena množství Z_1, Z_2, Z_3 jednotlivých surovin S_1, S_2, S_3, která se mají spotřebovat. Budeme se zabývat úlohou určit množství jednotlivých výrobků V_1, V_2, V_3, V_4 v kg tak, abychom zcela spotřebovali suroviny S_1, S_2, S_3, jejichž množství jsou uvedena v tabulce ve sloupci Z.

	V_1	V_2	V_3	V_4	Z
S_1	$0,0$	$0,4$	$0,3$	$0,6$	5
S_2	$0,2$	$0,2$	$0,1$	$0,1$	2
S_3	$0,1$	$0,2$	$0,2$	$0,1$	3

Označme postupně x_1, x_2, x_3, x_4 hledaná množství v kg výrobků V_1, V_2, V_3, V_4. K jejich výrobě by se potřebovalo

$$0,4\,x_2 + 0,3\,x_3 + 0,6\,x_4$$

kg surovin S_1,

$$0,2\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,1\,x_3 + 0,1\,x_4$$

kg surovin S_2 a

$$0,1\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,2\,x_3 + 0,1\,x_4$$

kg surovin S_3.

Jestli se mají suroviny S_1, S_2, S_3 plně spotřebovat, musí se výrobky V_1, V_2, V_3, V_4 vyrábět v množstvích x_1, x_2, x_3, x_4, která splňují tyto podmínky:

$$\begin{aligned} 0,4\,x_2 + 0,3\,x_3 + 0,6\,x_4 &= 5 \\ 0,2\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,1\,x_3 + 0,1\,x_4 &= 2 \\ 0,1\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,2\,x_3 + 0,1\,x_4 &= 3. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Každá z těchto podmínek představuje rovnici pro neznámé veličiny x_1, x_2, x_3, x_4. Každá z nich je tvaru

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b. \tag{2.32}$$

V rovnici (2.32) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou neznámé a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou (většinou) známá čísla, nazýváme je koeficienty rovnice. Koeficient a_i je koeficient u neznámé x_i. Číslo b nazýváme pravou stranou. Rovnici (2.32) nazýváme lineární algebraickou rovnicí o neznámých $x_1, \ldots, x_n$. Poněvadž v lineární algebře, kterou probíráme, pojednáváme jenom o algebraických rovnicích, budeme užívat zkráceného pojmenování „lineární rovnice“.

Při řešení úloh většinou se pracuje s více rovnicemi. Jestliže koeficienty v těchto rovnicích jsou obecná čísla, můžeme je odlišit od sebe tak, že v i–té rovnici označíme koeficient u x_j např. $a_{i,j}$.

Potom systém (místo systém můžeme říkat též soustava) m lineárních algebraických rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lze zapsat takto:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{2.33}$$

Zde $a_{i,j},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,$ značí koeficient u neznámé x_j v i–té rovnici, druhý index j označuje složku neznámého vektoru $\boldsymbol{x}$). Číslo b_i nazýváme pravou stranou i–té rovnice.

Označme $\boldsymbol{A}$ matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Nazýváme ji *maticí soustavy systému* (2.33). Vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

nazýváme *vektorem neznámých* a vektor

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

nazýváme *vektorem pravých stran*.

Lehce nahlédneme, že systém lineárních algebraických rovnic (2.33) *lze zapsat užitím tohoto označení jako*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{2.35}$$

Skutečně, matice $\boldsymbol{A}$ je typu (m, n), $\boldsymbol{x}$ je typu $(n, 1)$, takže $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ je matice typu $(m, 1)$. Rovnice (2.35) znamená, že každá složka vektoru $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ je rovna odpovídající složce vektoru $\boldsymbol{b}$. Porovnáním i–tých složek těchto vektorů dostáváme i–tou rovnici systému (2.33).

Matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ přidáním vektoru $\boldsymbol{b}$ jako dalšího sloupce, se nazývá *rozšířenou maticí systému rovnic* (2.33).
Značíme ji $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. Je tedy

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right).$$

Příklad 2.22. Uvažujme systém lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -12, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & -6. \end{array} \tag{2.36}$$

Označme-li $\boldsymbol{A}$ matici soustavy tohoto systému rovnic, $\boldsymbol{b}$ vektor pravých stran a $\boldsymbol{x}$ vektor neznámých tohoto systému rovnic, je

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Matice rozšířená je rovna

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -12 \\ 4 & 5 & 2 & -6 \end{array}\right).$$

Daný systém rovnic lze tedy zapsat jako

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Zaveďme si nyní pojem řešení systému lineárních rovnic.

Definice 2.2.
Vektor ${}^{0}\boldsymbol{x}$ nazveme řešením systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

jestliže $\boldsymbol{A} \cdot {}^{0}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. (To jest, jestli vektor ${}^{0}\boldsymbol{x}$ vyhovuje rovnici $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$).

Vraťme se k příkladu 2.22. Označme

$${}^{1}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}^{2}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad {}^{3}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě

$$\boldsymbol{A}\cdot {}^{1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{A}\cdot {}^{2}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{A}\cdot {}^{3}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\14\end{pmatrix}\neq \boldsymbol{b}.$$

Jsou tedy vektory ${}^{1}\boldsymbol{x}$, ${}^{2}\boldsymbol{x}$ řešením uvažovaného systému (2.36), avšak ${}^{3}\boldsymbol{x}$ není jeho řešením.

Lehce se přesvědčíme, že vektor

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}6-3\cdot c\\-6+2\cdot c\\c\end{pmatrix}$$

je řešením uvažovaného systému rovnic (2.36) pro každé reálné c.

Příklad 2.23. Uvažujme systém lineárních rovnic

$$x_1-2x_2 = 3, \tag{2.37}$$

$$2x_1-4x_2 = 5. \tag{2.38}$$

Tento systém rovnic nemá řešení. Skutečně, předpokládejme, že α,β jsou taková čísla, že $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$ vyhovovují první rovnici, tedy, že platí

$$\alpha-2\cdot\beta=3.$$

Potom by bylo

$$2 \cdot \alpha - 4 \cdot \beta = 6$$

a ne $2 \cdot \alpha - 4 \cdot \beta = 5$, takže $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta$ nevyhovuje druhé rovnici.

Poznámka. Později budeme řešit obecně otázku, kdy systém lineárních rovnic má jedno řešení, kdy má nekonečně mnoho řešení a kdy nemá vůbec žádné řešení.

2.6. Zavedení pojmu inverzní matice

V lineární algebře má velký význam pojem inverzní matice k dané matici. Tento pojem si nyní zavedeme následující definicí. Později si řekneme něco o existenci inverzní matice k dané matici a seznámíme se s řadou vlastností inverzních matic a naučíme se nalézt k dané matici matici inverzní.

Definice 2.3. (Inverzní matice)
Matice $\boldsymbol{B}$ se nazývá inverzní k matici $\boldsymbol{A}$, jestliže

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}. \tag{2.39}$$

Matici inverzní k matici $\boldsymbol{A}$ budeme značit $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Věta 2.9. (Vlastnosti inverzní matice)
Nechť je dána matice $\boldsymbol{A}$ a nechť k ní existuje matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$. Potom platí
a) *Matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ jsou čtvercové matice téhož řádu.*
b) *Inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ je jednoznačně určena.*
c) *K matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ existuje matice inverzní a platí $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.*
d) *Jestliže $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou čtvercové matice téhož řádu n a jestli k nim existují matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$, potom k matici $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ existuje matice inverzní a platí $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$.*

a) Toto tvrzení je bezprostředním důsledkem (2.39).
b) Nechť $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ jsou inverzní k $\boldsymbol{A}$. Potom

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Odtud

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}.$$

Tedy $\boldsymbol{B}{=}\boldsymbol{C}$.
c) Toto tvrzení je bezprostředním důsledkem definice inverzní matice.
d) Podle vět 2.7, 2.8 platí

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}.$$

Poněvadž $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, dostáváme odtud

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}.$$

Podobně dokážeme, že

$$(\boldsymbol{AB}) \cdot (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{E}.$$

Je tedy $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ inverzní maticí k matici $\boldsymbol{AB}$.

Uveďme si zde větu o řešitelnosti a jednoznačnosti řešení systému lineárních rovnic, za předpokladu, že k matici soustavy existuje matice inverzní.

Věta 2.10. (Řešení systému $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pomocí inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$).
Nechť

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{2.40}$$

je systém n lineárních rovnic o n neznámých, kde $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice soustavy řádu n a $\boldsymbol{b}$ je vektor pravých stran typu $(n, 1)$. Nechť k matici $\boldsymbol{A}$ existuje matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$. Potom systém rovnic (2.40) má právě jedno řešení $\boldsymbol{x}$, které lze určit vztahem

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}. \tag{2.41}$$

Důkaz: Jak již bylo dříve dokázáno, inverzní matice $\boldsymbol{A}$ je určena jednoznačně. Vynásobíme-li (2.40) maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva, dostáváme

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b} \tag{2.42}$$

Vzhledem k větě 2.8 platí

$$(\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}.$$

Poněvadž $(\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, dostáváme odtud (2.41).

Dokažme ještě jednoznačnost řešení. Předpokládejme, že existují dvě řešení ${}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}$ systému (2.40). Potom

$$\boldsymbol{A} \cdot {}^1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Odečtením těchto vztahů dostáváme

$$\boldsymbol{A} \cdot ({}^1\boldsymbol{x} - {}^2\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

Vynásobením tohoto vztahu maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva dostáváme

$${}^1\boldsymbol{x} - {}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

takže

$${}^1\boldsymbol{x} = {}^2\boldsymbol{x}.$$

Má tedy systém $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ právě jedno řešení.

Poznámka. Problematiku jak určit matici inverzní k dané matici, budeme řešit později.

Příklad 2.24. Nalezněte řešení systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{2.43}$$

jestliže

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 78 \end{pmatrix}$$

a znáte-li k matici $\boldsymbol{A}$ matici inverzní

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{4}{39} & -\frac{5}{39} \\ -\frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{11}{39} \end{pmatrix}.$$

Řešení. Podle předcházející věty má daný systém právě jedno řešení a to

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{4}{39} & -\frac{5}{39} \\ -\frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{11}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 78 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem dostáváme

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

2.7. Ukázka formulace úlohy lineárního programování.

(Úlohu nebudeme řešit!!)V této kapitole popsaný aparát maticového počtu použijeme nyní k matematické formulaci následující úlohy, která patří do úloh lineárního programování. Tyto úlohy jsou velice významnou aplikací lineární algebry. Úlohy tohoto typu se řeší většinou pomocí počítačů a k jejich řešení jsou vypracovány speciální programy. My se nebudeme zde zabývat otázkou jak se řeší, ale jenom otázkou, jak se dá úloha matematicky formulovat a jak se připraví data pro vstupní hodnoty těchto programů.

Příklad 2.25. Čokoládovna vyrábí 5 druhů výrobků. Jsou to výrobky, které označíme V_1, V_2, V_3, V_4, V_5. K výrobě potřebujeme suroviny tuk, kakao a cukr. Tyto suroviny jsou k dispozici v omezených množstvích, v uvedném pořadí $1500\,\mathrm{kg}$, $300\,\mathrm{kg}$, $450\,\mathrm{kg}$ na jeden den. Spotřeba surovin v kilogramech na $1\,\mathrm{kg}$ výrobku je dána tabulkou 2.1 na straně 44. Odbytové ceny jednotlivých výrobků v uvedném pořadí jsou 20 Kč, 120 Kč, 100 Kč, 140 Kč, 40 Kč. Úkolem je stanovit takový denní výrobní plán, aby hodnota výroby byla maximální. Výrobky jsou vyráběny technologicky nezávisle na sobě navzájem. Výroba se tedy uskutečňuje ve formě pěti výrobních procesů, které však nejsou navzájem zcela izolované, neboť společně spotřebovávají výrobní zdroje, jeden proces na úkor druhého.

Matematická formulace úlohy. Pro účely matematické formulace zaveďme 5 nezávisle proměnných: x_j nechť označuje množství výrobku V_j v kg, jež bude vyráběno za den, kde

$j = 1, 2, 3, 4, 5$. Hledáme tedy hodnoty $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5$, vyhovující nerovnostem

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0,4x_2 & + & 0,3x_3 & + & 0,6x_4 & + & 0,6x_5 & \leq & 1500 \\ 0,05x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,1x_3 & + & 0,1x_4 & & & \leq & 300 \\ 0,10x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,2x_3 & + & 0,1x_4 & + & 0,2x_5 & \leq & 450 \end{array} \tag{2.44}$$

Víme, že při výrobě x_j výrobků V_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, bude odbytová cena výroby rovna

$$z = 20x_1 + 120x_2 + 100x_3 + 140x_4 + 40x_5. \tag{2.45}$$

Naší úlohu můžeme tedy formulovat takto : Nalezněte taková nezáporná čísla x_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, která vyhovují nerovnostem (2.44) a pro něž funkce (2.45) nabývá svého maxima.

Tato úloha je tedy popsána maticí $\boldsymbol{A}$, vektorem $\boldsymbol{m}$ množství surovin a vektorem $\boldsymbol{b}$ odbytových cen výrobků a vektorem $\boldsymbol{x}$ počtu výrobků

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,10 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 300 \\ 450 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} 20 \\ 120 \\ 100 \\ 140 \\ 40 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Potom (2.44) lze zapsat jako jako

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{m} \tag{2.46}$$

a funkce (2.45) lze zapsat jako

$$z = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{2.47}$$

Naši úlohu můžeme vyslovit takto: Nalezněte vektor $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ vyhovující (2.46), který minimalizuje funkci (2.47).

Matice $\boldsymbol{A}$, vektory $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{b}$ a požadavek, že vektor

$$\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq \mathbf{0},$$

jsou vstupními údaji programu, kterým se výpočet realizuje. Dostáváme

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1000,\ \ x_4 = 2000,\ \ x_5 = 0.$$

Kapitola 3

Lineární prostor

3.1. Aritmetický vektorový prostor.

V minulé kapitole jsme si zavedli pojem sloupcového a řádkového vektoru jako zvláštní případ matic – totiž sloupcový vektor jako matici typu $(n, 1)$ a řádkový vektor jako matici typu $(1, n)$. Tedy vektory můžeme chápat jako prvky množiny $\mathbb{R}^n$, tj. množiny uspořádaných $n-$tic reálných čísel, kde $n \in \mathbb{N}$. Značíme je malými, tučně vytištěnými písmeny. Číslo na $i-$té pozici vektoru $\boldsymbol{a}$ nazýváme jeho $i-$tou složkou a většinou označovat jako a_i. Nebude-li nic řečeno, budeme předpokládat, že se jedná o sloupcové vektory. O jaké vektory se jedná, bude často vidět ze zápisu, aniž bychom zdůrazňovali, že se jedná o sloupcové, resp o řádkové vektory. Připomeňme si, že je-li $\boldsymbol{a}$ sloupcový vektor, potom $\boldsymbol{a}^T$ je řádkový vektor se stejnými složkami. Připomeňme si, že součet dvou vektorů značíme symbolem „ $+$ “ a násobení reálnými čísly tečkou „$\cdot$ “, kterou, nemůže-li dojít k omylu, lze vynechat. Tedy např., jestliže

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

potom jejich součtem $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ je $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, pro něž platí

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix},$$

a je-li $\alpha \in$ R, potom součinem $\alpha.\boldsymbol{a}$ rozumíme $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$, pro něž platí

$$\boldsymbol{d} = \alpha.\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha.a_1 \\ \vdots \\ \alpha.a_n \end{pmatrix},$$

Množinu $\mathbb{R}^n$ společně s těmito operacemi „ $+, .$ “ budeme značit $\mathbb{V}_n$ a nazývat **aritmetickým vektorovým prostorem.**

Vektorový podprostor Nechť $P \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť platí: jestliže $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in P$ a $\alpha \in R$, potom i $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in P, \alpha.\boldsymbol{a} \in P$. Budeme říkat, že na P je definován **aritmetický podprostor prostoru** $\mathbb{V}_n$. Budeme jej značit $\mathbb{P}$. Často budeme o něm mluvit prostě jako o vektorovém prostoru.

Označení. Místo $\boldsymbol{a} \in P$ lze psát $\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}$. Místo $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ lze psát $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

3.2. Lineární nezávislost vektorů

Uvažujme systém lineárních algebraických rovnic

$$a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,n}x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.1}$$

v němž $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé a $a_{i,j}, b_i, i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, , n.$ jsou daná čísla. Při jeho analýze je zapotřebí zjišťovat, zda

- □ některá z rovnic systému není v rozporu s jinými rovnicemi tohoto systému
- □ zda každá z rovnic dává nové požadavky na hledané neznámé $x_1, \ldots, x_n$,
- □ zda podmínky na neznámé rovnici vyjádřený jednotlivými rovnicemi, je nebo není již obsažen v jiných rovnicích systému.

Při těchto úvahách je vhodné k $i-$té rovnici tohoto systému (3.1) přiřadit vektor

$$(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}, b_i); \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Součet dvou rovnic pak můžeme realizovat pomocí součtu vektorů, které jsou k těmto rovnicím přiřazeny. Podobně násobení rovnice číslem můžeme realizovat pomocí násobení vektoru, přiřazenému k této rovnici, tímto číslem.

K řešení nahoře uvedeného problému použijeme dále zaváděné pojmy: lineární kombinace vektorů (rovnic), lineární nezávislost a lineární závislost vektorů (rovnic). S těmito pojmy se setkáme i v jiných úvahách.

Definice 3.1.
Nechť ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$ jsou vektory z vektorového prostoru $\mathbb{P}$ a $c_1, \ldots, c_n$ jsou reálná čísla. Potom vektor

$$\boldsymbol{x} = c_1\,{}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n\,{}^n\boldsymbol{x}$$

nazveme *lineární kombinací vektorů* ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$.

Příklad 3.1. Nechť

$${}^1\boldsymbol{x} = (2, 3, -1),\ {}^2\boldsymbol{x} = (5, 2, 6),\ {}^3\boldsymbol{x} = (9, 8, 4)$$

jsou vektory z prostoru $\mathbb{V}_3$. Poněvadž

$$2 \cdot (2, 3, -1) + (5, 2, 6) = (4, 6, -2) + (5, 2, 6) = (9, 8, 4),$$

tj.

$$2\,{}^1\boldsymbol{x} + {}^2\boldsymbol{x} = {}^3\boldsymbol{x},$$

je vektor ${}^3\boldsymbol{x}$ lineární kombinací vektorů ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$.

Definice 3.2. (Lineární nezávislost a závislost vektorů)

Nechť ${}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x}$ jsou vektory z vektorovém prostoru $\mathbb{P}$. Řekneme, že tyto vektory jsou *lineárně nezávislé*, jestliže

$$c_1\,{}^1\boldsymbol{x} + \dots + c_n\,{}^n\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0. \tag{3.2}$$

Jestliže vektory ${}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x}$ nejsou lineárně nezávislé, jsou *lineárně závislé*.

Poznámka. Z nahoře uvedené definice vyplývá, že vektory ${}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x}$ z vektorovém prostoru $\mathbb{P}$ jsou lineárně závislé, když a jenom když existují taková čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$, z nichž alespoň jedno je různé od 0, že $c_1\,{}^1\boldsymbol{x} + \dots + c_n\,{}^n\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Příklad 3.2. Ukažme, že vektory ${}^1\boldsymbol{x} = (1, 4, -4)$, ${}^2\boldsymbol{x} = (1, 2, 0)$, ${}^3\boldsymbol{x} = (1, 5, -2)$ z prostoru $\mathbb{V}_3$ jsou lineárně nezávislé. Skutečně, ze vztahu

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + c_2 \cdot {}^2\boldsymbol{x} + c_3 \cdot {}^3\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

dostáváme

$$c_1 \cdot (1, 4, -4) + c_2 \cdot (1, 2, 0) + c_3 \cdot (1, 5, -2) = (0, 0, 0),$$

to jest

$$(c_1 + c_2 + c_3, 4c_1 + 2c_2 + 5c_3, -4c_1 + 0c_2 - 2c_3) = (0, 0, 0).$$

Aby rovnost mezi těmito vektory platila, musí koeficienty c_1, c_2, c_3 vyhovovat systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \qquad (3.3)\\ 4c_1 + 2c_2 + 5c_3 &= 0, \qquad (3.4)\\ -4c_1 + 0c_2 - 2c_3 &= 0. \qquad (3.5) \end{aligned}$$

Jak se lehce přesvědčíme, má systém rovnic (3.3)—(3.5) jediné řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Jsou tedy dané vektory lineárně nezávislé.

Poznámka. *a) Vektor* $\mathbf{0}$ *je lineárně závislý, neboť* $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Vektory ${}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x}$, $n > 1$, *jsou lineárně závislé, když a jenom když alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních z nich. (Dokažte!)*

Příklad 3.3. Ukažme, že vektory

$$(1, 2, 3),\ (-1, 2, 0),\ (1, 6, 6)$$

jsou lineárně závislé.

Lehce nahlédneme, že

$$2 \cdot (1, 2, 3) + (-1, 2, 0) = (1, 6, 6).$$

Vektor $(1, 6, 6)$ jsme vyjádřili jako lineární kombinaci zbývajících dvou vektorů, jsou tedy lineárně závislé.

Zaveďme si nyní pojem hodnosti skupiny $\boldsymbol{X}$ vektorů z prostoru $\mathbb{V}_n$.

Definice 3.3. (Hodnost matice.)
Nechť $\boldsymbol{X}$ je skupina vekorů z prostoru $\mathbb{P}$. Maximální počet lineárně nezávislých vektorů této skupiny budeme nazývat její hodností. Budeme ji značit $h(\boldsymbol{X})$.

Poznámka. Pojem hodnosti matice použijeme k řešení problému „ Má daný systém lineárních rovnic řešení ?. Má-li řešení, kolik je těchto řešení?“

Poznámka. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n). *Na matici* $\boldsymbol{A}$ *se můžeme dívat jako na uspořádanou* m*–tici řádkových vektorů z vektorového prostoru* $\mathbb{V}_n$*, resp. jako na uspořádanou* n*–tici sloupcových vektorů z vektorového prostoru* $\mathbb{V}_m$. Aplikováním definice hodnosti na řádky matice dostáváme *řádkovou hodnost matice* a aplikováním definice hodnosti na sloupce matice dostáváme *sloupcovou hodnost matice*. *Později ukážeme, že pro každou matici je sloupcová hodnost rovna její řádkové hodnosti*. Pokud to nedokážeme a výslovně neřekneme o jakou hodnost se jedná, budeme mít na mysli řádkovou hodnost.

Příklad 3.4. Určete řádkovou hodnost matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Označme ${}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}, {}^3\boldsymbol{x}$ postupně první, druhý a třetí řádek matice $\boldsymbol{A}$. Tedy

$$\begin{aligned} {}^1\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, & (3.6) \\ {}^2\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, & (3.7) \\ {}^3\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}. & (3.8) \end{aligned}$$

Zřejmě vektor ${}^3\boldsymbol{x}$ je lineárně závislý na vektorech ${}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}$, neboť

$${}^3\boldsymbol{x} = {}^1\boldsymbol{x} + {}^2\boldsymbol{x}$$

a vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$ jsou lineárně nezávislé. Skutečně, kdyby tyto vektory byly lineárně závislé, byl by jeden z nich násobkem druhého. To znamená, existovalo by takové číslo α, že by ${}^2\boldsymbol{x} = \alpha\,{}^1\boldsymbol{x}$ to jest, platilo by

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Takové číslo α však evidentně neexistuje. Vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$ jsou tedy lineárně nezávislé. Tedy mezi vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$, ${}^3\boldsymbol{x}$ jsou právě dva lineárně nezávislé vektory. Řádková hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je tedy rovna 2.

Definice 3.4. (Regulární matice)
Nechť čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ řádu n má hodnost n. Potom ji nazýváme regulární maticí.

Úkol. Dokažte si, že horní schodovitá matice má řádkovou hodnost rovnu počtu jejich nenulových řádků.

Poznámka. Zjišťovat hodnost matice přímo z definice je obtížné. Hodnost matice budeme hledat později jejím převodem na horní schodovitou matici o stejné hodnosti pomocí elementárních transformací, o kterých teď pojednáme.

3.3. Elementární transformace

1. Nechť matice $\boldsymbol{A}$ je typu (m, n) a α je libovolné reálná čísla, $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$. Nechť matice $\boldsymbol{B}$ je matice, jejíž i-tý řádek je roven α násobku i-tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a ostatní řádky matice $\boldsymbol{B}$ jsou stejné jako v matici $\boldsymbol{A}$. Potom řekneme, že matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ transformací $\mathcal{T}1(i, \alpha)$. Píšeme pak

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}1(i, \alpha)\boldsymbol{A}, \quad \text{resp.} \quad \{r_i = \alpha.r_i\}A = \boldsymbol{B}.$$

Příklad. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Označme $\boldsymbol{B}$ matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její druhý řádek vynásobíme čísle, „-3“ a ostatní řádky ponecháme beze změny. Dostaneme

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}1(2,-3)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -15 & -18 & -21 & -24 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Tuto transformaci lze zapsat též takto

$$\{r_2 = -3.r_2\}A = \boldsymbol{B}.$$

2 . Nechť matice $\boldsymbol{A}$ je typu (m,n) a $\alpha, \beta \neq 0$ jsou libovolná reálná čísla, i, j jsou přirozená čísla $1 \leq i, j \leq m, i \neq j$ Označme $\boldsymbol{B}$ tu matici typu (m,n), jejíž j–tý řádek je roven součtu α-násobku i-tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a β-násobku j-tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a ostatní řádky jsou stejné jako u matice $\boldsymbol{A}$. Potom řekneme, že matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ transformací $\mathcal{T}2(i,\alpha;j,\beta)$. Píšeme pak

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}2(i,\alpha;j,\beta)\boldsymbol{A}, \quad \text{resp.} \quad \boldsymbol{B} = \{r_j = \alpha.r_i + \beta.r_j\}\boldsymbol{A}.$$

Příklad. Nechť
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Označme $\boldsymbol{B}$ matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že řádek „2“, vynásobený číslem„-4“ připočítáme k řádku č. „3“ vynásobenému číslem „5“ a ostatní řádky matice $\boldsymbol{B}$ jsou stejné jako v matici $\boldsymbol{A}$. Tedy matice $\boldsymbol{B}$ je matice, která vznikne transformací $\mathcal{T}2(2,-4;3,5)\boldsymbol{A}$. Dostáváme

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}2(2,-4;3,5)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 25 & 26 & 27 & 38 \end{pmatrix}.$$

Tuto transformaci lze zapsat též takto

$$\boldsymbol{B} \ = \{r_3 = 4.r_2 + 5.r_3\}\boldsymbol{A}.$$

3 . Nechť matice $\boldsymbol{A}$ je typu (m,n) a i,j jsou přirozená čísla $1 \le i,j \le m, i \ne j$ Označme $\boldsymbol{B}$ tu matici typu (m,n), která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$, vzájemnou výměnou jejího i-tého řádku s j-tým řádkem. Potom řekneme, že matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice

$\boldsymbol{A}$ transformací $\mathcal{T}3(i;j)\boldsymbol{A}$. Píšeme pak

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}3(i;j)\boldsymbol{A}, \quad \text{resp.} \quad \boldsymbol{B} \ = \{r_i \leftrightarrow r_j\}\boldsymbol{A}.$$

Příklad. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Označme $\boldsymbol{B}$ matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že řádek „2“ matice $\boldsymbol{A}$ vyměníme s řádkem č. „3“ matice $\boldsymbol{A}$ a ostatní řádky matice $\boldsymbol{B}$ má stejné jako v matice $\boldsymbol{A}$. Potom řekneme, že matice $\boldsymbol{B}$, vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ transformací $\mathcal{T}3(2;3)\boldsymbol{A}$. Tedy

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}3(2;3)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Tuto transformaci lze zapsat též takto

$$\boldsymbol{B} \ = \{r_2 \leftrightarrow r_3\}\boldsymbol{A}.$$

3.4. Transformace matice na matici schodovitého tvaru

Ukážeme si nyní transformaci matice $\boldsymbol{A}$ elementárními transformacemi na horní schodovitou matici $\boldsymbol{B}$. Tuto transformaci využijeme

- při zjišťování hodnosti matice
- na analýzu řešitelnsti systému lineárních rovnic a odvození eliminační metody na řešení systému lineárních rovnic
- na výpočet hodnoty determinantu.

Ve výkladu používáme označení:
$\boldsymbol{A}$ ... proměnná pro matici. Na začátku je jí přiřazena matice, kterou máme transformovat na horní schodovitou matici. V jednotlivých krocích bude tato matice transformovaná sama na sebe.
m ... počet řádků matice $\boldsymbol{A}$
n ... počet sloupců matice $\boldsymbol{A}$
Postupně pro $i = 1, 2, \ldots$ budeme provádět následující úkony.

ZAČÁTEK

$\boxed{i = 1}$

Bod 1. Budeme vytvářet i-tý řádek hledané matice schodovitého tvaru.

Bod 2. K číslu i určíme nejmenší pořadové číslo sloupce matice $\boldsymbol{A}$, v jehož řádcích $i, i+1, \ldots, m$ je alespoň jeden nenulový prvek. Toto pořadové číslo sloupce označme s_i.

Bod 3. Zvolme $p \in \{i, \ldots, m\}$, pro než je $a_{p,s_i} \neq 0$. (je-li takových p více, zvolíme jedno z nich).Zvolený p-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ nazveme *hlavním řádkem*.

Bod 4. Je-li $p \neq i$, vyměníme navzájem p-tý a i-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$. Výměnu těchto dvou řádků provedeme transformaci $\boldsymbol{A} := \mathcal{T}3(i,p)A$. Po této výměně je i-tý řádek hlavním řádkem. Je-li $p = i$, je již i-tý řádek hlavním řádkem. Výměna řádků se tedy neprovádí.

Bod 5. Provedeme nyní takové elementární transformace, aby po jejich realizaci byly prvky $a_{i+1,s_i}, \ldots, a_{m,s_i}$ rovny 0. Toho dosáhneme např. elementární transformací

a) $\boldsymbol{A} := \mathcal{T}2(i, -a_{j,s_i}; j, a_{i,s_i})\boldsymbol{A}$ pro ty indexy $j = i+1, \ldots, m$ pro něž $a_{j,s_i} \neq 0$, nebo transformací

b) $\boldsymbol{A} := \mathcal{T}2(i, \frac{-a_{j,s_i}}{a_{i,s_i}}\ ;\ j,\ 1)\boldsymbol{A}$ pro ty indexy $j = i+1, \ldots, m$ pro něž $a_{j,s_j} \neq 0$,

Bod 6. Jestliže matice $\boldsymbol{A}$ není ještě ve schodovitém tvaru, položme $i = i + 1$ a přejdeme zpět na **Bod 1**. Je-li $\boldsymbol{A}$ již schodovitého tvaru, je výpočet ukončen.

Příklad 3.5. Matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

transformujte na horní schodovitou matici užitím elementárních transformací.

Řešení. Položme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{V našem případě je} \quad m = 4, \quad n = 5.$$

V následujícím popisu výpočtového postupu bude označení **Bod 1-*i*,. . . ,Bod 6-*i*** znamenat úkony **Bod 1, . . . , Bod 6** pro dané i.

ZAČÁTEK

$\boxed{i = 1}$

Bod 1-1 Budeme vytvářet i-tý (první) řádek hledané schodovité matice.

Bod 2-1 K číslu i (to jest k číslu $i = 1$) určíme nejmenší pořadové číslo sloupce, v jehož řádcích $i, \ldots, m$ (to jest v jehož řádcích $1, 2, 3, 4$) je nenulový prvek. Je to druhý sloupec. Položíme tedy $s_i = 2$ (tj. $s_1 = 2$).

Bod 3-1 Zvolíme hlavní řádek. V s_i–tém sloupci (to jest ve 2. sloupci) jsou nenulové prvky v řádcích $1, 2, 4$. Z nich zvolíme jeden. Jeho pořadové číslo označíme p. Rozhodneme se pro řádek $p = 1$, který zvolíme jako hlavní.

Bod 4-1 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek p–tý řádek, kde $p = i$, neprovádíme výměnu p-tého řádku s i-tým řádkem.

Bod 5-1 Provedeme nyní takové elementární tranformace matice $\boldsymbol{A}$, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (to jest ve druhém sloupci) v řádcích $i+1, \ldots, m$ (to jest v řádcích 2, 3, 4) nulové prvky. (Prvky $a_{2,2}, a_{3,2}, a_{4,2}$ eliminujeme). Toho dosáhneme např. elementárními transformacemi

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{T}2(i, -a_{j,s_i}\ ;\ j, a_{i,s_i})\boldsymbol{A}, \qquad \text{pro } j = i+1, \ldots, m,\ \text{je-li } a_{j,s_j} \neq 0.$$

Poněvadž $i = 1$, $s_i = 2$, $m = 4$, eliminaci provedeme elementárními transformacemi

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{T}2(1, -a_{j,2}\ ;\ j, a_{1,2})\boldsymbol{A}, \qquad \text{pro } j = 2, 3, 4.$$

To znamená, že prvek $a_{j,2}$ pro každé $j \in \{2, 3, 4\}$ eliminujeme tak, že hlavní řádek (to jest první řádek) vynásobíme číslem $(-a_{j,2})$ a přičteme jej k j-tému řádku vynásobeného číslem $a_{1,2}$.

- Položme $j = i + 1$ (tedy pro $j = 2$) dostáváme

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{T}2(1, -a_{2,2}, 2, a_{1,2})\boldsymbol{A}.$$

  Po této transformaci je druhý řádek matice $\boldsymbol{A}$ roven

$$-2 \cdot (0\ 1\ 3\ 2\ 3) + 1 \cdot (0\ 2\ 6\ 4\ 1) = (0\ 0\ 0\ 0\ \ -5)$$

  a ostatní řádky matice $\boldsymbol{A}$ se nemění.

- Položme $j = j + 1$. Je tedy $j = 3$. Poněvadž $a_{j,s_i} = 0$, (to jest $a_{3,2} = 0$), eliminaci není třeba provádět a přejdeme k dalšímu řádku.
- Položme $j = j + 1$. Je tedy $j = 4$. Poněvadž $a_{j,s_i} = 1 \neq 0$, (to jest $a_{4,2} \neq 0$,) provedeme elementární transformaci

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{T}2(1, -a_{4,2}; 4, a_{1,2})\boldsymbol{A}.$$

  Po této transformaci je čtvrtý řádek matice $\boldsymbol{A}$ roven

$$-1 \cdot (0\ 1\ 3\ 2\ 3) + 1 \cdot (0\ 1\ 3\ 2\ 4) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1).$$

Ostatní řádky matice $\boldsymbol{A}$ se nemění. Je tedy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bod 6-1 Poněvadž obdržená matice $\boldsymbol{A}$ ještě není horní schodovitou maticí, položíme

$$\boxed{i = i + 1}$$

a přejdeme na bod **Bod 1**.

Bod 1-2 *Je tedy* $i = 2$. *Budeme vytvářet druhý řádek horní schodovité matice.*

Bod 2-2 K číslu i (to jest k číslu $i = 2$) určíme nejmenší pořadové číslo s_i (to jest s_2) sloupce, v jehož řádcích $i, \ldots, m$ (to jest v jehož řádcích $2, 3, 4$) je nenulový prvek. Je to čtvrtý sloupec. Položíme tedy $s_i = 4$ ($s_2 = 4$).

Bod 3-2 Zvolíme hlavní řádek. V s_i-tém sloupci (to jest ve 4. sloupci) je v řádcích $2, 3, 4$ nenulový prvek jen v řádku 3. Jeho pořadové číslo označíme p. Tento řádek zvolíme za hlavní řádek. Je tedy $p = 3$.

Bod 4-2 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek řádek p, kde $p \neq i$, provedeme v matici $\boldsymbol{A}$ výměnu řádku p s řádkem i. (Tedy výměnu druhého a třetího řádku.) Dostáváme tak matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bod 5-2 Provedeme nyní takové elementární transformace matice $\boldsymbol{A}$, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (to jest ve čtvrtém sloupci) v řádcích $i+1, \ldots, m$ (to jest v řádcích 3, 4) nulové prvky. (Prvky $a_{3,4}, a_{4,4}$ eliminujeme.) Avšak v tomto případě jsou prvky $a_{3,4}, a_{4,4}$ rovny 0, takže eliminaci není třeba provádět. Je tedy výsledná matice v tomto kroku

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bod 6-2 Obdržená matice $\boldsymbol{A}$ ještě není horní schodovitou maticí, proto položíme

$$\boxed{i = i + 1}$$

a přejdeme na bod **Bod 1**.

Bod 1-3 Je tedy $i = 3$. To znamené, že budeme vytvářet třetí řádek hledané schodovité matice.

B2-3 K číslu i (to jest k číslu $i = 3$) určíme nejmenší pořadové číslo s_i (to jest s_3), v jehož řádcích $i, \dots, m$ (to jest v jehož řádcích $3, 4$) je nenulový prvek. Je to pátý sloupec. Položme tedy $s_i = 5$ ($s_3 = 5$).

B3-3 Zvolíme hlavní řádek. V s_i-tém sloupci (to jest v 5. sloupci) jsou nenulové prvky v řádcích 3, 4. Z nich zvolíme jeden. Jeho pořadové číslo označíme p. Rozhodneme se pro řádek $p = 4$, který zvolíme jako hlavní.

B4-3 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek p-tý řádek, kde $p \neq i$, provádíme výměnu řádku p s řádkem i. Po této výměně je

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

B5-3 Provedeme nyní takové elementární transformace matice $\boldsymbol{A}$, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (to jest v pátém sloupci) v řádcích $i+1, \dots, m$ (to jest v řádku 4) nulové prvky. (Prvek $x_{4,5}$ eliminujeme.) Toho lze dosáhnout např. elementární transformací

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{T}2(3, -a_{4,5}; 4, a_{3,5})\boldsymbol{A}.$$

touto trnsformcí bude čtvrtý řádek roven

$$5 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ 1) + 1 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ \ -5) = (0\ 0\ 0\ 0\ 0).$$

Je tedy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bod 6-3 Poněvadž obdržená matice je již horní schodovitou maticí, je transformace dané matice na horní schodovitou matici již ukončen.

Poněvadž obdržená schodovitá matice má celkem tři nenulové řádky, je její hodnost a tedy i hodnost zadané matice rovna 3. Tedy $h(A) = 3$.

Příklad 3.6. Určete hodnost skupiny vektorů

$$^1a = (1\ 0\ -1\ 2), \qquad ^2a = (0\ 1\ 2\ -1), \qquad ^3a = (0\ 1\ 3\ -6).$$

Řešení. Úloha je ekvivalentní s úlohou nalezení řádkové hodnosti matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Tuto hodnost hledejme transformací matice A elementárními ransformacemi na horní schodovitou matici postupem popsaným na str. ??.

Položme

$$\boxed{i = 1}$$

Bod 1-1 Budeme vytvářet i-tý řádek (1. řádek) schodovité matice.

Bod 2-1 K číslu $i = 1$ určíme nejmenší pořadové číslo sloupce matice $\boldsymbol{A}$, v jehož řádcích 1, 2, 3 je alespoň jeden prvek různý od 0. Je to v prvním sloupci. Pokládáme tedy $s_1 = 1$.

Bod 3-1 Hledáme nyní řádek matice $\boldsymbol{A}$, v jehož sloupci s pořadovým číslem $s_1 = 1$ je nenulový prvek. To jest, hledáme $p \in \{1, 2, 3\}$, pro něž je $a_{p,s_1} \neq 0$. Je to pro $p = 1$. Položme tedy $p = 1$. Řádek $p = 1$ volíme za hlavní.

Bod 4-1 Poněvadž $p = i$, neprovádíme výměnu p-tého a i-tého řádku. První řádek je hlavním.

Bod 5-1 Poněvadž všechny prvky v prvním sloupci počínaje druhým řádkem, jsou nulové (tj. prvky $a_{j,1} = 0$ pro $j = 2, 3$), přejdeme k **B6-1**.

Bod 6-1 Matice $\boldsymbol{A}$ není horní schodovitou maticí, proto položíme

$$\boxed{i = i + 1}$$

a jdeme zpět k bodu **B1**.

Bod 1-2 Je tedy $i = 2$. Budeme vytvářet 2. řádek schodovité matice.

Bod 2-2 K číslu i (tj. k číslu $i = 2$) určíme nejmenší pořadové číslo sloupce s_i (to jest s_2), v jehož řádcích 2, 3 je nenulový prvek. Je to druhý sloupec. Položíme tedy $s_2 = 2$.

Bod 3-2 Zvolíme hlavní řádek. Ve sloupci s pořadovým číslem s_2 (tj. ve druhém sloupci) hledáme index j, $j \geq i$, tak, aby $a_{j,s_2} \neq 0$. Je to pro $j = 2$ a pro $j = 3$. Zvolme jedno z nich. Rozhodneme se pro $j = 2$. Položíme $p = 2$. Bude tedy p-tý řádek hlavním řádkem.

Bod 4-2 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek p-tý řádek, kde $p = i$, neprovádíme vzájemnou výměnu p-tého a i-tého řádku. Je tedy i-tý řádek hlavním řádkem.

Bod 5-2 Provedeme nyní takové elementární transformace, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (ve druhém sloupci) v řádcích $i+1, \ldots, m$ (to jest v řádku 3) nulové prvky. Toho dosáhneme např. elementární transformací

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{T}2(2, -a_{3,2}; 3, a_{2,2})\boldsymbol{A}.$$

Výpočtem dostáváme třetí řádek vektoru $\boldsymbol{A}$

$$-1(0\ 1\ 2\ \ -1) + 1(0\ 1\ 3\ \ -6) = (0\ 0\ 1\ \ -5).$$

Celkem dostáváme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bod 6-2 Dosažená matice $\boldsymbol{A}$ je horní schodovitá matice. Poněvadž má tři nenulové řádky, je její hodnost rovna 3, je tedy $h(\boldsymbol{A}) = 3$.

Dané vektory ${}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a}, {}^3\boldsymbol{a}$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad 3.7. Určete hodnost matice

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení. V tomto příkladě naznačíme pouze výsledky jednotlivých úprav bez komentáře.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Má tedy matice $\boldsymbol{X}$ hodnost 2.

Transformace matice $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B}|\boldsymbol{C})$ na matici $(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{X})$.

Nechť $\boldsymbol{B}$ je čtvercová regulární matice řádu n a $\boldsymbol{C}$ je matice typu $(n,\ m)$. Popišme algoritmus transformace této matice elementárními transformace na matici tvaru $(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{X})$.

Ve výkladu používáme označení:

$\boldsymbol{A}$ ... proměnná pro matici. Na začátku je jí přiřazena matice, kterou máme transformovat na požadovaný tvar. V jednotlivých krocích bude tato matice transformovaná sama na sebe.

$m\ldots$ počet řádků matice $\boldsymbol{A}$

$n\ldots$ počet sloupců matice $\boldsymbol{A}$

Postupně pro $i = 1, 2, \ldots$ budeme provádět následující úkony.

ZAČÁTEK

$\boxed{i = 1}$

Bod 1. Budeme vytvářet i-tý řádek hledané matice.

Bod 2. K číslu i určíme nejmenší pořadové číslo sloupce matice $\boldsymbol{A}$, v jehož řádcích $i, i+1, \ldots, n$ je alespoň jeden nenulový prvek. Toto pořadové číslo sloupce označme s_i.

Bod 3. Zvolme $p \in \{i, \ldots, n\}$, pro než je $a_{p,s_i} \neq 0$. (je-li takových p více, zvolíme jedno z nich).Zvolený p-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ nazveme *hlavním řádkem*.

Bod 4. Je-li $p \neq i$, vyměníme navzájem p-tý a i-tý řádek metice $\boldsymbol{A}$. Výměnu těchto dvou řádků provedeme transformaci $\boldsymbol{A} := \mathcal{T}3(i,p)A$. Po této výměně je i-tý řádek hlavním řádkem. Je-li $p = i$, je již i-tý řádek hlavním řádkem. Výměna řádků se tedy neprovádí.

Bod 5. Provedeme nyní takové elementární transformace, aby po jejich realizaci byly prvky $a_{j,s_i}, j = 1, \ldots, n,\ j \neq i$ rovny 0. Toho dosáhneme např. elementárními trasformacemi

a) $\boldsymbol{A} := \mathcal{T}2(i, -a_{j,s_i};\ j, a_{i,s_i})\boldsymbol{A}$ pro ty indexy $j = 1, \ldots, n, j \neq i$ pro něž $a_{j,s_i} \neq 0$, nebo transformací **b)** $\boldsymbol{A} := \mathcal{T}2(i, \frac{-a_{j,s_i}}{a_{i,s_i}};\ j,\ 1)\boldsymbol{A}$ pro ty indexy $j = 1, \ldots, n, j \neq i$, pro něž $a_{j,s_i} \neq 0$,

Bod 6. Jestliže $i < n$ položme $i := i + 1$ a jdeme zpět k **Bod 1.** V opačném případě jdeme k bodu (**Bod 7**).

Bod 7 Provedeme tyto transformace

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{T}1(i, \frac{1}{a_{i,i}}), i = 1, \ldots, n$$

Tím je $\boldsymbol{A}$ hledanou maticí.

Kapitola 4

Metody řešení systému lineárních algebraických rovnic

4.1. Řešení některých typů systémů lineárních rovnic

Úloha. Řešení systému n lineárních rovnic o n neznámých s regulární horní trojúhelníkovou maticí soustavy

Řešme systém rovnic

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}, \tag{4.1}$$

kde $\boldsymbol{C}$ je horní regulární trojúhelníková matice řádu n, $\boldsymbol{d}$ je n–rozměrný sloupcový vektor a $\boldsymbol{x}$ je n–rozměrný sloupcový vektor neznámých. Tento systém rovnic lze tedy zapsat jako

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Rozepsáním tohoto systému dostáváme

$$\begin{array}{ccccccccccc} c_{1,1}x_1 & + & c_{1,2}x_2 & + & \dots & + & c_{1,n-1}x_{n-1} & + & c_{1,n}x_n & = & d_1 \\ & & c_{2,2}x_2 & + & \dots & + & c_{2,n-1}x_{n-1} & + & c_{2,n}x_n & = & d_2 \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & c_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & c_{n-1,n}x_n & = & d_{n-1} \\ & & & & & & & & c_{n,n}x_n & = & d_n \end{array} \tag{4.3}$$

Poněvadž dle předpokladu je matice $\boldsymbol{C}$ regulární, jsou její prvky na hlavní diagonále různé od nuly. Tento systém rovnic lze řešit metodou, zvanou **metoda zpětné substituce**.

Z poslední rovnice vypočítáme x_n. Dostáváme

$$x_n = d_n / c_{n,n}. \tag{4.4}$$

Dosadíme-li do předposlední rovnice za x_n vypočítanou hodnotu (4.4), dostáváme

$$c_{n-1,n-1} \cdot x_{n-1} + c_{n-1,n} \cdot d_n / c_{n,n} = d_{n-1}. \tag{4.5}$$

Odtud

$$x_{n-1} = 1 / c_{n-1,n-1} \cdot (d_{n-1} - c_{n-1,n} \cdot d_n / c_{n,n}). \tag{4.6}$$

Když jsme již vypočítali x_n, x_{n-1}, dosadíme tyto hodnoty do $(n-2)$–té rovnice a vypočítáme x_{n-2}. Tímto způsobem dále pokračujeme. Když jsme již vypočítali $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2$ dosadíme tyto hodnoty do první rovnice a vypočítáme zbývající hodnotu x_1.

Příklad 4.1. Nalezněte řešení systému lineárních rovnic (jehož matice soustavy je horní regulární trojúhelníková matice).

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ & & & & 2x_3 & = & 8. \end{array} \tag{4.7}$$

Z poslední rovnice vypočítáme x_3. Dostáváme $x_3 = 4$. Dosazením této hodnoty do druhé rovnice dostáváme

$$x_2 + 8 = 9.$$

Odtud dostáváme $x_2 = 1$. Dosaďme za x_2, x_3 tyto vypočítáné hodnoty do první rovnice systému. Dostáváme

$$2x_1 + 3 + 4 = 11.$$

Odtud dostáváme $x_1 = 2$.

Řešením zadaného systému rovnic (4.7) jsme tedy obdrželi

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4.$$

Úloha. Řešení systému lineárních rovnic s regulární diagonální matici soustavy.

Řešme systém rovnic

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d},$$

kde $\boldsymbol{C}$ je regulární diagonální matice.

Rozepsáním lze tento systém zapsat takto

$$\begin{aligned}
c_{1,1}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= d_1 \\
c_{2,2}x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= d_2 \\
&\ \vdots \\
c_{n-1,n-1}x_{n-1} \qquad &= d_{n-1} \\
c_{n,n}x_n &= d_n.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Řešením tohoto systému rovnic je zřejmě vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}$, to jest

$$x_i = d_i / c_{i,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Příklad 4.2. Nalezněte řešení systému rovnic s diagonální matici soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\qquad &= 6, \\ 3\,x_2 \qquad\quad &= 1, \\ -2\,x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Řešení. Z první rovnice vypočítáme x_1. Dostáváme $x_1 = 3$. Z druhé rovnice vypočítáme x_2. Dostáváme $x_2 = 1/3$. Z třetí rovnice vypočítáme x_3. Dostáváme $x_3 = -5/2$.

Úloha. Řešení systému lineárních rovnic s horní schodovitou maticí soustavy (4.9) typu (h, n), s hodností $h \leq n$.

Řešme tedy systém rovnic

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d},$$

který po rozepsání má tento tvar.

$$\begin{array}{rcl} c_{1,s_1}x_{s_1} + \ldots + c_{1,s_2}x_{s_2} + \ldots + c_{1,s_h}x_{s_h} + \ldots + c_{1,n}x_n & = & d_1 \\ c_{2,s_2}x_{s_2} + \ldots + c_{2,s_h}x_{s_h} + \ldots + c_{2,n}x_n & = & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{h,s_h}x_{s_h} + \ldots + c_{h,n}x_n & = & d_h. \end{array} \tag{4.9}$$

V něm jsou prvky $c_{1,s_1}, c_{2,s_2}, \ldots, c_{h,s_h}$, kde $s_1 < s_2 < \ldots s_h$ jsou různé od nuly.

Neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tohoto systému lze rozdělit do dvou skupin. První skupina obsahuje h neznámých – nazveme je základními, a druhá skupina obsahuje zbývajících $n-h$ neznámých. Toto rozdělení neznámých do dvou skupin není libovolné. Musí být takové, že jestliže členy jednotlivých rovnic systému $\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, obsahující základní proměnné, ponecháme na levé straně a ostatní členy rovnic dáme na pravou stranu rovnic, obdržíme systém h rovnic o h neznámých z první skupiny s regulární matici soustavy. Pravá strana takto vzniklého systému obsahuje neznámé druhé skupiny – parametry. Tedy základní proměnné lze vypočíst z daného systému jako funkce neznámých druhé skupiny – parametrů. Toto rozdělění neznámých není jednoznačně určeno. Za základní proměnné lze zvolit např. neznámé $x_{s_i}, i = 1, 2, \ldots, h$. Množinu všech řešení daného systému rovnic nazýváme **obecným řešením daného systému.** Je funkcí zvolených $n-h$ parametrů.

Příklad 4.3. Nalezněte řešení systému lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & + & 7x_7 & = & 40 \\ & & & - & 2x_3 & & & + & x_5 & & & - & x_7 & = & -8 \\ & & & & & & & & & & x_6 & - & 3x_7 & = & -15 \end{array} \tag{4.10}$$

o neznámých x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Řešení. Maticí soustavy je horní schodovitá matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Označme $\boldsymbol{b}$ vektor pravých stran a $\boldsymbol{x}$ vektor neznámých. Potom je

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ -8 \\ -15 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

Zadaný systém (4.10) rovnic lze pak zapsat v maticové notaci jako

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Za základní neznámé lze volit neznámé x_1, x_3, x_6. Všechny členy rovnic obsahující neznámé x_1, x_3, x_6 ponecháme na levé straně a ostattní členy dáme na pravou stranu. Dostáváme tak systém rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_3 & + & 2x_6 & = & 40 & - & 2x_2 & - & 4x_4 & - & x_5 & - & 7x_7 \\ & - & 2x_3 & & & = & -8 & & & & & - & x_5 & + & x_7 \\ & & & & x_6 & = & -15 & & & & & & & + & 3x_7 \end{array} \tag{4.11}$$

Dosadíme-li za neznámé x_2, x_4, x_5, x_7 do (4.11) jakákoliv čísla, je pravou stranou takto vzniklého systému konstantní vektor a systém přechází na systém 3 rovnic o třech neznámých x_1, x_3, x_6. Matice soustavy tohoto systému je regulární horní trojúhelníková matice řádu 3. Jeho vyřešením dostáváme hodnoty neznámých x_1, x_3, x_6, které spolu se zvolenými hodnotami x_2, x_4, x_5, x_7 dávají řešení zadaného systému lineárních rovnic.

Na neznámé x_2, x_4, x_5, x_7 se budeme tedy dívat jako na parametry. Kvůli zvýšení přehlednosti zavedeme toto označení parametrů:

$$x_2 = c_1, \quad x_4 = c_2, \quad x_5 = c_3, \quad x_7 = c_4. \tag{4.12}$$

Dosazením těchto parametrů do (4.11), dostáváme

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_3 & + & 2x_6 & = & 40 & - & 2c_1 & - & 4c_2 & - & c_3 & - & c_4 \\ & - & 2x_3 & & & = & -8 & & & & & - & c_3 & + & c_4 \\ & & & & x_6 & = & -15 & & & & & & & + & 3c_4 \end{array} \tag{4.13}$$

Z poslední rovnice vypočítáme x_6. Dostáváme

$$x_6 = -15 + 3c_4.$$

Do druhé rovnice dosadíme vypočítanou hodnotu x_6 a vypočítáme x_3. (Dosazení za x_6 se neprojeví, neboť koeficient u x_6 je v této rovnici roven 0.) Dostáváme

$$x_3 = 4 + 1/2c_3 - 1/2c_4.$$

Dosadíme tyto vypočítané hodnoty za x_3, x_6 do první rovnice systému (4.13) a vypočítáme x_1. Dostáváme

$$x_1 = 66 - 2c_1 + 4c_2 + 1/2c_3 - 25/2c_4.$$

Všechna řešení zadaného systému rovnic (4.11) lze zapsat takto

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 66 - 2c_1 + 4c_2 + 1/2c_3 - 25/2c_4 \\ c_1 \\ 4 + 1/2c_3 - 1/2c_4 \\ c_2 \\ c_3 \\ -15 + 3c_4 \\ c_4 \end{pmatrix},
$$

kde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

Toto řešení lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 66 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Partikulární} \\ \text{řešení systému} \\ \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}}} \underbrace{+ c_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \cdot \begin{pmatrix} -25/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Obecné řešení homogenního systému } \boldsymbol{Ax}=0}.$$

Poznámka 1. Množinu všech řešení systému lineárních rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nazýváme **obecným řešením**. Lze ukázat, že toto obecné řešení je součtem obecného řešení příslušného homogenního systému rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ a partikulárního, to jest libovolně zvoleného jednoho řešení systému rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.

Poznámka 2. V našem případě obdržené obecné řešení závisí na 4 parametrech. Znamená to, že každou volbou parametrů dostáváme řešení uvedeného systému lineárních rovnic a naopak, každé řešení daného systému rovnic dostaneme speciální volbou parametrů.

V tomto obecném řešení je vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 66 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jedním z řešení daného systému rovnic. Nazýváme je partikulárním řešením. Množina řešení

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \cdot \begin{pmatrix} -25/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ jsou parametry, je obecným řešením systému $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, který se nazývá homogenním systémem rovnic, příslušným k danému systému rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Poznámka 3. Vyjádření obecného řešení systému rovnic není jednoznačné (každé vyjádření ovšem obsahuje tatáž řešení), dá se vyjádřit v různých tvarech.

4.2. Ekvivalentní systémy rovnic.

Definice 4.1. (Ekvivalentní systémy rovnic.)
Nechť

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$$

jsou dva systémy lineárních rovnic o n neznámých. Tyto systémy nazveme **ekvivalentními**, jestliže každý vektor $\boldsymbol{x}$, který je řešením systému rovnic $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, je i řešením systému $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ a naopak, každé řešení $\boldsymbol{x}$, které je řešením systému rovnic $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, je i řešením systému rovnic $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Při řešení systému rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ půjde o nalezení takového ekvivalentního systému rovnic, který je možno snadno posoudit. To znamená určit, zda tento ekvivalentní systém má nebo nemá řešení a v případě, že má řešení, toto řešení nalézt.

4.2.1. Převod systému lineárních rovnic na ekvivalentní systém rovnic.

Uvažujme systém lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4.14}$$

Ukažme si platnost následujících pravidel **P1, P2, P3, P4**.

P1. Nechť α je libovolné reálné číslo $\neq 0$. Uvažujme libovolně zvolenou i–tou rovnici systému (4.14)

$$a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n = b_i. \tag{4.15}$$

Je evidentní, že vektor $\boldsymbol{x}$ vyhovuje rovnici (4.15), když a jenom když vyhovuje rovnici

$$\alpha \cdot (a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots a_{i,n} \cdot x_n) = \alpha \cdot b_i. \tag{4.16}$$

Nahradíme-li tedy v systému (4.14) některou rovnici jejím násobkem číslem α, $\alpha \neq 0$, je vzniklý systém ekvivalentní s daným systémem.

P2. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ a nechť

$$a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n = b_i, \tag{4.17}$$

$$a_{j,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{j,n} \cdot x_n = b_j, \tag{4.18}$$

jsou dvě libovolné rovnice systému rovnic (4.14). Je opět evidenetní, že každý vektor $\boldsymbol{x}$ vyhovuje oběma těmto rovnicím, když a jenom když vyhovuje rovnicím

$$a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n = b_i, \tag{4.19}$$

$$(\alpha a_{i,1} + \beta a_{j,1}) \cdot x_1 + \ldots + (\alpha a_{i,n} + \beta a_{j,n}) \cdot x_n = \alpha b_i + \beta b_j, , \tag{4.20}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$.

Přičteme-li tedy k β-násobku některé rovnici systému (4.14) α-násobek jiné rovnice, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vznikne systém ekvivalentní se systémem (4.14).

P3. **Vzájemnou výměnou dvou rovnic systému $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ vznikne systém ekvivalentní s daným systémem.**

P4. **Vypustíme-li ze systému rovnic (4.14) rovnici tvaru**

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0,$$

obdržíme systém rovnic, který je ekvivalentní se systémem rovnic (4.14), neboť každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ této rovnici vyhovuje. Tato rovnice tedy nedává žádné omezení pro řešení systému rovnic (4.14).

P5. **Jestliže v systému rovnic (4.14) je některá rovnice tvaru**

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = c, \quad c \neq 0,$$

nemá uvažovaný systém žádné řešení, neboť této rovnici nevyhovuje žádný vektor.

Tyto úvahy můžeme shrnout následovně.

Věta 4.1.

Nechť jsou dány dva systémy lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$$

o neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Nechť systém* $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ *vznikl ze systému* $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *těmito úkony:*

T1. *Libovolnou rovnici systému jsme násobili číslem různým od nuly.*

T2. *K nenulovému násobku jedné rovnice jsme připočetli libovolný násobek jiné rovnice.*

T3. *Vyměnili jsme navzájem dvě rovnice systému.*

T4. *Z daného systému rovnic vypustíme rovnice typu*

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0,$$

Potom systémy $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ *jsou navzájem ekvivalentní*

Abychom si usnadnili zápis při operacích s rovnicemi, budeme pracovat jenom s koeficienty rovnic a s jejich pravými stranami. K systému rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4.21}$$

přiřadíme rozšířenou maticitohoto systému rovnic

$$(\boldsymbol{A}|b) \tag{4.22}$$

Součtu dvou rovnic systému (5.1) odpovídá součet odpovídajících řádků matice (4.22). Podobně násobení nějaké rovnice systému (5.1) číslem různým od nuly odpovídá násobení odpovídajícího řádku matice (4.22) tímto číslem.

Předpokládejme, že jsme k systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

přiřadili rozšířenou matici soustavy tohoto systému rovnic. Potom úkonům $\mathrm{T}1, \mathrm{T}2, \mathrm{T}3$, s rovnicemi systému $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, uvedených ve větě 4.1, odpovídají elementární transformace $\mathcal{T}1(i, \alpha)$, $\mathcal{T}2(i, \alpha\,;\, j, \beta)$, $\mathcal{T}3(i, j)$, vypuštění rovnice odpovídá vypuštění odpovídajícího řádku v matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. Aplikováním těchto úkonů na matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. obdržíme matici odpovídající ekvivalentnímu systému k systému $\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Vhodnými elementárními transformacemi lze z matice $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ dospět ke schodovité matici $(\boldsymbol{C}|d)$, která odpovídá systému $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, ekvivalentnímu k systému lineárních rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. V kapitole ?? jsme uvedli postup převodu matice na schodovitý tvar užitím elementárních transformací.

Řešení systému lineárních rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lze tímto způsobem převést na řešení systému lineárních rovnic se schodovitou maticí soustavy. O řešení systému lineárních rovnic, s horní schodovitou maticí soustavy, bylo pojednáno již dříve.

Postup řešení systému lineárních rovnic

Nechť je dán systém lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4.23}$$

o n neznámých $x_1, \ldots, x_n$. Tento systém lineárních rovnic můžeme řešit v těchto krocích

1. K daném systému rovnic přiřadíme matici rozšířenou $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.
2. Užitím vhodných elementárních transformací

$$\mathcal{T}1(i,\alpha),\ \alpha \neq 0,\ \mathcal{T}2(i,\alpha\ ;\ j,\beta),\ \beta \neq 0,\ \mathcal{T}3(i,\ j)$$

   postupně aplikovaných na matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, vytvoříme horní schodovitou matici $(\boldsymbol{F}|\boldsymbol{g})$.
3. Vypustíme nulové řádky matice $(\boldsymbol{F}|\boldsymbol{g})$. Takto vzniklou matici označme $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$. Této matici odpovídá systém rovnic

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}. \tag{4.24}$$

4. Tento systém rovnic (4.24)

a) má buďto tvar

$$\begin{array}{rcl} c_{1,s_1}x_{s_1} + \ldots + c_{1,s_2}x_{s_2} + \ldots c_{1,s_{h-1}}x_{s_{h-1}} + \ldots + c_{1,n}x_n & = & d_1 \\ c_{2,s_2}x_{s_2} + \ldots + c_{2,s_{h-1}}x_{s_{h-1}} + \ldots + c_{2,n}x_n & = & d_2 \\ & \vdots & \\ c_{h-1,s_{h-1}}x_{s_{h-1}} + \ldots + c_{h-1,n}x_n & = & d_{h-1} \\ 0 \cdot x_n & = & d_h, \end{array} \tag{4.25}$$

v němž čísla c_{1,s_1}, c_{2,s_2}, $\ldots$, $c_{h-1,s_{h-1}}$, d_h jsou různá od 0.

b) nebo tvar

$$\begin{array}{rcl} c_{1,s_1}x_{s_1} + \ldots + c_{1,s_2}x_{s_2} + \ldots + c_{1,s_h}x_{s_h} + \ldots + c_{1,n}x_n & = & b_1 \\ c_{2,s_2}x_{s_2} + \ldots + c_{2,s_h}x_{s_h} + \ldots + c_{2,n}x_n & = & d_2 \\ & \vdots & \\ c_{h,s_h}x_{s_h} + \ldots + c_{h,n}x_n & = & d_h \end{array} \tag{4.26}$$

v němž c_{1,s_1}, c_{2,s_2}, $\ldots$, c_{h,s_h} jsou různá od 0.

V případě $\mathbf{a})$ nemá systém $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ řešení, neboť jeho poslední rovnice $0 \cdot x_n = d_h$ není splněna pro žádné x_n. V tomto případě má matice $\boldsymbol{C}$ hodnost $h-1$ a matice rozšířená $(\boldsymbol{C}|d)$ hodnost h. Mají tedy různé hodnosti.Vzhledem k tomu, že elementárními transformacemi se hodnost matice nemění, můžeme konstatovat, že systém rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

nemá řešení, když a jenom když hodnost matice soustavy je menší než hodnost matice rozšířené.

Podívejme se na případ $\mathbf{b}$). O způsobu řešení tohoto systému jsme již dříve pojednali. Stručně to zopakujme. V tomto případě lze neznámé rozdělit do dvou skupin , skupinu h neznámých – nazveme je základními, které lze vypočíst pomocí zbývajících $n-h$ neznámých – parametrů. Toto rozdělení není jednoznačně určeno. Možné volby jsou patrny z tvaru systému

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}.$$

Jestliže členy systému $\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, obsahující základní proměnné, ponecháme na levé straně a ostatní členy dáme na pravou stranu, musíme obdržet systém rovnic s horní trojúhelníkovou matici soustavy, jejíž diagonální prvky jsou nenulové. Za základní proměnné lze např. zvolit neznámé $x_{s_i}, i = 1, 2, \ldots, h$ a zbývající proměnné – nazveme je parametry a označíme je $c_1, \ldots, c_{n-h}$.

Výsledek těchto úvah shrneme do následující věty.

Věta 4.2. (Frobeniova věta.)

Nechť

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4.27}$$

je systém m lineárních rovnic o n neznámých. Potom platí:
Jestliže matice soustavy $\boldsymbol{A}$ má menší hodnost než matice rozšířená $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, potom systém rovnic (4.27) nemá řešení.
Jestliže matice soustavy $\boldsymbol{A}$ má stejnou hodnost jako matice rozšířená $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, potom systém rovnic (4.27) má řešení. Jestliže tato společná hodnost je rovna počtu neznámých n, potom má právě jedno řešení. Jestliže tato společná hodnost je $h < n$, potom má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n-h$ parametrech.

Příklad 4.4. Proveďme analýzu systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -6 & -2 & 1 \\ 7 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jedná se o systém čtyř lineárních rovnic o třech neznámých. Analýzu řešitelnosti tohoto systému rovnic provedeme podle předchozího návodu.

Utvořme rozšířenou matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ tohoto systému

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -4 & 3 \\ -6 & -2 & 1 & 4 \\ 7 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right),$$

Transformujme ji na horní schodovitou matici.

$$\left\{ \begin{array}{c} r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 = 6r_1 + r_2 \\ r_3 = -7r_1 + r_3 \end{array} \right. \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -4 & 3 \\ -6 & -2 & 1 & 4 \\ 7 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 13 & 10 \\ 0 & -4 & -14 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} r_2 \leftrightarrow r_4 \\ r_3 = 4r_2 + r_3 \\ r_4 = 2r_2 + r_4 \end{cases} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 13 & 10 \\ 0 & -4 & -14 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -30 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 16 \end{array}\right)$$

$$\{r_4 = r_3 + 6r_4 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -30 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 16 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -30 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 103 \end{array}\right)$$

Hledanou horní schodovitou maticí je tedy matice

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -30 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 103 \end{array}\right)$$

Této matici odpovídá systém lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 103 \end{pmatrix}$$

Tento systém rovnic nemá řešení (poslední rovnice !!!). Nemá tedy řešení ani daný systém rovnic $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, který je s tímto systémem ekvivalentní.

Uveďme ukázky řešení několika úloh, v nichž matice soustavy není schodovitá.

Příklad 4.5. Řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1, \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 3. \end{array} \tag{4.28}$$

Řešení. K danému systému rovnic napíšeme odpovídající rozšířenou matici soustavy

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right). \tag{4.29}$$

Tuto matici transformujeme elementárními transformacemi na horní schodovitou matici. Výpočet provedeme v několika krocích.

1. První řádek zvolíme jako hlavní. Budeme eliminvat prvky $a_{2,1}, a_{3,1}$. První řádek násobíme číslem (-2) a přičteme ke druhému řádku. Dostaneme
$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right).$$
První řádek násobíme (-4) a připočteme ke čtvrtému řádku. Dostaneme
$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right).$$

2. Druhý řádek zvolíme jako hlavní. Budeme eliminovat prvek $a_{3,2}$. Druhý řádek násobíme číslem (-1) a připočteme ke třetímu řádku. Dostaneme horní schodovitou matici
$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

V této matici vypustíme řádek obsahující samé 0. Dostáváme tak matici, označme ji $(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{c})$, která odpovídá systému (4.30) $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{c}$, který je ekvivalentní s daným systémem rovnic (4.28).
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & - & 5x_2 & + & 7x_3 & - & 3x_4 & = & -1 \end{array} \tag{4.30}$$

Členy těchto rovnic obsahující neznámé x_3, x_4 převedeme na pravou stranu systému. Budeme je považovat za parametry. Zároveň položíme

$$c_1 = x_3, \quad c_2 = x_4.$$

Dostáváme

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 & + & 3c_1 & - & c_2, \\ & - & 5x_2 & = & -1 & - & 7c_1 & + & 3c_2. \end{array}$$

Z poslední rovnice vypočítáme x_2. Dostaneme

$$x_2 = 1/5 \cdot (1 + 7c_1 - 3c_2).$$

Dosadíme tuto vypočítanou hodnotu x_2 do první rovnice a vypočítáme z takto vzniklé rovnice x_1. Dostaneme

$$x_1 = 1/5 \cdot (3 + c_1 + c_2).$$

Obecným řešením zadaného systému lineárních rovnic (4.28) je tedy vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} (1/5 \cdot (3 + c_1 + c_2) \\ 1/5 \cdot (1 + 7c_1 - 3c_2) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Toto obecné řešení lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1/5 \\ 7/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.6. Nalezněte řešení systému lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 4 \end{array} \tag{4.31}$$

Řešení. K danému systému rovnic napíšeme odpovídající rozšířenou matici soustavy.

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & +1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Tuto matici soustavy transformujme elementárními transformacemi na horní schodovitou matici.

1. První řádek zvolíme jako hlavní. Budeme eliminovat prvky $a_{2,1}, a_{3,1}$. První řádek násobíme číslem (-2) a přičteme ke druhému řádku. Dostaneme

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

   První řádek násobíme (-4) a připočteme k třetímu řádku. Dostaneme

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

2. Druhý řádek zvolíme jako hlavní. Druhý řádek násobíme číslem (-1) a připočteme ke třetímu řádku. Dostaneme horní schodovitou matici

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

První čtyři sloupce představují matici, kterou jsme obdrželi elementárními transformacemi matice soustavy daného systému rovnic. Tato matice má hodnost 2. Celá matice představuje matici, která vznikla elementárními transformacemi rozšířené matice soustavy daného systému rovnic. Má hodnost 3. To znamená, že matice soustavy daného systému rovnic má hodnost 2 a matice rozšířená daného systému rovnic má hodnost 3, tedy odlišnou od hodnosti matice soustavy. Daný systém rovnic tedy nemá řešení.

Neexistence řešení daného systému rovnic vyplývá i z této úvahy. Tato výsledná matice reprezentuje systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ & - & 5x_2 & + & 7x_3 & - & 3x_4 & = & -1, \\ 0\cdot x_1 & + & 0\cdot x_2 & + & 0\cdot x_3 & + & 0\cdot x_4 & = & 1. \end{array} \tag{4.32}$$

Vzhledem k poslední rovnici je patrno, že systém nemá řešení.

4.3. Gaussova eleminační metoda.

V následujícím výkladu nejde o nic nového. Jde o zavedení názvu pro metodu, o které jsme již obecněji pojednali. Speciální případ uvádíme proto, že se s tímto názvem můžete setkat.

Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu n, $\boldsymbol{b}$ je n–rozměrný sloupcový vektor a $\boldsymbol{x}$ je neznámý n–rozměrný sloupcový vektor. Uvažujme systém n lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{4.33}$$

Tento systém rovnic (4.33) řešme takto:

1. Matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ transformujeme elementárními transformacemi na horní schodovitou matici. Dostaneme
$$(\boldsymbol{T}|\boldsymbol{c}), \tag{4.34}$$
kde $\boldsymbol{T}$ je horní trojúhelníková matice. (Je to zvláštní případ horní schodovité matice.)
2. Řešíme obdržený systém rovnic $\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{c}$ s horní trojúhelníkovou maticí metodou zpětné substituce.

Tento způsob výpočtu se nazývá **Gaussova eleminační metoda**. Tato metoda má mnoho variant, spočívajících jak ve výběru hlavních řádků (při transformaci rozšířené matice soustavy na horní schodovitou matici), tak i při provádění jednotlivých kroků v elementárních transformacích, jimiž se systém rovnic (4.33) převádí na systém rovnic (4.34).

Příklad 4.7. Gaussovou eliminační metodou řešte systém lineárních rovnic

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$

kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

K systému rovnic přiřadíme rozšířenou matici soustavy

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right).$$

Tuto matici převedeme elementárními transformacemi na matici

$$(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{c}),$$

kde matice $\boldsymbol{B}$ je horní trojúhelníková matice. Postupně dostáváme

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 11 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{array}\right).$$

Poslední matici odpovídá systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 1, \\ & 5x_2 & -2x_3 & = & 4, \\ & & 21x_3 & = & 63. \end{array}$$

Tento systém řešíme metodou zpětné substituce. Z poslední rovnice vypočítáme x_3. Dostáváme $x_3 = 3$. Dosadíme-li tuto hodnotu do druhé rovnice a vypočítáme x_2, dostáváme $x_2 = 2$. Dosadíme-li nyní do první rovnice vypočítané hodnoty x_3, x_2, dostáváme z ní $x_1 = 1$. Je tedy hledaným řešením vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4.4. Jordanova eliminační metoda.

V následujícím výkladu pojednáme o metodě založené na speciálně cílenou elementární tranformaci rozšířené matice soustavy. (Popis algoritmu je na str. 150.)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu n, $\boldsymbol{b}$ je n–rozměrný sloupcový vektor a $\boldsymbol{x}$ je neznámý n–rozměrný sloupcový vektor. Uvažujme systém lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{4.35}$$

Systém rovnic (4.35) řešme takto:

1. Matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ transformujeme elementárními trasformacemi na matici $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$, kde $\boldsymbol{C}$ je regulární diagonální matice řádu n.

2. Řešíme systém rovnic s diagonální maticí

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}. \tag{4.36}$$

Tento způsob výpočtu se nazývá **Jordanova eleminační metoda**. Tato metoda má mnoho variant, spočívajících jak ve výběru hlavních řádků tak i při provádění jednotlivých kroků v elementárních transformacích, jimiž se systém rovnic (4.33) převádí na systém rovnic (4.36).

Příklad 4.8. Jordanovou eliminační metodou řešte systém lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

K systému rovnic přiřadíme rozšířenou matici soustavy

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right).$$

Tuto matici převedeme elementárními transformacemi na matici

$$(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}),$$

kde matice $\boldsymbol{C}$ je diagonální matice, (to lze, jestliže matice $\boldsymbol{A}$ je regulární). Postupně dostáváme

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left\{\ r_3 = 2r_1 + r_3 \right. \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 = 3r_2 + 5r_1 \\ r_3 = 2r_2 + 5r_3 \end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 11 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & 4 & 17 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 = 21r_1 - 4r_2 \\ r_2 = 2r_3 + 21r_3 \end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & 4 & 17 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 105 & 0 & 0 & 105 \\ 0 & 105 & 0 & 210 \\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{array}\right).$$

Poslední matici odpovídá systém rovnic

$$\begin{array}{rcl} 105x_1 \qquad\qquad\qquad & = & 105, \\ 105x_2 \qquad\quad & = & 210, \\ 21x_3 & = & 63. \end{array}$$

Jeho řešením dostáváme hledaný vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4.5. Jordanova metoda na řešení maticové rovnice A X = B

Uvažujme systém rovnic

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}, \tag{4.37}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je daná čtvercová regulární matice řádu n, $\boldsymbol{B}$ je daná matice typu (n, m) a $\boldsymbol{X}$ je neznámá matice typu (n, m).

Každý sloupec $\boldsymbol{X}(:\,,\; j)$, $j = 1, \ldots, m$, matice $\boldsymbol{X}$ je řešením systému rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(:\,,\; j) = \boldsymbol{B}(:, j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.38}$$

Máme tedy řešit m systémů rovnic (4.38) se stejnou maticí soustavy $\boldsymbol{A}$. Tyto systémy můžeme řešit najednou. K systému rovnic (4.37) přiřaďme matici rozšířenou

$$(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{B}). \tag{4.39}$$

Užitím elementárních transformací převedeme tuto matici na matici

$$(\boldsymbol{E} \,|\, \boldsymbol{C}), \tag{4.40}$$

kde E je jednotková matice. Položme

$$\boldsymbol{G} := \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{F}.$$

Matice $\boldsymbol{G}$ má tedy tvar

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{E} \,|\, \boldsymbol{R}).$$

Této matici odpovídá systému rovnic

$$\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}, \tag{4.41}$$

který je ekvivalentní se systémem (4.37). Poněvadž $\boldsymbol{E} \,.\, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$, dostáváme ze systému (4.41)

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}, \tag{4.42}$$

takže matice $\boldsymbol{R}$ je řešením systému (4.37).

Výpočet inverzní matice k regulární matici řádu n

V podkapitole 5.4 jsme ukázali, že v případě, že matice $\boldsymbol{A}$ je regulární, potom inverzní matici, označme ji $\boldsymbol{X}$, nalezneme řešením systému rovnic

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}.$$

Jde tedy o řešení systému, který je speciálním případem systému rovnic (4.37).

Převod matice $\boldsymbol{F}$ elementárními transformacemi na matici G.

Algoritmus. Předpokládejme, že proměnné $\boldsymbol{F}$ je přiřazena matice $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})$ a proměnné n je přiřazen řád matice $\boldsymbol{A}$ a proměnné m je přiřazen počet sloupců matice $\boldsymbol{B}$.

Začátek

B1 Začneme s úpravou prvního sloupce matice $\boldsymbol{F}$. Položíme

$$j := 1.$$

B2 Zvolme $p \in \{j, j+1, \ldots, n\}$, pro něž je

$$f_{p,j} \neq 0.$$

(Takové p existuje vzhledem k regulárnosti matice $\boldsymbol{A}$.) Touto volbou zvolíme p-tý řádek matice $\boldsymbol{F}$ jako hlavní pro následné eliminace. Jestliže $p = j$, je j-tý řádek hlavní a jdeme k $\mathbf{B3}$. Jestliže $p \neq j$, vyměníme navzájem $p-$tý a $j-$tý řádek matice $\boldsymbol{F}$ a jdeme k $\mathbf{B3}$.

$\mathbf{B3}$ Pro $i = 1, \ldots, n, i \neq j$, provedeme tyto úkony

$\mathbf{b1}$ Položme $i := 1$, jdeme k $\mathbf{b2}$.

$\mathbf{b2}$ Jestliže $i = j$ jdeme k $\mathbf{b4}$, jinak k $\mathbf{b3}$.

$\mathbf{b3}$ Je-li $f_{i,j} = 0$, jdeme k $\mathbf{b4}$, jinak položíme

$$\boldsymbol{F} = \mathcal{H}4(j, -f_{i,j}/f_{j,j}, i, 1)\boldsymbol{F}.$$

(Po této transformací bude $f_{i,j} = 0$.) Jdeme k $\mathbf{b4}$.

$\mathbf{b4}$ položme $i := i + 1$. Je-li $i \leq n$ jdeme k bodu $\mathbf{b2}$, jinak jdeme k bodu $\mathbf{B4}$.

$\mathbf{B4}$ Položme $j := j + 1$. Jestliže $j \leq n$, jdeme k $\mathbf{B2}$. Jinak jdeme k bodu $\mathbf{B5}$.

$\mathbf{B5}$ Původní matice $\boldsymbol{F}$ se transformovala na matici

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{D} \,|\, \boldsymbol{C}) \quad \text{kde matice } D \text{ je diagonální.}$$

Potom hledaná matice $\boldsymbol{G}$ je

$$\boldsymbol{G} := \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{E}|\boldsymbol{R}).$$

Příklad 4.9. Nalezněte inverzní matici k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Řešení. Označme $\boldsymbol{X}$ matici inverzní k matici $\boldsymbol{A}$. Předpokládáme-li, že matice $\boldsymbol{A}$ je regulární, je hledaná matice $\boldsymbol{X}$ řešením systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}.$$

Této rovnici odpovídá matice $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})$, to jest matice

$$\boldsymbol{F} = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{4.44}$$

Na matici $\boldsymbol{F}$ budeme postupně aplikovat elementární tranasformace podle nahoře popsaného algoritmu.

Položme $j := 1$. Začneme s úpravami prvního sloupce matice $\boldsymbol{F}$.

Za hlavní řádek zvolíme řádek 1.(Prvek $f_{1,1} \neq 0$.) Elementárními transformacemi typu $\mathcal{H}4$ dosáhneme toho, aby ve vzniklé matici byly prvky $f_{2,1},\ f_{3,1}$ rovny nule. Provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(1, -f_{2,1}/f_{1,1}, 2, 1)\boldsymbol{F}$, to jest transformací $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(1, 2, 2, 1)\boldsymbol{F}$ dostáváme

$$\boldsymbol{F} = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(1, -f_{3,1}/f_{1,1}, 3, 1)\boldsymbol{F}$ to jest provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(1, -4, 3, 1)\boldsymbol{F}$ dostáváme

$$\boldsymbol{F} := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Položme $j := 2$. Začneme s úpravami druhého sloupce matice $\boldsymbol{F}$.

Za hlavní řádek zvolíme řádek 2.(Prvek $f_{2,2} \neq 0$.) Elementárními transformacemi typu $\mathcal{H}4$ dosáhneme toho, aby ve vzniklé matici byly prvky $f_{1,2},\ f_{3,2}$ rovny nule. Provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(2, -f_{1,2}/f_{2,2}, 1, 1)\boldsymbol{F}$, to jest provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(2, -2/5, 1, 1)\boldsymbol{F}$ dostáváme

$$\boldsymbol{F} := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(2, -f_{3,2}/f_{2,2}, 3, 1)\boldsymbol{F}$, to jest provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(2, 5/5, 3, 1)\boldsymbol{F}$, dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Položme $j := 3$**.** Začneme s úpravami třetího sloupce matice $\boldsymbol{F}$.

Za hlavní řádek zvolíme řádek 3.(Prvek $f_{3,3} \neq 0$.) Poněvadž $f_{1,3} = 0$, provedeme jenom takovou elementární transformaci typu $\mathcal{H}4$, aby ve vzniklé matici byl prvek $f_{2,3}$ roven nule.

Provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(3, -f_{2,3}/f_{3,3}, 2, 1)\boldsymbol{F}$, to jest transformací $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(3, 10, 2, 1)\boldsymbol{F}$ dostáváme

$$\boldsymbol{F} := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -18 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Označme obdrženou matici $\boldsymbol{F}$ jako

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{D} \,|\, \boldsymbol{C}).$$

Je tedy

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

K ní inverzní maticí je matice

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Položme

$$\boldsymbol{G} := \boldsymbol{D}^{-1}\,\boldsymbol{F}.$$

Dostáváme

$$\boldsymbol{G} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{18}{5} & \frac{11}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Matici $\boldsymbol{G}$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{G} \;=\; (\boldsymbol{E}\,|\,\boldsymbol{R}).$$

Této maticí odpovídá systém rovnic

$$\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{X} \;=\; \boldsymbol{R}$$

ekvivalentní s daným systémem rovnic $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} \;=\; \boldsymbol{E}$. Je tedy hledanou inverzní maticí matice

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -\frac{18}{5} & \frac{11}{5} & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kapitola 5

Determinanty

V této kapitole se zavádí pojem determinantu čtvercové matice a způsoby jeho vyčíslení. Odvozuje se Cramerovo pravidlo na řešení systému lineárních rovnic pomocí determinantů a přímý výpočet inverzní matice.

5.1. Zavedení pojmu determinantu matice

Několik úvodních slov. Uvažujme systém dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x_1, x_2

$$\begin{aligned} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 &= b_1, \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Jestliže $a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \neq 0$, potom

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{2,2} - b_2 \cdot a_{1,2}}{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}}, \quad x_2 = \frac{b_2 \cdot a_{1,1} - b_1 \cdot a_{2,1}}{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}} \tag{5.2}$$

je řešením systému (5.1), jak se lze přesvědčit dosazením těchto hodnot za x_1, x_2 do rovnic (5.1).

Zaveďme si toto označení. Označme $\boldsymbol{C}$ matici

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Potom číslo

$$c_{1,1} \cdot c_{2,2} - c_{1,2} \cdot c_{2,1}$$

nazveme determinantem matice $\boldsymbol{C}$. Označíme jej $det(\boldsymbol{C})$, resp. $|\boldsymbol{C}|$. Tedy

$$det(\boldsymbol{C}) = det \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{vmatrix} = c_{1,1} \cdot c_{2,2} - c_{1,2} \cdot c_{2,1}.$$

Řešení (5.2) systému (5.1) lze pak pomocí determinantů zapsat takto

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}}. \tag{5.3}$$

V těchto vzorcích je jmenovatel determinantem matice soustavy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix},$$

který je dle předpokladu $\neq 0$. Čitatel ve vyjádření pro x_1 je determinantem matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ náhradou jejího prvního sloupce vektorem pravých stran

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Podobně čitatel ve vyjádření $\boldsymbol{x}_2$ je determinantem matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ náhradou jejího druhého sloupce vektorem pravých stran $\boldsymbol{b}$.

V dalším si zavedeme pojem determinantu i pro čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ libovolného řádu n. Budeme jej značit shodně jako determinanty matic řádu 2. Determinanty využijeme při řešení systému n lineárních rovnic o n neznámých. Pojem determinantu se využívá i při řešení řady jiných ekonomických úloh.

Zaveďme si nyní pojem determinantu matice.

Definice 5.1. (Determinant matice)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice. Determinantem matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme číslo, označme je $|\boldsymbol{A}|$ nebo $det(\boldsymbol{A})$, definované takto:
Je-li $n = 1$, to jest, jestliže $\boldsymbol{A} = (a_{11})$, potom $|\boldsymbol{A}| = a_{11}$.
Jestliže je již definován determinant matice řádu $n-1$, potom determinant matice řádu n definujeme takto:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1} a_{1,1} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,1}| + \ldots + \\ +(-1)^{1+k} a_{1,k} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,k}| + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1,n} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,n}|, \end{aligned} \tag{5.4}$$

kde $\boldsymbol{A}_{i,j}$ je matice (jak jsme si to již dříve zavedli), která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním jejího i–tého řádku a j–tého sloupce.

Poznámka. *Je tedy determinant matice funkce definovaná na množině všech čtvercových matic.*

Příklad 5.1. Např. je-li $\boldsymbol{A} = (-2)$, potom $|\boldsymbol{A}| = -2$.

Příklad 5.2. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Dokažme, že

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}. \tag{5.6}$$

Skutečně, podle (5.4) je

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,1}| + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2}. |\boldsymbol{A}_{1,2}| \,. \tag{5.7}$$

Zde $\boldsymbol{A}_{1,1}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním 1. řádku a 1. sloupce. Je tedy $\boldsymbol{A}_{1,1} = (a_{2,2})$, $|\boldsymbol{A}_{1,1}| = a_{2,2}$. Podobně $\boldsymbol{A}_{1,2}$ je matice vzniklá z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním jejího prvního řádku a 2. sloupce. Je tedy $\boldsymbol{A}_{1,2} = (a_{2,1})$, $|\boldsymbol{A}_{1,2}| = a_{2,1}$. Dosazením do (5.7) dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot a_{2,2} + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,1}.$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}.$$

Poznámka. *Determinant matice 2. řádu lze tedy vypočítat takto:* Od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin prvků na vedlejší diagonále.

Příklad 5.3. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Jedná se o výpočet determinantu matice 2. řádu. Podle (5.6) je $|\boldsymbol{A}| =$„součin prvků na hlavní diagonále $-$ součin prvků na vedlejší diagonále“. Tedy

$$|\boldsymbol{A}| = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5, \quad |\boldsymbol{A}| = 22.$$

Příklad 5.4. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Vypočítejme determinant z této matice.

Podle Definice 5.1 je

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,1}| + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,2}| + (-1)^{1+3} \cdot a_{1,3} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,3}|. \tag{5.9}$$

Zde $\boldsymbol{A}_{1,1}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním 1. řádku a 1.sloupce. Je tedy

$$\boldsymbol{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

takže podle (5.6) je

$$|\boldsymbol{A}_{1,1}| = a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}. \tag{5.10}$$

Matice $\boldsymbol{A}_{1,2}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním 1. řádku a 2. sloupce. Je tedy

$$\boldsymbol{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

takže podle (5.6) je

$$|\boldsymbol{A}_{1,2}| = a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}. \tag{5.11}$$

Matice $\boldsymbol{A}_{1,3}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním 1. řádku a 3. sloupce. Je tedy

$$\boldsymbol{A}_{1,3} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix},$$

takže podle (5.6) je

$$|\boldsymbol{A}_{1,3}| = a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}. \tag{5.12}$$

Dosadíme-li do (5.9) za $|\boldsymbol{A}_{1,1}|$, $|\boldsymbol{A}_{1,2}|$, $|\boldsymbol{A}_{1,3}|$ vypočítané hodnoty (5.10), (5.11), (5.12), dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1,1} \cdot (a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}) - a_{1,2} \cdot (a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}) + \\ + a_{1,3} \cdot (a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}). \quad (5.13)$$

Odtud dostáváme po úpravě

$$|\boldsymbol{A}| = (a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3} + a_{3,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3}) - \\ - (a_{3,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{1,3} + a_{1,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{2,3} + a_{2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{3,3}). \quad (5.14)$$

Odtud dostáváme následující pravidlo–„Sarusovo pravidlo“ pro vyčíslení determinantu matice řádu 3.

Pozor!!

Poznámka. *Je nutno si uvědomit, že Sarusovo pravidlo bylo odvozeno pro determinanty matic 3. řádu. Pro matice vyšších řádů není obdoba Sarusova pravidla.*

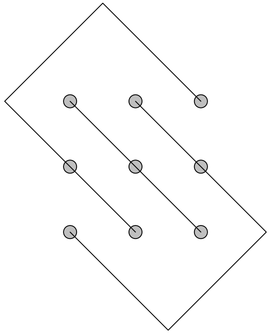
Sarusovo pravidlo. *Podle příkladu 5.4 se vypočítá hodnota determinantu matice* $\boldsymbol{A}$ *řádu* $n = 3$ *vztahem*

$$|\boldsymbol{A}| = S_1 - S_2, \tag{5.15}$$

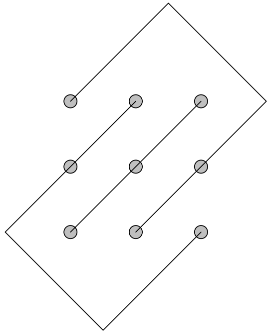
kde

$$\begin{aligned} S_1 &= a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3} + a_{3,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3}, \\ S_2 &= a_{3,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{1,3} + a_{1,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{2,3} + a_{2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{3,3}. \end{aligned}$$

Vidíme, že S_1 *je součtem tří členů, každý z nich je součinem tří prvků matice* $\boldsymbol{A}$*. Na následujícím obrázku 5.1 jsou prvky matice vyznačeny kroužky a každá trojice prvků, jejichž součin je členem v* S_1*, je propojena čarou.*
S_2 *je součtem tří členů, každý z nich je součinem tří prvků matice* $\boldsymbol{A}$*. Na následujícím obrázku 5.2 jsou prvky matice vyznačeny kroužky a každá trojice prvků, jejichž součin je členem v* S_2*, je propojena čarou.*



Obrázek 5.1: S_1



Obrázek 5.2: S_2

Příklad 5.5. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

užitím Sarusova pravidla.

Řešení. Hledejme tedy hodnotu determinantu

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Podle Sarusova pravidla dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = [5\cdot 4\cdot 7 + (-2)\cdot(-2)\cdot(-3) + 2\cdot 6\cdot 3] - [3\cdot 4\cdot(-3) + (-2)\cdot 6\cdot 5 + (-2)\cdot 2\cdot 7].$$

Úpravou dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = [140 - 12 + 36] - [-36 - 60 - 28],$$

takže $|\boldsymbol{A}| = 288$.

Příklad 5.6. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Řešení. Podle (5.4) dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

Hodnotu každého z těchto determinantů matic řádu 3 určíme užitím Sarusova pravidla. Dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot 60 - 2 \cdot 20 - 1 \cdot (-20) - 3 \cdot (-20),$$

takže $|\boldsymbol{A}| = 100.$

5.2. Výpočet determinantu rozvojem podle libovolného řádku, resp. sloupce

Napřed uveďme několik vlastností determinantů čtvercových matic.

Věta 5.1.

Nechť $i \neq j$ jsou indexy řádků čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ a nechť $\boldsymbol{B}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vzájemnou vyměnou jejího $i-$ tého řádku s $j-$tým řádkem. Potom platí

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|$$

Věta 5.2.
Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu $n \geq 1$. Nechť její $i-$tý řádek (sloupec) je stejný jako její $j-$tý řádek (sloupec), $i \neq j$. Potom $|\boldsymbol{A}| = 0$.

Důkaz. Skutečně. Označme $\boldsymbol{B}$ matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ výměnou obou stejných řádků (sloupců) matice $\boldsymbol{A}$. Je tedy $\boldsymbol{A} =\boldsymbol{B}$, takže $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$. Poněvadž matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ výměnou dvou jejich řádků (sloupců) je $|\boldsymbol{A}|$ =- $|\boldsymbol{B}|$. To je možné jen v případě, že $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.

Příklad 5.7. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že v této matici jsou si první a třetí řádek rovny. Výpočtem se snadno přesvědčíte, že $|\boldsymbol{A}|$ =0.

Uveďme si tento příklad.Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matice $\boldsymbol{B}$ vnikla z matice $\boldsymbol{A}$ vzájemnou výměnou jejího prvního a druhého řádku. Zřejmě $|\boldsymbol{A}| = -5, \quad |\boldsymbol{B}| = 5$.e tedy ve shodě s větou (5.1), že $|\boldsymbol{A}| = -|vekB|$.

V definici 5.1 determinantu matice má její první řádek výjimečné postavení.Lze dokázat, že výpočet determinantu čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ lze provést analogickým způsobem – místo prvního řádku lze použít libovolný řádek, jak je uvedeno v následující větě. Důkaz této věty nebudeme provádět, v důkaze se využívá věta (5.1).

Věta 5.3. (Výpočet determinantu – rozvoj podle řádku.)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je libovolná matice řádu $n \geq 0$. Potom pro každé $s \in \{1, \ldots n\}$. platí

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{s+k} \cdot a_{s,k} \cdot |\boldsymbol{A}_{s,k}| \tag{5.16}$$

Výpočet pomocí tohoto vzorce nazýváme výpočtem determinantu matice $\boldsymbol{A}$ rozvojem podle s–tého řádku.

Důkaz: Důkaz nebudeme provádět. Důkaz se opírá o větu, že vzájemnou výměnou dvou řádků se změní znaménko hodnoty determinantu.

Příklad 5.8. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Poněvadž ve druhém řádku má matice $\boldsymbol{A}$ tři nulové prvky a jenom jeden nenulový prvek, provedeme výpočet determinatu dané matice rozvojem podle druhého řádku. Podle předcházející věty obdržíme

$$|\boldsymbol{A}| = -0 \cdot |\boldsymbol{A}_{2,1}| + 0 \cdot |\boldsymbol{A}_{2,2}| + 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot |\boldsymbol{A}_{2,4}| = -3 \cdot (-2) = 6.$$

Vztah mezi determinantem matice A a determinantem matice A^T.

Zabývejme se nyní vztahem mezi hodnotou determinantu matice $\boldsymbol{A}$ a matice k ní transponované $\boldsymbol{A}^T$. Dříve než uvedeme větu o vzájemném vztahu mezi determinantem matice $\boldsymbol{A}$ a determinantem matice $\boldsymbol{A}^T$, tak si uvědomte, že matice $\boldsymbol{A}^T$ je transponovaná k matici $\boldsymbol{A}$, jestliže každý i–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je i–tým sloupcem matice $\boldsymbol{A}^T$.

Lehce nahlédneme, že platí vztah

$$(\boldsymbol{A}_{i,j})^T = (\boldsymbol{A}^T)_{j,i}. \tag{5.17}$$

Doporučuji, aby jste si tento vztah sami dokázali. Abychom demonstrovali pravdivost tohoto vztahu, uveďme následující příklad.

Příklad 5.9. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že např.

$$(\boldsymbol{A}^T)_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{A}_{3,2})^T.$$

Dokažme nyní, platnost této věty.

Věta 5.4.

Nechť $\boldsymbol{A}$ *je čtvercová matice řádu* n. *Potom*

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^T). \tag{5.18}$$

Důkaz: Větu dokážeme užitím matematické indukce. Věta je evidentně správná pro matice řádu $n = 1$. Předpokládejme nyní, že věta je správná pro matice řádu n a dokažme, že je pak správná i pro matice řádu $n+1$. Nechť tedy $\boldsymbol{A}$ je matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

Označme $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^T$, takže

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \dots & \widetilde{a}_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a}_{k,n+1} & \widetilde{a}_{k,n+2} & \dots & \widetilde{a}_{k,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a}_{n+1,1} & \widetilde{a}_{n+1,2} & \dots & \widetilde{a}_{n+1,n+1} \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } \widetilde{a}_{i,j} = a_{j,i}$$

Rozvojem podle i–tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{i+k} a_{i,k} |A_{i,k}|. \tag{5.19}$$

Rozvojem podle k–tého řádku matice $\tilde{\boldsymbol{A}}$ dostáváme

$$|\tilde{\boldsymbol{A}}| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{k+i} \widetilde{a}_{k,i} |\tilde{\boldsymbol{A}}_{k,i}|. \tag{5.20}$$

Vzhledem k tomu, že $\widetilde{a}_{k,i} = a_{i,k}$ a poněvadž podle (5.17) je $(\boldsymbol{A}_{i,j})^T = (\boldsymbol{A}^T)_{j,i} = \tilde{\boldsymbol{A}}_{j,i}$, lze tento vztah přepsat na tvar

$$|\tilde{\boldsymbol{A}}| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{k+i} a_{i,k} |(\boldsymbol{A}_{i,k})^T|. \tag{5.21}$$

Poněvadž podle indukčního předpokladu je věta správná pro matice řádu n, je $|(\boldsymbol{A}_{i,k})^T| = |\boldsymbol{A}_{i,k}|$, takže

$$|\tilde{\boldsymbol{A}}| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{k+i} a_{i,k} |\boldsymbol{A}_{i,k}|. \tag{5.22}$$

Provedeme-li výpočet $|\boldsymbol{A}|$ podle (5.19) pro $i = 1,\ 2,\ \ldots, n+1$ a tyto obdržené výsledky sečteme, dostáváme

$$(n+1)|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+k} \sum_{k=1}^{n+1} a_{i,k} |\boldsymbol{A}_{i,k}|. \tag{5.23}$$

Podobně, provedeme-li výpočet $|\tilde{\boldsymbol{A}}|$ podle (5.21) pro $k = 1,\ 2,\ \ldots, n+1$ a tyto obdržené výsledky sečteme, dostáváme

$$(n+1)|\tilde{\boldsymbol{A}}| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+k} \sum_{k=1}^{n+1} a_{i,k} |\boldsymbol{A}_{i,k}|. \tag{5.24}$$

Porovnáním (5.23) a (5.24), dostáváme, že

$$det \boldsymbol{A} = det \boldsymbol{A}^T.$$

Bezprostředním důsledkem této věty je následující věta, která ukazuje způsob vyčíslení determinantu matice rozvojem podle libovolného sloupce matice.

Věta 5.5. (Výpočet determinantu – rozvoj podle sloupce)
Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice n–tého řádu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,j} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Nechť j je libovolný index jejího sloupce. Potom

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{k,j}\, |\boldsymbol{A}_{k,j}|. \tag{5.25}$$

Důkaz: Vzorec (5.25) nazýváme výpočtem determinantu matice $\boldsymbol{A}$ rozvojem podle jejího j-tého sloupce.

Příklad 5.10. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

rozvojem podle druhého sloupce.

Řešení. Dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Po vyčíslení obdržíme $|\boldsymbol{A}| = 0$.

Věta 5.6.
Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu $n \geq 1$. Nechť všechny prvky v některém jejím řádku (resp. sloupci) jsou rovny 0. Potom $|\boldsymbol{A}| = 0$.

Důkaz: Tvrzení vychází z výpočtu determinantu matice rozvojem podle řádku (sloupce), jehož všechny prvky jsou rovny 0.

5.3. Hodnota determinantu matice B vzniklé z matice A elementární transformací.

Ukažme si vztah mezi hodnotou determinantu z matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{B}$, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ některou elemntární transformací.Platí tyto věty.

Věta 5.7.

Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice $n-$tého řádu. Potom platí: Nechť $\boldsymbol{B}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vynásobením jejího $i-$tého řádku reálným číslem α tj. nechť

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}1(i,\alpha)\boldsymbol{A}, \quad kde \alpha \in \mathbb{R}$$

Potom platí

$$|\boldsymbol{B}| = \alpha|\boldsymbol{A}| \tag{5.26}$$

Slovy „determinant matice $\boldsymbol{B}$, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vynásobením jejího libovolného řádku i číslem α, má hodnotu $\alpha|\boldsymbol{A}|$ “, tj.

$$|\mathcal{T}1(i,\alpha)\boldsymbol{A}|| = \alpha|\boldsymbol{A}|.$$

Důkaz je snadný. Stačí porovnat výpočty obou determinantů matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ rozvojem podle $i-$tého řádku.

Tuto větu demonstrujme na tomto příkladě. V něm matice $\boldsymbol{B}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vynásobením prvního řádku matice $\boldsymbol{A}$ číslem „3“.

Příklad 5.11.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -6$$

Tedy $|\boldsymbol{B}| = 3|\boldsymbol{A}|$ ve shodě s nahoře uvedenou větou (5.7).

Věta 5.8.

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, i \neq j$ jsou indexy řádků matice $\boldsymbol{A}$ a nechť $\boldsymbol{B}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její $i-$tý řádek vynásobený číslem α se přičte k $j-$tému řádku vynásobenému číslem β, tj

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}2(i, \alpha; j, \beta)\boldsymbol{A}$$

Potom platí

$$|\boldsymbol{B}| = \beta|\boldsymbol{A}|$$

Slovy „Nechť $\boldsymbol{B}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její $i-$tý řádek vynásobený číslem α se přičte $j-$tému řádku vynásobenému číslem β. Potom platí“

$$|\boldsymbol{B}| = \beta|\boldsymbol{A}|.$$

Upozornění. *$i-$tý řádek v matici $\boldsymbol{B}$ je stejný jako v matici $\boldsymbol{A}$.*

Důkaz: provedeme ve dvou krocích, napřed dokážeme tuto větu pro zvláštní případ $\alpha = \beta = 1$.

1. Nechť $\boldsymbol{B_1} = \mathcal{T}2(i,1;j,1)$, tj. nechť matice $\boldsymbol{B}_1$ je matice, jejíž $j-$tý řádek je součtem $i-$tého a $j-$tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a ostatní řádky jsou stejné jak má matice $\boldsymbol{A}$. Dokažme, že v tomto případě platí $|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|$. Rozvojem $|\boldsymbol{B}_1|$ podle $j-$tého řádku dostáváme
$$|\boldsymbol{B}_1| = |\boldsymbol{B}_2| + |\boldsymbol{A}|$$
kde $\boldsymbol{B}_2$ je matice, která má $j-$tý řádek stejný jako i-tý řádek a ostatní řádky má stejné jako má matice $\boldsymbol{A}$. Je tedy $|\boldsymbol{B}_2| = 0$. Tedy $|\boldsymbol{B}_1| =$ **—$\boldsymbol{A}$—**.

2. Nechť nyní $\alpha \neq 0$. Potom matici $\boldsymbol{B}$ dostaneme z matice $\boldsymbol{A}$ postupně těmito elementárními transformacemi takto:
$$\boldsymbol{C} = \mathcal{T}1(i,\alpha)\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D} = \mathcal{T}1(j,\beta)\boldsymbol{C}, \boldsymbol{F} = T2(i,1;j,1)\boldsymbol{D}, \boldsymbol{B} = \mathcal{T}1(i,\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{D}).$$
Zřejmě $|\boldsymbol{D}| = \alpha.\beta.|\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{F}|$. Odtud $\boldsymbol{B} = \beta.|\boldsymbol{A}|$.

Příklad 5.12. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Výpočtem dostaneme $|\boldsymbol{A}| = -7$. Označme

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}2(1,3;3,2)\boldsymbol{A}$$

t.j. matici

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Výpočtem zjistíme, že $|\boldsymbol{B}| = -14$, takže skutečně $|\boldsymbol{B}| = 2|\boldsymbol{A}|$.

Následující větu jsme již sice uvedli, ale uvedeme ji ještě jednou, aby všechny tři věty týkající se výpočtu determinantu z matice vzniklé elementárními transformacemi z jiné matice byly uvedeny na jednou místě.

Věta 5.9.

Nechť $i \neq j$ *jsou indexy řádků čtvercové matice* $\boldsymbol{A}$ *a nechť* $\boldsymbol{B}$ *je matice, která vznikne z matice* $\boldsymbol{A}$ *vzájemnou vyměnou* $i-$ *tého řádku s* $j-$*tým řádkem, tj. nechť*

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}3(i\,,\,j)\boldsymbol{A}$$

Potom platí

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|$$

Slovy „Nechť $\boldsymbol{B}$ *je matice, která vznikne z matice* $\boldsymbol{A}$ *tak vzájemnou vyměnou* $i-$*tého řádku Potom* $|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|,$*“ tj.*

$$|\mathcal{T}3(i, j)| = -|\boldsymbol{A}|.$$

5.4. Výpočet hodnoty determinantu z horní schodovité matice.

Věta 5.10. (Determinant horní schodovité matice)
Nechť $\boldsymbol{B}$ je horní schodovitá matice $n-$tého řádu:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ 0 & 0 & b_{3,3} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

Potom

$$|\boldsymbol{B}| = b_{1,1} \cdot b_{2,2} \cdot \ldots \cdot b_{n,n}. \tag{5.28}$$

Důkaz: Proveďme výpočet hodnoty determinantu této matice rozvojem podle jejího prvního sloupce. Dostáváme

$$|\boldsymbol{B}| = (-1)^{1+1} \cdot b_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ 0 & b_{3,3} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Hodnotu determinantu takto vzniklé matice určíme opět rozvojem podle prvního sloupce. Dostáváme

$$|\boldsymbol{B}| = b_{1,1} \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1)^{1+1} \cdot b_{2,2} \cdot \begin{vmatrix} b_{3,3} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3,n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Tímto způsobem pokračujeme, až po n krocích obdržíme hledaný vzorec (5.28)

$$|\boldsymbol{B}| = b_{1,1} \cdot b_{2,2} \cdot \ldots \cdot b_{n,n}.$$

Příklad 5.13. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{5.29}$$

Řešení. Podle vzorce (5.28) dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 2 = 320.$$

Poznámka. Jestliže některý prvek schodovité matice $\boldsymbol{B}$ na hlavní diagonále je roven 0, potom $|\boldsymbol{B}| = 0$.

Výpočet hodnoty determinantu jejím převodem na horní schodovitou matici

Ukažme si metodu výpočtu hodnoty determinantu ze čtvercové matice řádu n převodem na horní trojúhelníkovou matici užitím elementárních transformací. (Uvažme, že horní schodovitá matice je horní trojúhelníkovou maticí.)

Ve výkladu používáme označení:
$\boldsymbol{A}$ . . . proměnná pro matici.

$\gamma \ldots$ proměnná, v níž se sleduje změna hodnoty determinantu vlivem elementární transformace.

$\boldsymbol{D}$ ... Označení hledané hodnoty determinantu

Na začátku výpočtu je proměnné $\boldsymbol{A}$ přiřazena matice, ze které máme počítat hodnotu determinantu.

Na začátku výpočtu položíme

$$\gamma := 1,$$

takže na začátku výpočtu je

$$\boldsymbol{D} = \gamma \cdot |\boldsymbol{A}|$$

Algoritmus výpočtu je podobný jako algoritmus, který jsme uvedli pro transformaci matice na schodovitý tvar. Musíme mít však na paměti, že vlivem elementární transformace se obecně změní hodnota determinantu a to takto

1. Jestliže
$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}1(i, \alpha)\boldsymbol{A}, \quad \alpha \neq 0, \quad \text{potom} \quad |\boldsymbol{A}| = \frac{1}{\alpha}|\boldsymbol{B}|$$
2. Jestliže
$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}2(i, \alpha; j, \beta)\boldsymbol{A}, \quad \beta \neq 0, \quad \text{potom} \quad |\boldsymbol{A}| = \frac{1}{\beta}|\boldsymbol{B}|$$
3. Jestliže
$$\boldsymbol{B} = \mathcal{T}3(i,\ j)\boldsymbol{A}, \quad \text{potom} \quad |\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{B}|$$

ZAČÁTEK

$$\boxed{i = 1}$$

Bod 1. Budeme vytvářet i-tý řádek hledané matice trojúhelníkového tvaru.

Bod 2. K číslu i určíme nejmenší pořadové číslo sloupce matice $\boldsymbol{A}$, v jehož řádcích $i, i+1, \ldots, m$ je alespoň jeden nenulový prvek. Toto pořadové číslo sloupce označme s_i. Je-li $s_i > i$ je hodnota determinantu $\boldsymbol{D}$ rovna nule. Výpočet je ukončen.V opačném případě jdeme k **Bod 3.**

Bod 3. Zvolme $p \in \{i, \ldots, m\}$, pro než je $a_{p,s_i} \neq 0$. (je-li takových p více, zvolíme jedno z nich).Zvolený p-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ nazveme *hlavním řádkem*.

Bod 4. Je-li $p \neq i$, vyměníme navzájem p-tý a i-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$. Zároveň změníme hodnotu proměnné γ, položíme $\gamma = -\gamma$. Tedy

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{T}3(i,p)\boldsymbol{A}, \quad \gamma := -\gamma$$

Po této výměně je i-tý řádek hlavním řádkem. Pro tuto transformovanou matici tedy platí

$$\boldsymbol{D} = \gamma \cdot |\boldsymbol{A}|$$

Je-li $p = i$, je již i-tý řádek hlavním řádkem. Výměna řádků se tedy neprovádí a neprovádí se změna hodnoty proměnné γ.

Bod 5. Provedeme nyní takové operace, aby po jejich realizaci byly prvky $a_{i+1,s_i}, \ldots, a_{m,s_i}$ rovny 0 a hodnota proměnné γ se změnila odpovídajíacím způsobem. Toho dosáhneme např.podle a) nebo podle b)

a) Pro každé $j = i+1, \ldots, n,$ pro něž $a_{j,s_i} \neq 0$ provedeme oba tyto úkony

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{T}2(i, -a_{j,s_i}\ ;\ j, a_{i,s_i})\boldsymbol{A}; \quad \gamma := \frac{1}{a_{i,s_i}}\gamma$$

nebo transformací

b) Pro ty indexy $j = i+1, \ldots, m$ pro něž $a_{j,s_i} \neq 0$, provedeme tuto transformaci $\boldsymbol{A} := \mathcal{T}2(i, \frac{-a_{j,s_i}}{a_{i,s_i}}\ ;\ j,\ 1)\boldsymbol{A}$

Bod 6. Jestliže matice $\boldsymbol{A}$ není ještě ve schodovitém tvaru, položme $i = i+1$ a přejdeme zpět na **Bod 1**. Je-li $\boldsymbol{A}$ již horní trojúhelníkovou maticí, je

$$\boldsymbol{D} = \gamma \cdot a_{1,1} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}.$$

Příklad 5.14. Vypočítejte determinant matice jejím převodem na horní trojúhelníkovou matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Položme

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnotu determinantu dané matice označme $\boldsymbol{D}$. Položme $\gamma := 1$, takže $D = \gamma \cdot \det(\boldsymbol{A})$.

$$\{\ r_1 \leftrightarrow r_3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma := \gamma \cdot (-1)$$

$$\{\ r_2 = 2r_1 + 3r_2 \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma := \gamma \cdot \frac{1}{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} r_3 = -2r_2 + 9r_3 \\ r_4 = 3r_2 - 9r_4 \end{array}\right. \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\gamma := \gamma \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{-1}{9}$$

$$\left\{ r_4 = -3r_3 + r_4 \right. \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{pmatrix} \quad \gamma := \gamma \cdot 1$$

Tím jsme dospěli k horní trojúhelníkové matici $\boldsymbol{A}$. Hodnota determinantu z této horní trojúhelníkové matici je rovna součinu diagonálních prvků, tedy $|\boldsymbol{A}| = (-3)\cdot 9\cdot 1\cdot(-36)$. Hodnota proměnné γ je rovna $(-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{9})\cdot\frac{1}{9}\cdot 1$. Je tedy

$$\boldsymbol{D} = \gamma\cdot|\boldsymbol{A}| = 4$$

5.5. Použití determinantů

Přímá metoda řešení systému lineárních rovnic.

V dřívějším výkladu jsme se seznámili s řešením systému n lineárních algebraických rovnic o n neznámých

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

jestliže matice soustavy $\boldsymbol{A}$ má hodnost n. Za tohoto předpokladu má tento systém rovnic podle Frobeniovy věty právě jedno řešení. Na řešení tohoto systému jsme si v dřívějším pojednání ukázali dvě metody – Gaussovu a Jordanovu metodu. Ukažme si nyní ještě další metodu – Crammerovo pravidlo. Touto metodou se řešení určí pomocí determinantů. Pro nalezení řešení systému n rovnic o n neznámých je nutno vyčíslit $n+1$ determinantů z matic n-tého řádu.(Pokuste se odhadnout počet aritmetických operací, které by bylo nutno provést k řešení systému např. 100 rovnic o 100 neznámých !!!). Vzhledem k velkému počtu operací potřebných k řešení systému rovnic o větším počtu neznámých, se tato metoda používá jen pro řešení menšího počtu rovnic anebo tam, kde potřebujeme řešení explicitně zapsat, aniž bychom jednotlivé determinanty počítali.

5.6. Cramerovo pravidlo

Věta 5.11. (Cramerovo pravidlo)
Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu n, $\boldsymbol{b}$ je n–rozměrný sloupcový vektor a $\boldsymbol{x}$ je hledaný sloupcový n–rozměrný vektor. Označme

$$\boldsymbol{B}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její i–tý sloupec nahradíme vektorem pravých stran, vektorem $\boldsymbol{b}$. Potom systém lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{5.30}$$

má právě jedno řešení $\boldsymbol{x}$, pro jehož složky platí

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{B}_i|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.31}$$

Důkaz. Dokažme, že vektor $\boldsymbol{x}$ o složkách

$$x_k = \frac{|\boldsymbol{B}_k|}{|\boldsymbol{A}|}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{5.32}$$

je řešením systému (5.30). Nechť j je jedno z čísel $1, \ldots, n$. Dosazením hodnot x_k do levé strany j–té rovnice vyšetřovaného systému obdržíme veličinu, kterou označíme L. Dostáváme

$$L = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x_k = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} \frac{|\boldsymbol{B}_k|}{|\boldsymbol{A}|}.$$

Rozvojem determinantu $|\boldsymbol{B}_k|$ podle k–tého sloupce dostáváme odtud

$$L = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} b_i |\boldsymbol{A}_{i,k}|.$$

Provedením úpravy pak dostáváme

$$L = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-j} b_i \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} |\boldsymbol{A}_{i,k}|. \tag{5.33}$$

Výraz (5.33) rozepíšeme na dva sčítance – pro $i = j$ a pro $i \neq j$. Je tedy

$$L = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} b_j \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} |\boldsymbol{A}_{j,k}| + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} (-1)^{i-j} b_i \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} |\boldsymbol{A}_{i,k}|. \tag{5.34}$$

Poněvadž

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} |\boldsymbol{A}_{j,k}| = |\boldsymbol{A}|, \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} |\boldsymbol{A}_{i,k}| = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j$$

dostáváme z (5.33), že $L = b_j$.Je tedy skutečně vektor $\boldsymbol{x}$ o složkách (5.31) řešením systému 5.30).

Příklad 5.15. Užitím Cramerova pravidla řešte následující systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrrcr} x_1 & + & 2x_2 & -x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & -x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & -x_3 & = & 1 \end{array} \tag{5.35}$$

Řešení. Označíme-li $\boldsymbol{A}$ matici soustavy tohoto systému, $\boldsymbol{b}$ vektor pravých stran a $\boldsymbol{x}$ vektor neznámých, je

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

Výpočtem zjistíme, že $|\boldsymbol{A}| = 6$. Je tedy matice $\boldsymbol{A}$ regulární a daný systém lze řešit Cramerovým pravidlem.
Matici $\boldsymbol{B}_1$ dostaneme tak, že první sloupec matice $\boldsymbol{A}$ nahradíme vektorem $\boldsymbol{b}$. Dostáváme

tak matici

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a determinant} \quad |\boldsymbol{B}_1| = -6.$$

Matici $\boldsymbol{B}_2$ dostaneme tak, že druhý sloupec matice $\boldsymbol{A}$ nahradíme vektorem $\boldsymbol{b}$. Dostáváme tak matici

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a determinant} \quad |\boldsymbol{B}_2| = 6.$$

Matici $\boldsymbol{B}_3$ dostaneme z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její třetí sloupec nahradíme vektorem $\boldsymbol{b}$. Dostaneme tak matici

$$\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a determinant} \quad |\boldsymbol{B}_3| = 12.$$

Řešením systému (5.35) je tedy

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{B}_1|}{6} = \frac{-6}{6} = -1,$$

$$x_2 = \frac{|\boldsymbol{B}_2|}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$
$$x_3 = \frac{|\boldsymbol{B}_3|}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

5.7. Přímý výpočet inverzní matice pomocí determinantů

V dřívějším pojednání jsme si zavedli pojem inverzní matice k dané matici $\boldsymbol{A}$. Řekli jsme, že matice $\boldsymbol{B}$ je inverzní k matici $\boldsymbol{A}$, jestliže $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$. Ukázali jsme, že jestliže čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ je regulární, potom matice $\boldsymbol{B}$, pro níž platí

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$$

je hledanou inverzní maticí. Ukázali jsme si Jordanovu metodu na řešení tohoto systému rovnic. Nyní si ukážeme metodu, kterou můžeme vypočítat inverzní matici k matici $\boldsymbol{A}$ pomocí determinantů. Při výpočtu je nutno vypočítat determinant z matice $\boldsymbol{A}$ a n^2 determinantů matic řádu $(n-1$. Metoda je založena na Cramerově pravidlu.

Nechť tedy matice $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu n. Hledejme čtvercovou matici $\boldsymbol{B}$ tak, že

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}. \tag{5.37}$$

Zvolme $i \in \{1, \ldots, n\}$. Uvažujme i–tý sloupec $\boldsymbol{B}(:, i)$ hledané matice $\boldsymbol{B}$ a i–tý sloupec $\boldsymbol{E}(:, i)$ matice $\boldsymbol{E}$. Tedy

$$\boldsymbol{B}(:, i) = \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ b_{2,i} \\ \vdots \\ b_{i-1,i} \\ b_{i,i} \\ b_{i+1,i} \\ \vdots \\ b_{n,i} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}(:, i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots i\text{–tý řádek}$$

Ze vztahu (5.37) vyplývá

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(:, i) = \boldsymbol{E}(:, i). \tag{5.38}$$

Tento systém rovnic řešme užitím Cramerova pravidla. Dostáváme

$$b_{j,i} := \frac{|\boldsymbol{C}_j|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5.39}$$

kde $\boldsymbol{C}_j$ je matice, která vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ nahrazením jejího j–tého sloupce vektorem $\boldsymbol{E}(:, i)$. Determinant $|\boldsymbol{C}_j|$ vyčíslíme rozvojem podle j–tého sloupce. Jediný nenulový prvek v tomto sloupci je číslo 1 v i–tém řádku. Tedy

$$|\boldsymbol{C}_j| = (-1)^{i+j} \cdot |\boldsymbol{A}_{i,j}|\,. \tag{5.40}$$

Z (5.39), (5.40) vyplývá

$$b_{j,i} := (-1)^{i+j} \cdot \frac{|\boldsymbol{A}_{i,j}|}{|\boldsymbol{A}|}. \tag{5.41}$$

Z (5.41) pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ dostáváme matici $\boldsymbol{B}$. Vypočtem se přesvědčíme, že

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Je tedy matice $\boldsymbol{B}$ skutečně matice inverzní k matici $\boldsymbol{A}$.

Dosažený výsledek můžeme shrnout do následující věty.

Věta 5.12. (Výpočet inverzní matice)
Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu n. Potom k matici $\boldsymbol{A}$ existuje právě jedna matice inverzní, označme ji $\boldsymbol{B}$. Její prvek $b_{i,j}$ se vypočítá podle vztahu

$$b_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{|\boldsymbol{A}_{j,i}|}{|\boldsymbol{A}|} \qquad \textit{pro } i, j = 1, \ldots n. \tag{5.42}$$

Poznámka. Všimněte si pořadí indexů i, j u $b_{i,j}$, $\boldsymbol{A}_{j,i}$ v (5.42)!

Příklad 5.16. K matici $\boldsymbol{A}$ určete matici inverzní.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení. Výpočtem dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = -5$$

$$|\boldsymbol{A}_{1,1}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1, \quad |\boldsymbol{A}_{1,2}| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -18,$$

$$|\boldsymbol{A}_{1,3}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10, \quad |\boldsymbol{A}_{2,1}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2,$$

$$|\boldsymbol{A}_{2,2}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -11, \quad |\boldsymbol{A}_{2,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 5,$$

$$|\boldsymbol{A}_{1,3}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |\boldsymbol{A}_{2,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$|\boldsymbol{A}_{3,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Tedy podle věty 5.12 dostáváme

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{|\boldsymbol{A}_{1,1}|}{|\boldsymbol{A}|} & \dfrac{-|\boldsymbol{A}_{2,1}|}{|\boldsymbol{A}|} & \dfrac{|\boldsymbol{A}_{3,1}|}{|\boldsymbol{A}|} \\ \dfrac{-|\boldsymbol{A}_{1,2}|}{|\boldsymbol{A}|} & \dfrac{|\boldsymbol{A}_{2,2}|}{|\boldsymbol{A}|} & \dfrac{-|\boldsymbol{A}_{3,2}|}{|\boldsymbol{A}|} \\ \dfrac{|\boldsymbol{A}_{1,3}|}{|\boldsymbol{A}|} & \dfrac{-|\boldsymbol{A}_{2,3}|}{|\boldsymbol{A}|} & \dfrac{|\boldsymbol{A}_{3,3}|}{|\boldsymbol{A}|} \end{pmatrix}.$$

Dosazením vypočítaných hodnot za jednotlivé determinanty dostáváme

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -18/5 & 11/5 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku správnost výpočtu provedeme výpočtem $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. Zjistíme, že oba tyto součiny jsou rovny matici $\boldsymbol{E}$.

Kapitola 6

Vztah mezi volnými a aritmetickými vektory

6.1. Zavedení volných vektorů

Zopakujme si zavedení volných vektorů z vašeho dřívějšího studia.

Definice 6.1. (Volné vektory)

Množinu všech nenulových orientovaných úseček, které mají stejný směr a stejnou velikost, nazveme nenulovým volným vektorem *a množinu všech nulových orientovaných úseček* nulovým volným vektorem.

Každá orientovaná úsečka je pak umístěním příslušného volného vektoru a reprezentuje jej. Volné vektory budeme označovat písmenem se šipkou nahoře, např. $\overrightarrow{a}$. Nulový volný vektor budeme označovat symbolem $\overrightarrow{0}$. Délku každé orientované úsečky, která reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{a}$, budeme nazývat velikostí volného vektoru $\overrightarrow{a}$ *a budeme ji značit* $|\overrightarrow{a}|$.

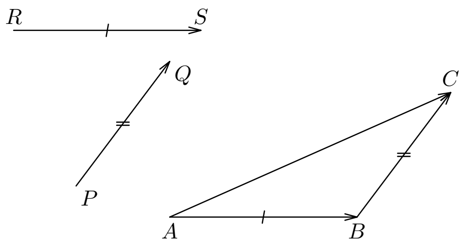
Definice 6.2. (Vektorový prostor volných vektorů)
Nechť U je množina volných vektorů. Na této množině zavedeme dvě operace – sečítání dvou volných vektorů, budeme ji značit „$+$“ a násobení volných vektorů reálnými čísly, budeme je značit „ $\cdot$ “ a to takto.

Sečítání volných vektorů. *Nechť $\overrightarrow{a}$ je volný vektor reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ a volný vektor $\overrightarrow{b}$ je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{BC}$. Potom definujeme jejich součet $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ jako volný vektor $\overrightarrow{c}$, který je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{BC}$. (viz. obr.6.1)*

Násobení volného vektoru reálným číslem. *Nechť α je libovolné reálné číslo a nechť $\overrightarrow{a}$ je libovolný volný vektor. Potom definujeme $\overrightarrow{b}=\alpha\cdot\overrightarrow{a}$ takto. Velikost $|\overrightarrow{b}|=|\alpha|\cdot|\overrightarrow{a}|$. Směr vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ je stejný; je-li $\alpha>0$, potom smysl orientace vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ je stejný, je-li $\alpha<0$, potom smysl orientace vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ je opačný.*

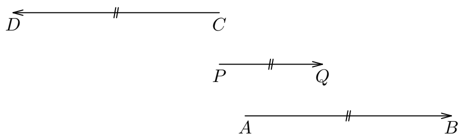
Potom množina U s takto zavedenými operacemi „+ " a „· " nazveme vektorovým prostorem volných vektorů. Budeme jej značit $\mathbb{V}$. Prostor volných vektorů v rovině budeme značit též $\mathbb{V}^2$ a prostor volných vektorů v třírozměrném prostoru budeme značit též $\mathbb{V}^3$.

Na obr. 6.1 je znázorněno sečítání dvou volných vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$ a volný vektor $\overrightarrow{b}$ je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{RS}$. Jejich součtem je volný vektor $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AC}$.



Obrázek 6.1: Sečítání volných vektorů

Na obr. 6.2 je znázorněno násobení volného vektoru $\overrightarrow{a}$ reálným číslem. Volný vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$. Volný vektor $\overrightarrow{d} = 2 \cdot \overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ a volný vektor $\overrightarrow{e} = -2 \cdot \overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{CD}$.



Obrázek 6.2: Násobení volného vektoru číslem

Volné vektory v kartézském souřadném systému v rovině. V předcházející definici jsme uvažovali volné vektory nezávisle na souřadném systému, byly uvažovány v tzv. invariantním tvaru.

Pojednejme nyní o prostoru $\mathbb{U}_2$ *volných vektorů v rovině, v níž je zaveden kartézský souřadný systém.* Označme x_1, x_2 souřadné osy kartézského souřadného systému v rovině.

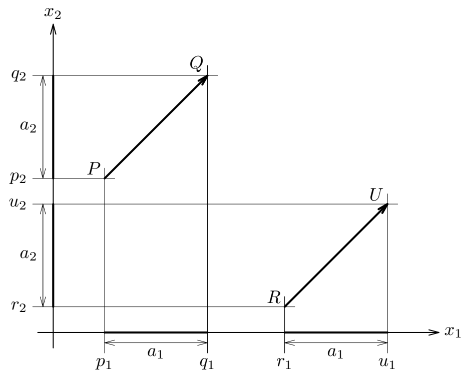
Označme $\mathbb{U}_2$ množinu všech volných vektorů v této rovině s uvedenými operacemi sečítání volných vektorů v rovině a násobení volných vektorů v rovině reálnými čísly.

Uvažujme dvě orientované úsečky $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RU}$ (viz. obr. 6.3), kde

$$P = P[p_1, p_2],\ Q = Q[q_1, q_2],\ R = R[r_1, r_2],\ U = U[u_1, u_2].$$

Každá z těchto orientovaných úseček reprezentuje tentýž volný vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_2$, když a jenom když

$$q_1 - p_1 = u_1 - r_1 \ \wedge \ q_2 - p_2 = u_2 - r_2. \tag{6.1}$$



Obrázek 6.3: Zobrazení $\mathbb{V}^2$ do $\mathbb{R}^2$

K volnému vektoru $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_2$,reprezentovanému orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$, kde

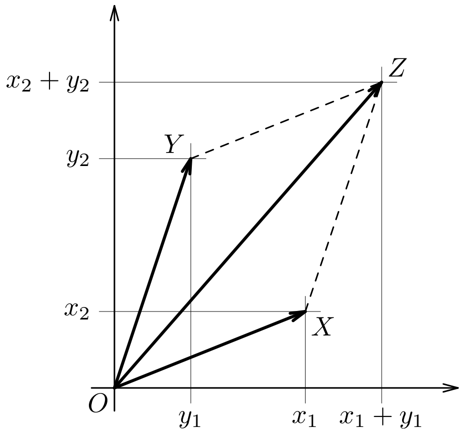
$$P = P[p_1, p_2],\ Q = Q[q_1, q_2]$$

přiřadíme aritmetický vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, kde $a_1 = q_1 - p_1,\ a_2 = q_2 - p_2$. Toto pravidlo přiřazení označme $\mathcal{P}$. Vektor $\boldsymbol{a}$ nezávisí na volbě orientované úsečky, která reprezentuje vektor $\overrightarrow{a}$.

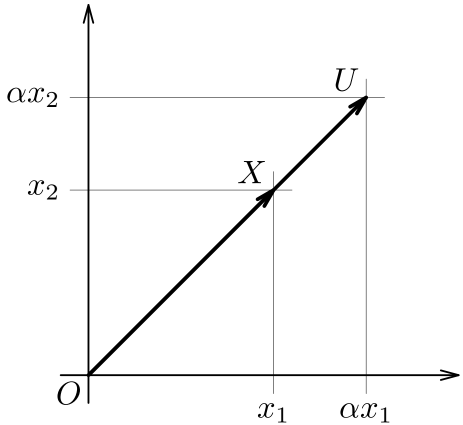
Lehce lze nahlédnout, že jestliže volnému vektoru $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_2$ je pravidlem $\mathcal{P}$ přiřazen vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in V_2$ a volnému vektoru $\overrightarrow{b} \in \mathbb{U}_2$ je pravidlem $\mathcal{P}$ přiřazen vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in V_2$ a α je libovolné reálné číslo, potom platí

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}, \quad \alpha\overrightarrow{a} = \overrightarrow{d} \Leftrightarrow \alpha\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d}, \tag{6.2}$$

kde volnému vektoru $\overrightarrow{c}$ je pravidlem $\mathcal{P}$ přiřazen aritmetický vektor $\boldsymbol{c}$ a vektoru $\overrightarrow{d}$ je pravidlem $\mathcal{P}$ přiřazen aritmetický vektor $\boldsymbol{d}$. Toto přiřazení $\mathcal{P}$ je jednoznačné.



Obrázek 6.4: Zobrazení zachovává sečítání



Obrázek 6.5: Zobrazení zachovává násobení

Vzhledem k uvedeným vlastnostem není tedy nutno dělat striktní rozdíl mezi vektorovým prostorem $\mathbb{V}_2$ a vektorovým prostorem $\mathbb{U}_2$.

Vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ si můžeme představit jako množinu všech takových orientovaných úseček $\overrightarrow{PQ}$, $P = [p_1,\ p_2]$, $Q = [q_1, q_2]$, v kartézském souřadném systému v rovině, že

$$q_1 - p_1 = a_1 \ \wedge \ q_2 - p_2 = a_2.$$

Budeme psát $\boldsymbol{a} = Q - P$. (Jde o vztah mezi souřadnicemi bodů P, Q a složkami vektoru $\boldsymbol{a}$.)

Volné vektory v kartézském souřadném systému v třírozměrném prostoru. *Uvažujme nyní prostor volných vektorů $\mathbb{U}_3$ ve třírozměrném prostoru, v němž je zaveden kartézský souřadný systém.* Uvažujme dvě orientované úsečky $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{UR}$, kde

$$\begin{aligned} P = P[p_1, p_2, p_3],\ Q = Q[q_1, q_2, q_3], \\ U = U[u_1, u_2, u_3],\ R = R[r_1, r_2, r_3]. \end{aligned}$$

Každá z těchto dvou orientovaných úseček reprezentuje tentýž volný vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_3$, když a jenom když

$$q_1 - p_1 = r_1 - u_1 \ \wedge \ q_2 - p_2 = r_2 - u_2 \ \wedge \ q_3 - p_3 = r_3 - u_3. \tag{6.3}$$

Vztah mezi prostorem $\mathbb{V}_3$ a prostorem volných vektorů v třírozměrném prostoru. K volnému vektoru $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_3$,reprezentovanému orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$, kde

$$P = P[p_1, p_2, P_3],\ Q = Q[q_1, q_2, q_3]$$

přiřadíme aritmetický vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, kde $a_1 = q_1 - p_1$, $a_2 = q_2 - p_2$, $a_3 = q_3 - p_3$.

Podobně jako ve dvojdimenzonálním prostoru lze ukázat, že vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ si můžeme představit jako množinu všech takových orientovaných úseček $\overrightarrow{PQ}$, kde $P = [p_1, p_2, p_3]$, $Q = [q_1, q_2, q_3]$ v kartézském souřadném systému v prostoru, že

$$q_1 - p_1 = a_1 \ \wedge \ q_2 - p_2 = a_2 \ \wedge \ q_3 - p_3 = a_3.$$

Není proto nutno striktně rozlišovat mezi prostorem $\mathbb{U}_3$ a $\mathbb{V}_3$.

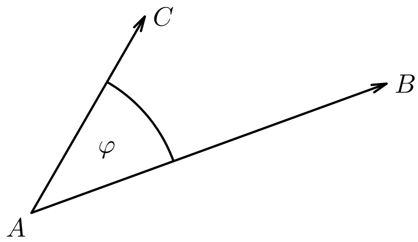
6.2. Skalární součin, norma a vzdálenost ve vektorovém prostoru

Na gymnáziu se zavádí pojem skalárního součinu dvou volných vektorů. Toto zavedení se motivuje potřebami fyziky. Skalární součin jste využívali nejen ve fyzice, ale i v analytické geometrii a to jak v úlohách s přímkami, tak i v úlohách s rovinami. Pojem skalárního součinu dvou volných vektorů a výpočet úhlu dvou nenulových volných vektorů nás bude motivovat k zavedení skalárního součinu a úhlu dvou vektorů v aritmetických vektorových prostorech. S těmito pojmy se pak můžete setkat při řešení různých aplikačních úloh. Začněme tedy s volnými vektory.

Definice 6.3.
Úhlem volných vektorů $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *rozumíme úhel*

$$\varphi \in \langle 0, \pi \rangle,$$

o který je nutno otočit orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$*, reprezentující* $\overrightarrow{a}$*, kolem bodu* A *v rovině určené body* (A, B, C) *do směru orientované úsečky* $\overrightarrow{AC}$*, reprezentující* $\overrightarrow{b}$*, kde* A *je libovolný bod (viz obr 6.6).*



Obrázek 6.6: Úhel dvou vektorů

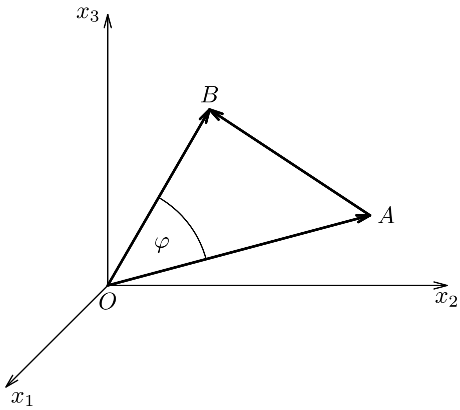
Skalární součin dvou volných vektorů. Nechť $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ jsou dva volné nenulové vektory. Potom jejich skalárním součinem rozumíme číslo (skalár), označme je $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, definované vztahem

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos(\varphi), \tag{6.4}$$

kde φ je úhel,který svírají vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Jestliže alespoň jeden z vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je nulový vektor, definujeme

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0.$$

Podívejme se nyní na pojem skalárního součinu dvou volných vektorů v kartézském souřadném systému ve třírozměrném prostoru. (Analogické úvahy je možno provést ve dvojrozměrném prostoru.) Uvažujme dva nenulové volné vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Nechť volný vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OA}$ a volný vektor $\overrightarrow{b}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OB}$, kde $O = [0, 0, 0], A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3]$. Označme φ úhel, který svírají orientované úsečky $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Na trojúhelník $\triangle(OAB)$ aplikujme kosinovou větu. Dostáváme (viz obr.6.7)



Obrázek 6.7: Odvození skalárního součinu dvou vektorů

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cos(\varphi)$$

Do tohoto vztahu dosaďme

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2},$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Úpravou dostaneme

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \cos(\varphi) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{6.5}$$

Poněvadž $\left|\overrightarrow{OA}\right| = |\overrightarrow{a}|$ a $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right|$, dostáváme odtud a z (6.4)

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{6.6}$$

Jsou-li volné vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ nenulové, lze užitím vztahů (6.4), (6.5) určit $\cos(\varphi)$ vztahem

$$\cos(\varphi) = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}. \tag{6.7}$$

Užitím (6.6) pak dostáváme

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{6.8}$$

Uvažujme nyní zobrazení $\mathcal{P}$ prostoru $\mathbb{U}_3$ na prostor $\mathbb{V}_3$, definované vztahem

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{a}) = (a_1,\ a_2,\ a_3) = \boldsymbol{a}, \quad \mathcal{P}(\overrightarrow{b}) = (b_1,\ b_2,\ b_3) = \boldsymbol{b}.$$

Vzhledem k vlastnostem zobrazení $\mathcal{P}$ a vzhledem k (6.6) definujeme skalární součin vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ v prostoru $\mathbb{V}_3$ vztahem (později definici skalárního součinu zobecníme)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{6.9}$$

a úhel φ, který svírají dva nenulové vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, vztahem

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{6.10}$$

Uvážíme-li, že $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, lze (6.10) přepsat takto

$$\cos(\varphi) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}. \tag{6.11}$$

Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1,\, a_2), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ *jsou vektory z* $\mathbb{V}_2$. *Potom jejich skalárním součinem je číslo*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 \tag{6.12}$$

Tyto vektory svírají úhel φ, *jehož kosinus je dán vztahem*

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}, \quad \textit{kde} \quad \boldsymbol{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},\, \boldsymbol{b} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \tag{6.13}$$

Podobně pro vektory z prostoru $\mathbb{V}_3$

Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *jsou vektory z* $\mathbb{V}_3$. *Potom jejich skalárním součinem je číslo*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{6.14}$$

Tyto vektory svírají úhel φ, *jehož kosinus je dán vztahem*

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}, \quad \textit{kde} \quad \boldsymbol{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},\, \boldsymbol{b} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \tag{6.15}$$

Takto zavedený pojem skalárního součinu vektorů z $\mathbb{V}_3$ *a z* $\mathbb{V}_3$ *a pojem úhlu dvou nenulových vektorů z těchto prostorů rozšíříme i pro vektory z* $\mathbb{V}_n$.

6.3. Zavedení Euklidova prostoru $\mathbb{E}_n$

Pojem vzdálenosti na množině. Nechť M je množina a nechť ke každým dvěma prvkům $x, y \in M$ je přiřazeno nezáporné číslo, označme je $\rho(x,\, y)$ tak, že pro všechna $x,\, y,\, z \in M$ platí

1. $\rho(x,\, y) \geq 0, \quad$ při čemž $\quad \rho(x,\, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
2. $\rho(x,\, y) = \rho(y,\, x)$

3. $\rho(x,\, y) \leq \rho(y,\, z) + \rho(z,\, x)$. (trojúhelníková nerovnost)

Potom $\rho(x, y)$ se nazývá vzdáleností prvků $x,\, y \in M$.

Poznámka. Množina M může být jakákoliv; např.množina všech spojitých funkcí na daném intervalu.

Nechť n je přirozené číslo, $\mathbb{R}^n$ je množina uspořádaných $n-$tic reálných čísel. Nechť ke každým dvěma prvkům $X = [x_1, \ldots x_n], Y = [y_1, \ldots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ je přiřazeno číslo $\rho(X, Y)$ vztahem $\rho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$, potom $\rho(X, Y)$ definuje vzdálenost na $\mathbb{R}^n$.

Nechť n je přirozené číslo. Označme $\mathbb{E}_n$ množinu uspořádaných $n-$tic reálných čísel z $\mathbb{R}^n$, jejíž každý prvek má dvojí význam.

Význam bodu. V tomto případě uspořádanou $n-$tici reálných čísel dáme do hranatých závorek a případně označíme symbolem, většinou velkým písmenem, např. $A = [a_1,\; \ldots\; , a_n]$. Čísla $a_i, i = 1,\; \ldots, n$, se nazývají souřadnicemi bodu A.
Význam aritmetického vektoru z prostoru $\mathbb{V}_n$, takže uspořádaná $n-$tice reálných čísel představuje aritmetický vektor. V tomto případě ji dáváme do kulatých závorek a případně označíme symbolem, většinou malým tučně napsaným písmenem, např. $\boldsymbol{a} = (a_1,\; \ldots,\; a_n)$. Čísla $a_i, i = 1,\; \ldots, n$, nazýváme složkami vektoru $\boldsymbol{a}$.
Vztah mezi body z $\mathbb{E}_n$ a vektory z $\mathbb{V}_n$ je definován následujícím způsobem. Nechť $P = [p_1, \ldots, p_n]$ je libovolný bod v $\mathbb{E}_n$, $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ je libovolný vektor z

aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$. Označme $X = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, pro nějž platí

$$x_i = p_i + s_i, \quad \text{kde} \quad i = 1, \dots, n. \tag{6.16}$$

Tento vztah budeme zapisovat též jako

$$X = P + \boldsymbol{s}. \tag{6.17}$$

Z rovnice (6.17) lze vypočíst jednoznačně kterýkoliv člen pomocí zbývajících dvou členů. Např.

$$\boldsymbol{s} = X - P. \tag{6.18}$$

Tento vztah zapíšeme též takto

$$\boldsymbol{s} = X - P = \overrightarrow{PX}$$

Budeme říkat, že uspořádaná dvojice bodů P, X tvoří umístění vektoru $\boldsymbol{s}$. Bod P nazýváme počátečním a bod X nazýváme koncovým bodem umístění vektoru $\boldsymbol{s}$. Všimněte si, že pro $n = 2$ a pro $n = 3$ určuje uspořádaná dvojice bodů P, X orientovanou úsečku, která reprezentuje volný vektor, k němuž jsme přiřadili aritmetický vektor $\boldsymbol{s}$.

Skalární součin dvou vektorů definujeme takto:

Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots b_n)$, jsou dva vektory z $\mathbb{V}_n$, potom jejich skalárním součinem rozumíme číslo $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ a značíme jej $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Je tedy

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Všimněte si, že pro $n = 2$ a pro $n = 3$ dostáváme dříve definovaný skalární součin. Vzdálenost dvou bodů $A[a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_n], B[b_1,\, b_2,\, + \cdots + b_n]$ se definuje vztahem

$$\rho(A,\, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

Vektor $\boldsymbol{a}(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_n)$ lze reprezentovat uspořádanou dvojici bodů $\overrightarrow{OA}$, kde počáteční bod je $O = [0, \ldots,)0]$ a koncový bod je bod $A = [a_1, \ldots, a_n]$, jejichž vzdálenost je $\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$. Proto velikost vektoru $\boldsymbol{a}$ budeme definovat jako

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Úhlem dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1,\, b_2,\, \ldots\, b_n)$, rozumíme úhel φ, pro nějž platí

$$cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}\|}$$

Tento prostor $\mathbb{E}_n$ nazveme $n-$rozměrným euklidovským prostorem.

Poznámka. Prostory $\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2$, $\mathbb{E}_3$, jste probírali na gymnáziích a dovedte si je představit. **Smyslová představa prostorů $\mathbb{E}_n$ pro $n > 3$ končí a musíme tyto prostory uvažovat jen ve smyslu definic.**

Příklad 6.1. Nechť $A = [1, -2, 3, 0]$, $B = [7, 1, 2, 3]$. Potom

$$\boldsymbol{s} = \overrightarrow{AB} = [7, 1, 2, 3] - [1, -2, 3, 0] = (6, 3, -1, 3).$$

Definice 6.1.

Nechť $P \in \mathbb{E}_n$ a nechť ${}^{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{s}, \ldots, {}^{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{s}$ jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru $\mathbb{V}_n$. Potom množina bodů X z $\mathbb{E}_n$

$$X = P + {}^{1}t\, {}^{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{s} + \ldots + {}^{d}t\, {}^{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{s}, \tag{6.19}$$

kde ${}^{1}t, \ldots, {}^{d}t$ jsou parametry (libovolná čísla), se nazývá podprostorem dimenze d vnořeným do prostoru $\mathbb{E}_n$ (pro $d < n$).

Přímka

Lineární podprostor dimenze 1 vnořený do prostoru $\mathbb{E}_n$ nazýváme přímkou.

Přímku, určenou bodem P a vektorem $\boldsymbol{s}$ lze tedy zapsat ve tvaru

$$X = P + t\boldsymbol{s}, \quad \text{kde } t \in (-\infty, \infty) \text{ je parametr,} \tag{6.20}$$

X je obecný bod přímky. Vektor $\boldsymbol{s}$ nazýváme směrovým vektorem přímky.

Příklad 6.2. Napišme v $\mathbb{E}_3$ rovnici přímky danou bodem $A = [2, -1, 3]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{s} = (2, -3, 0)$.

Řešení. Podle (6.20) dostáváme

$$[x_1, x_2, x_3] = [2, -1, 3] + t(2, -3, 0),$$

takže obecným bodem přímky je bod o souřadnicích

$$x_1 = 2 + 2t, \quad x_2 = -1 - 3t, \quad x_3 = 3, \quad \text{kde } t \in (-\infty, \infty).$$

Příklad 6.3. Napišme v $\mathbb{E}_4$ rovnici přímky danou body $A = [2, -1, 3, 2]$, $B = [1, 0, -5, 2]$.

Řešení. Za směrový vektor hledané přímky lze zvolit vektor $\boldsymbol{s} = B - A$. Je tedy $\boldsymbol{s} = B - A$. Výpočtem pak dostáváme

$$(s_1, s_2, s_3, s_4) = [1, 0, -5, 2] - [2, -1, 3, 2],$$

takže

$$\boldsymbol{s} = (-1, 1, -8, 0).$$

Podle (6.20) je tedy

$$X = A + t\boldsymbol{s},$$

takže dosazením dostáváme

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [2, -1, 3, 2] + t(-1, 1, -8, 0), \quad \text{kde } t \in (-\infty, \infty).$$

Přímka, určená body A, B, má tedy rovnici

$$X = A + t(B - A), \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{6.21}$$

Úsečkou $\overline{AB}$ rozumíme body přímky (6.21), pro něž platí

$$X = A + t(B - A), \quad t \in \langle 0, 1\rangle. \tag{6.22}$$

Všimněte si, že parametru $t = 0$ odpovídá bod A a parametru $t = 1$ odpovídá bod B.

Rovina

Lineární podprostor dimenze 2, vnořený do prostoru $\mathbb{E}_n$, $n > 2$, nazýváme rovinou.

Rovinu, určenou bodem P a nezávislými vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ lze tedy zapsat podle (6.19) ve tvaru

$$X = P + u\,\boldsymbol{r} + v\,\boldsymbol{s}, \quad \text{kde } u \in (-\infty, \infty), v \in (-\infty, \infty) \text{ jsou parametry.} \tag{6.23}$$

(Zde X je obecný bod přímky.)

Příklad 6.4. Napište rovnici roviny v $\mathbb{E}_4$, která prochází body $P = [1, 0, 2, -5]$, $Q = [4, 2, -7, 0]$, $R = [0, 4, 2, 6]$.

Řešení. Položme

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{PQ}, \quad \boldsymbol{s} = \overrightarrow{PR}$$

Dostáváme

$$\boldsymbol{r} = (3, 2, -9, 5), \quad \boldsymbol{s} = (-1, 4, 0, 11).$$

Dosazením do (6.23) dostáváme hledanou rovnici roviny

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [1, 0, 2, -5] + u\,(3, 2, -9, 5) + v\,(-1, 4, 0, 11),$$

kde $u, v \in (-\infty, \infty)$.

Nadrovina v prostoru $\mathbb{E}_n$

Podprostor dimenze $n-1$, vnořený do prostoru $\mathbb{E}_n$, $n > 3$, nazýváme nadrovinou. *Nechť $P \in \mathbb{E}_n$ a nechť ${}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{s}, \ldots, {}^{(\boldsymbol{n-1})}\boldsymbol{s}$ jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru $\mathbb{V}_n$. Potom množina bodů X z $\mathbb{E}_n$, určených vztahem*

$$X = {}^{1}t\,{}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{s} + \ldots + {}^{(n-1)}t\,{}^{(\boldsymbol{n-1})}\boldsymbol{s}, \tag{6.24}$$

kde ${}^{1}t, \ldots, {}^{(n-1)}t$ jsou parametry, je nadrovinou v prostoru $\mathbb{E}_n$. Lze dokázat, že každou nadrovinu v prostoru $\mathbb{E}_n$ danou vztahem (6.24) lze vyjádřit ve tvaru

$$a_1\,x_1 + \ldots + a_n\,x_n = b, \tag{6.25}$$

kde $a_1\ \ldots, a_n, b$ jsou reálná čísla. Vektor $\boldsymbol{n} = (a_1, \ldots\, a_n)$ je kolmý na vektory ${}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{s}, \ldots, {}^{(\boldsymbol{n-1})}\boldsymbol{s}$.

Nechť

$$a_1\,x_1+\ldots+a_n\,x_n=b, \tag{6.26}$$

je nadrovinou v prostoru $\mathbb{E}_n$. *Tato nadrovina určuje v prostoru* $\mathbb{E}_n$ *dva poloprostory, určené nerovnicemi*

$$a_1\,x_1+\ldots+a_n\,x_n>b,\;\; a_1\,x_1+\ldots+a_n\,x_n<b.$$

Kapitola 7

Pojem funkce, základní pojmy

7.1. Množina, konstanta, proměnná

V matematice se pracuje s různými objekty. Těmto objektům se vedle názvu přiřazuje také symbol.

Množina. Jedním ze základních objektů, s nimiž se v matematice pracuje, je *množina*.

Množinou rozumíme soubor nějakých přesně vymezených, navzájem odlišných objektů, kterým říkáme *prvky*, nebo *elementy* množiny. Při tom o každém objektu se musí dát rozhodnout, zda patří nebo nepatří do tohoto souboru. Mezi množiny počítáme i soubor, který neobsahuje žádný prvek – této množině budeme říkat *prázdná množina* a budeme ji značit $\emptyset$. Jako příklad množiny je možno uvést množinu přirozených čísel. Do této množiny patří např. číslo 2. Nepatří do ní např. komplexní číslo i.

Všimněme si, že zde pojem množina nebyl plně vymezen. K jeho vysvětlení jsme použili příbuzný pojem „soubor".

Označíme-li uvažovanou množinu např. A, potom okolnost, že objekt x patří do množiny A, budeme značit $x \in A$ a okolnost, že objekt y nepatří do množiny A, budeme značit $y \notin A$.

Množiny můžeme zadávat různým způsobem. Je-li konečná, to jest, má-li konečný počet prvků, lze ji zadat výčtem. Tak například, jestliže množina A obsahuje prvky a, b, c a žádné jiné, bývá zvykem ji zapisovat takto

$$A = \{a,\ b,\ c\}.$$

Příklad 7.1. Nechť M je množina písmen obsažených ve slově *PRAHA*. Zřejmě

$$M = \{P,\ R,\ A,\ H\}.$$

Potom např. $R \in M,\ u \notin M$.

Podmnožina. Nechť $M,\ N$ jsou dané množiny. Jestliže každý prvek množiny M je i prvkem množiny N, potom říkáme, že množina M je podmnožinou množiny N, nebo že množina N je nadmnožinou množiny M. Píšeme pak $M \subseteq N$, resp. $N \supseteq M$.

Jestliže zároveň platí $M \subseteq N$ a $M \supseteq N$, potom říkáme, že množiny M, N se sobě rovnají a píšeme $M = N$. Jestliže $M \subseteq N$ a jestliže množina N obsahuje prvky, které do množiny M nepatří, říkáme, že množina M je vlastní podmnožinou množiny N a píšeme $M \subset N$, resp. N je vlastní nadmnožinou M a píšeme $N \supset M$. Je-li tedy $M \subset N$, je též $M \subseteq N$, avšak je-li $M \subseteq N$ nemusí být $M \subset N$.

Příklad 7.2. Nechť $M = \{1, 4, 3, 9\}$. Potom $\{1, 3\} \subset M$, avšak $\{3, 7\}$ není podmnožinou množiny M, neboť prvek 7 není prvkem M.

Všimněmě si dvou významově i formálně odlišných zápisů. Uveďme příklad. Nechť $M = \{1, 4, 3, 9\}$. Potom zápis $8 \in M$ znamená, že 8 je prvkem množiny M, a zápis $\{8\} \subset M$ znamená, že množina, obsahující jediný prvek 8, je vlastní podmnožinou množiny M.

Konstanta, proměnná. Řekli jsme si, že objekty označujeme symboly. To jednak zjednodušuje vyjadřování, jednak umožňuje stručný zápis některých výpovědí o objektech množiny.

Jestliže symbol označuje jeden konkrétní prvek množiny, nazýváme jej **konstantou.** Příkladem je např. symbol π, kterým označujeme konkrétní reálné číslo – Ludolfovo číslo.

Označuje-li symbol kterýkoliv prvek z dané množiny, nazýváme jej **proměnnou**. Množinu konstant, kterých může tato proměnná nabývat, nazýváme **oborem proměnné**. Chceme-li pracovat s prvky množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$, můžeme zvolit např. symbol n pro proměnnou s oborem hodnot $\mathbb{N}$. Jestliže tedy označíme symbolem x proměnnou s oborem M, potom vše, co se řekne o x, vztahuje se na každý prvek množiny, která je jejím oborem.

Uveďme si tento příklad. Označme M množinu všech kladných reálných čísel menších než 8. Mohu vyslovit tvrzení: „Jestli $x \in M$, potom $x^2 < 64$“.

Kontrolní otázky

1. Co je to množina?

2. Napište množinu A, jejíž prvky jsou písmena obsažená ve slově „matematika“. a) Pro každé z písmen „a, b, c, i, j“ zapište, zda patří nebo nepatří do množiny A. b) Napište podmnožinu B množiny A, obsahující všechny samohlásky množiny A. c) Co znamenají zápisy $B \subset A$, $B \subseteq A$. [a) $A = \{m, a, t, e, i, k\}$, $a \in A$, $b \notin A$, $c \notin A$, $i \in A$, $j \notin A$; b) $B = \{a, e, i\}$; c) B je vlastní podmnožinou množiny A; B je podmnožinou množiny A.]

3. Vysvětlete rozdíl mezi konstantou a proměnnou. Uveďte příklady.

4. Co je to obor proměnné?

7.2. Zobrazení.

Zopakujme si důležitý pojem „**zobrazení**“. S tímto pojmem se v denním životě neustále setkáváme, aniž bychom jej vyslovovali. Přiřazení prvků jedné množiny k prvkům druhé množiny se specifickými vlastnostmi se nazývá zobrazením. Zvláštním případem zobrazení je pak reálná funkce reálné proměnné.

Definice 7.1. (Zobrazení.)

Nechť A, B jsou neprázdné množiny. Pravidlo F, jimž ke každému prvku $x \in A$ je *přiřazen právě jeden prvek* $y \in B$, nazýváme **zobrazením množiny** A **do množiny** B. Označíme-li x proměnnou s oborem A a y proměnnou s oborem B, píšeme

$$y = F(x).$$

O prvku y, přiřazenému v zobrazení F k prvku x, říkáme, že je obrazem prvku x, a o prvku x říkáme, že v zobrazení F je vzorem prvku y.

Množinu A (to jest množinu prvků, k nimž v zobrazení F přiřazujeme prvky z B), nazýváme *definičním oborem nebo též neodvislým oborem* zobrazení F. Značíme jej často D_F, resp. $D(F)$ a množinu B nazýváme *odvislým oborem zobrazení* F.

Podmnožinu množiny B, která obsahuje všechny ty prvky $y \in B$, která jsou v zobrazení

F přiřazany k prvkům x z množin A, nazýváme *oborem zobrazení* F. Značíme ji $H(F)$, resp. H_F.

Jestliže $H_F \subseteq B$, potom říkáme, že zobrazení F je **zobrazením množiny** A **do** B.

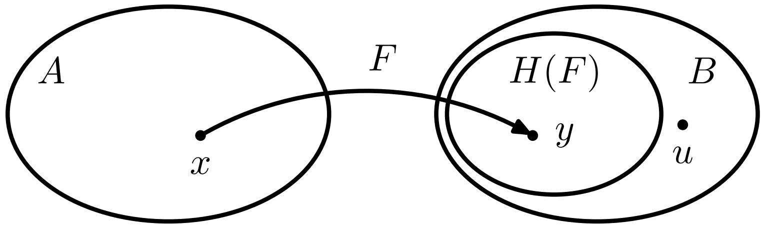
Jestliže $H_F = B$, potom říkáme, že zobrazení F je **zobrazením množiny** A **na** B.

Jestliže $B \subseteq A$, potom říkáme, že zobrazení F je **zobrazením množiny** A **do sebe**.

Jestliže $H_F = A$, říkáme, že zobrazení F je **zobrazením množiny** A **na sebe**.

Proměnnou s oborem hodnot A nazýváme **neodvisle proměnnou** a proměnnou s oborem hodnot B nazýváme **závisle proměnnou**. V této definici jsme použili symbol x pro neodvisle proměnnou a symbol y pro odvisle proměnnou.

Na obrázku 7.1 je znázorněno zobrazení F množiny A do množiny B, rovněž je znázorněn obor zobrazení F, to jest množina $H(F)$. Je zde znázorněn též prvek $u \in B$, který nepatří do $H(F)$. Není tedy obrazem žádného prvku $x \in A$.



Obrázek 7.1: Zobrazení A do B

V některých případech je možno přiřazení G, v němž je ke každému prvku z množiny A přiřazen prvek z množiny B, popsat tabulkou utvořenou takto: V prvním řádku tabulky se uvádějí prvky z množiny A a v druhém řádku jsou pod nimi uvedeny k nim přiřazené prvky z množiny B . Ne každé pravidlo, jimž je **ke každému prvku** $x \in A$ přiřazen prvek z B, je zobrazením. Toto přiřazení je zobrazením A do B pouze tehdy, jestliže **ke každému** $x \in A$ je přiřazen **právě jeden** prvek $y \in B$.

Příklad 7.3. Nechť A je množina určité skupiny studentů, B množina reálných nezáporných čísel. Označme x proměnnou množiny A, (to jest x je symbol, který zastupuje kteréhokoliv studenta ze skupiny A). Označme nyní y proměnnou s oborem hodnot B. Ke každému $x \in A$ (to jest, ke každému studentovi z A), přiřaďme jeho aktuální tělesnou výšku v centimetrech, tedy číslo y z množiny B. (Tedy právě jedno číslo.) Toto pravidlo přiřazení označíme V. Ke každému $x \in A$ jsme tedy přiřadili právě jedno číslo y z množiny B. Je tedy V zobrazením množiny A do množiny B

podle nahoře uvedené definice. Zobrazení V není zobrazením množiny A na množinu B, poněvadž existují čísla v B, která nejsou přiřazena v zobrazení V k žádnému prvku x z množiny A. (To vyplývá např. z toho, že A je konečná množina a B obsahuje nekonečně mnoho čísel.)

Jako konkrétní přiřazení uveďme toto. Předpokládejme, že A je skupina studentů, které si pro náš účel označíme a, b, c. Ke každému studentovi přiřaďme jeho tělesnou výšku. Toto přiřazení označme V. Nechť je $V(a) = 175$, $V(b) = 175$, $V(c) = 180$. Toto přiřazení lze znázornit následující tabulkou.

x	a	b	c
y	175	175	180

Uvedené přiřazení V je zobrazením množiny A do množiny $\mathbb{R}$, poněvadž ke každému prvku $x \in A$ je přiřazen právě jeden prvek y z množiny $\mathbb{R}$. Toto zobrazení však není zobrazením množiny A na množinu $\mathbb{R}$, poněvadž např. číslo 190 není přiřazeno žádnému prvku z A. (V uvažované skupině tří studentů není žádný student s tělesnou výškou $190\,\mathrm{cm}$.) Toto zobrazení je však zobrazením množiny A na množinu $C = \{175, 180\}$. Zřejmě $C = H_V$.

Příklad 7.4. Uvažujme tři matky, označme je a, b, c. Nechť matka a má syna, označme ho s_1, matka b má syna, označme ho s_2 a matka c má dva syny, označme je s_3 a s_4. Označme A množinu matek, tedy $A = \{a, b, c\}$ a B množinu synů, tedy $B =$

$\{s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4\}$. Označme nyní D přiřazení, kterým ke každé matce přiřadíme každého z jejich synů. Tedy nechť $D(a) = s_1,\ D(b) = s_2,\ D(c) = s_3,\ D(c) = s_4$. Toto přiřazení D znázorněme tabulkou

x	a	b	c	c
y	s_1	s_2	s_3	s_4

Toto přiřazení **není** zobrazením množiny A do množiny B, neboť k prvku c z množiny A jsou přiřazeny dva prvky z množiny B, totiž prvky s_3, s_4.

Zaveďme si několik pojmů souvisejících se zobrazením.

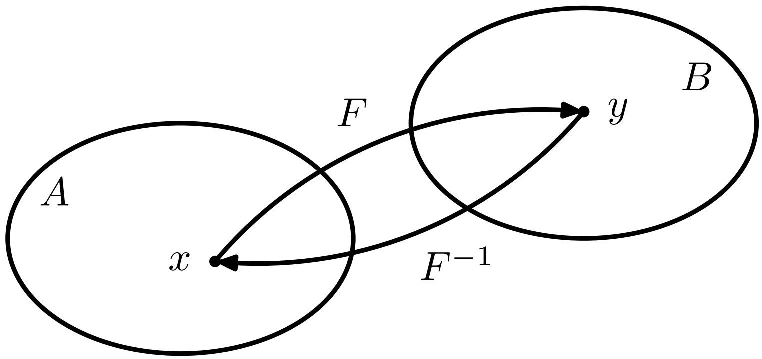
Zobrazení prosté. *Nechť F je zobrazení množiny A do množiny B. Toto zobrazení nazýváme* **prostým**, *jestliže má tuto vlastnost: Jestliže $x, y \in A$ a $x \neq y$, potom $F(x) \neq F(y)$.*

Příklad 7.5. Nechť $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Zobrazení F dané následující tabulkou je prostým zobrazením A na B.

x	a	b	c
y	α	β	γ

Inverzní zobrazení. *Nechť F je* **prosté zobrazení množiny** A **na množinu** B. *Potom existuje zobrazení, nazveme ho* **inverzním zobrazením** *množiny B na množinu A a označíme je F^{-1}, kterým ke každému $y \in B$ přiřadíme ten prvek $x \in A$, pro nějž platí $F(x) = y$. (Viz obr.7.2)*

Označení. Symbolem F^{-1} jsme označili inverzní zobrazení k zobrazení F, nejedná se o umocnění zobrazení F na číslo (-1).



Obrázek 7.2: Inverzní zobrazení

Příklad 7.6. Nechť zobrazení F množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$ na množinu $B = \{\phi, \varphi, \chi, \psi\}$ je dáno tabulkou :

x	1	2	3	4
y	ϕ	φ	χ	ψ

Tedy $F(1) = \phi$, $F(2) = \varphi$, $F(3) = \chi$, $F(4) = \psi$. Toto zobrazení je prosté zobrazení množiny A na množinu B. Existuje proto k němu inverzní zobrazení, označme je F^{-1}. V tomto zobrazení platí $F^{-1}(\phi) = 1$, $F^{-1}(\varphi) = 2$, $F^{-1}(\chi) = 3$, $F^{-1}(\psi) = 4$. Toto inverzní zobrazení lze popsat tabulkou.

y	ϕ	φ	χ	ψ
x	1	2	3	4

V tomto inverzním zobrazení je množina B neodvislým oborem a množina A je odvislým oborem.

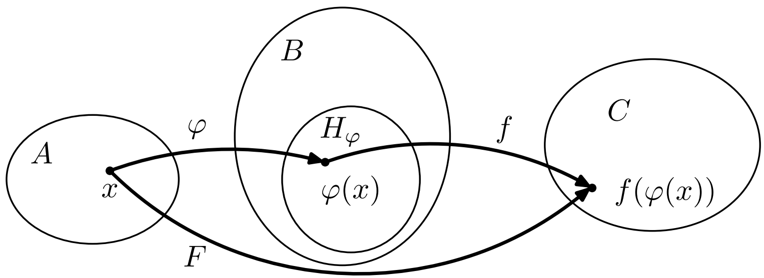
Všimněte si, že v tabulce popisující toto inverzní zobrazení, je neodvisle proměnná označena y (zastupuje kterýkoliv prvek z B) a závisle proměnná je označena x (zastupuje kterýkoliv prvek množiny A). Poněvadž jsme zvyklí označovat symbolem x neodvisle proměnnou a y odvisle proměnnou, můžeme pro inverzní zobrazení zavést

- symbol x pro neodvisle proměnnou (symbol x může zastupovat kterýkoliv prvek neodvislého oboru, to jest množiny B)
- symbol y pro odvisle proměnnou (symbol y může zastupovat kterýkoliv prvek odvislého oboru, to jest množiny A)

Tabulka pro toto inverzní zobrazení má pak tvar

x	ϕ	φ	χ	ψ
y	1	2	3	4

Složené zobrazení. *Nechť* φ *je zobrazení množiny* A *do množiny* B. *Nechť funkce* f *zobrazuje množinu* H_φ *do množiny* C. *Potom zobrazení, označujeme je* F, *kterým ke každému* $x \in A$ *je přiřazen prvek* $z = f(\varphi(x)) \in C$, *nazýváme* **složeným zobrazením**. *Zobrazení* φ *nazýváme jeho vnitřní složkou a zobrazení* f *nazýváme jeho vnější složkou. Píšeme* $y = F(x)$. *Je tedy* $F(x) = f(\varphi(x))$. *Viz obr. 7.3.*



Obrázek 7.3: Složené zobrazení

Příklad 7.7. Nechť $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Nechť zobrazení φ množiny A do množiny B je dáno tabulkou

x	a	b	c
$u = \varphi(x)$	α	β	α

zobrazení f množiny H_φ do množiny C je dáno tabulkou

u	α	β
$y = f(u)$	1	2

Zřejmě $H_\varphi = \{\alpha, \beta\}$.

Potom složené zobrazení $F = f(\varphi(x))$ zobrazuje A do C takto :

$$F(a) = f(\varphi(a)) = f(\alpha) = 1, \tag{7.1}$$
$$F(b) = f(\varphi(b)) = f(\beta) = 2, \tag{7.2}$$
$$F(c) = f(\varphi(c)) = f(\alpha) = 1. \tag{7.3}$$

Toto složené zobrazení F můžeme popsat následující tabulkou:

x	a	b	c
y	1	2	1

Poznamenejme, že φ je vnitřní složkou a f je vnější složkou zobrazení F.

7.3. Pojem funkce a některé její vlastnosti

Uveďme si nyní některé speciální pojmy zobrazení.V případě, že v definici 7.1 zobrazení F je B množina čísel, budeme většinou místo pojmu zobrazení používat pojem **funkce**. Pojmy svázané s pojmem zobrazení se přenáší na pojem funkce. Např. místo obor hodnot zobrazení se používá obor hodnot funkce, nebo místo pojmu prosté zobrazení se používá pojem prostá funkce, místo inverzní zobrazení se používá inverzní funkce, místo složené zobrazení se používá pojem složená funkce atd.

Příklad 7.8. Jako příklad si uveďme funkci, která vyjadřuje výsledky voleb do poslanecké sněmovny. Nechť čtyři politická seskupení, označme je a, b, c, d, získala křesla v poslanecké sněmovně, a to postupně v počtech 70, 50, 60, 20. Potom přiřazení, označme je f, kterým ke každému z politických seskupení a, b, c, d přiřadíme počet křesel, která ve volbách získalo, je reálnou funkcí. Je tedy $f(a) = 70$, $f(b) = 50$, $f(c) = 60$, $f(d) = 20$. Označíme-li $A = \{a, b, c, d\}, B = \{20, 50, 60, 70\}$, potom A je neodvislý obor funkce f a B je odvislý obor funkce f. Funkce f zobrazuje A na B. Funkce je prostá.

Jestliže v definici zobrazení F jsou množiny A, B množiny reálných čísel, mluvíme o **reálné funkci reálné proměnné**.

Příklad. Příkladem reálné funkce reálné proměnné je zobrazení množiny $A =< 1/2, \infty)$ do množiny $B =< 0, \infty)$ definované vztahem

$$y = \sqrt{2x-1}, \quad x \in A, \quad y \in B.$$

Jestliže v definici zobrazení je množina A množinou uspořádaných skupin n-reálných číslech (tedy $A \subseteq \mathbb{R}^n$) a B je množina reálných čísel, potom zobrazení F množiny A do B nazýváme **reálnou funkcí n-proměnných**. *Jestliže $X = (x_1, \dots, x_n)$ je neodvisle proměnná s oborem hodnot A a odvisle proměnnou y, potom tuto funkci můžeme zapsat jako,*

$$y = F(X), \quad \textit{resp} \quad y = F(x_1, \dots, x_n).$$

Jestliže funkce je zadaná předpisem bez udání definičního oboru, budeme jejím definičním oborem rozumět množinou všech hodnot neodvisle proměnných, pro něž má daný předpis význam.

Příkladem reálné funkce jedné proměnné je funkce $y = x^2 + 1$, kde neodvisle proměnná $x \in (-\infty, \infty)$.

Jako příklad reálné funkce dvou proměnných x_1, x_2 uveďme funkci

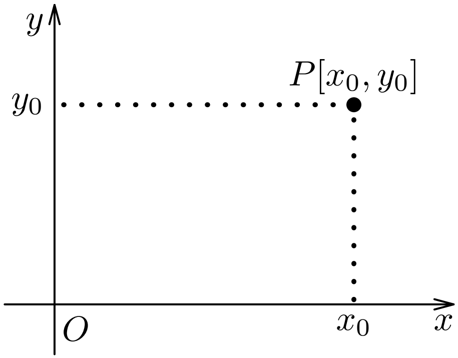
$$z = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Poněvadž zde není uveden její definiční obor, rozumíme jim (podle dohody) množinu všech bodů $[x_1, x_2]$, pro něž má výraz $\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. smysl. Je to množina $D_f = \{[x_1, x_2] : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

Graf funkce. *V matematice rozumíme grafem funkce $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$., s definičním oborem D_f, množinu všech bodů $[x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, kde $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in D_f$. Jako graf je též označována* **grafická reprezentace této množiny.**

Grafická reprezentace grafu funkce.

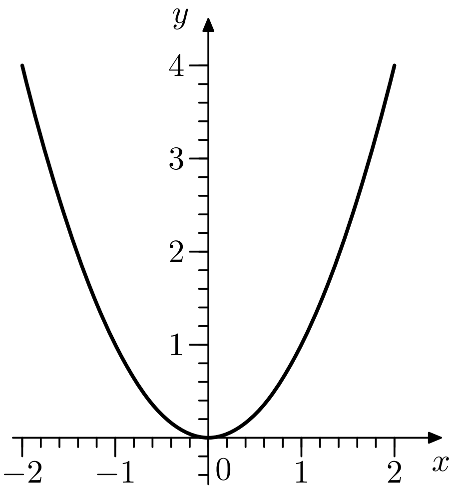
Grafickou reprezentaci grafu funkce $y = f(x)$ jedné proměnné x můžeme provést takto. V rovině zvolíme pravoúhlý souřadný systém Oxy, kde O je počátkem a x, y jsou souřadné osy (označení není závazné). Jsou to dvě navzájem kolmé číselné osy se společným bodem O, který nazýváme počátkem. Osu x budeme volit v horizontální poloze a osu y ve vertikální poloze. (Dohoda.) Kladnou orientaci osy x budeme volit zleva doprava, kladnou orientaci osy y budeme volit zdola nahoru. Měřítka na souřadných osách mohou být obecně odlišná. Jsou-li stejná, mluvíme o **kartézském souřadném systému**. Každému bodu v rovině odpovídá uspořádaná dvojice reálných čísel a naopak, každé uspořádané dvojici reálných čísel odpovídá bod v rovině. Prvnímu z této dvojice čísel říkáme x-ová souřadnice a druhému říkáme y-ová souřadnice. Na (obr.7.4) je znázorněn bod $[x_0, y_0]$.



Obrázek 7.4: Souřadnice bodu

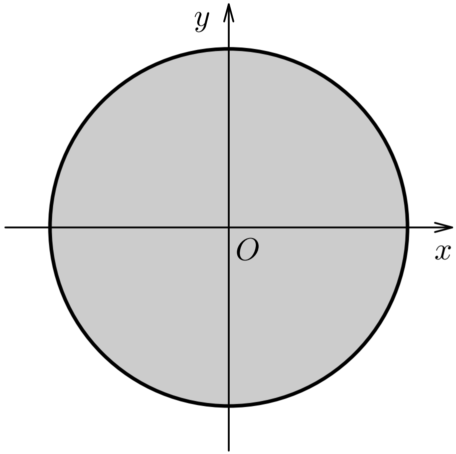
Ve zvoleném souřadném systému vykreslíme jednotlivé body grafu. Musíme mít na paměti, že při vykreslování jednotlivých bodů jsme omezeni technickými možnostmi.

Na následujícím obr.7.5 je znázorněn graf funkce $y = x^2$ definované na intervalu $\langle -2, 2\rangle$.



Obrázek 7.5: Graf paraboly $y = x^2$

Definiční obor funkce $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ je kruh se středem v bodě $[0, 0]$ o poloměru $r = 1$, znázorněný na obr.7.6.



Obrázek 7.6: Definiční obor funkce $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

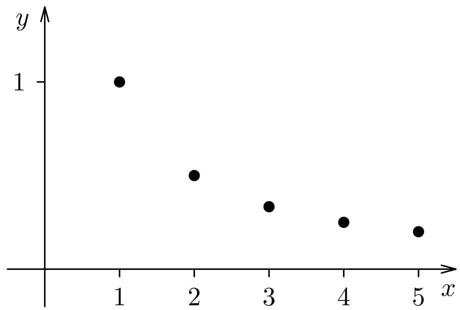
O možnostech grafické reprezentace funkcí dvou a více proměnných pojednáme později.

Posloupnost reálných čísel. *Reálnou funkci f, jejíž neodvislý obor je množina přirozených čísel, nazýváme posloupností. Je tedy posloupnost pravidlo, jimž je ke každému přirozenému číslu n přiřazen prvek z nějeké množiny B. Je-li B množina reálných čísel, mluvíme o posloupnosti reálných čísel.*

Posloupnost reálných čísel je tedy pravidlo, označme je f, kterým ke každému přirozenému číslu n je přiřazeno číslo $f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Místo $f(n)$ je u posloupností zvykem psát f_n. Číslo f_n nazýváme n-tým členem posloupnosti. Tuto posloupnost bývá zvykem zapisovat též symbolem $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, nebo stručněji $\{f_n\}_1^{\infty}$, resp.

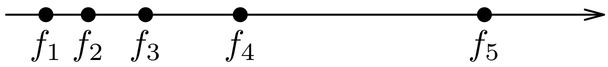
$$f_1,\ f_2,\ \ldots \tag{7.4}$$

Příklad 7.9. Jako příklad si uveďme posloupnost $\{1/n\}_1^{\infty}$. Tedy např. pátý člen této posloupnosti (pro $n = 5$) je roven $1/5$. Na následujícím obrázku obr.7.7 je znázorněno prvních pět členů posloupnosti $\{1/n\}_1^{\infty}$.



Obrázek 7.7: Posloupnost $\{1/n\}_1^{\infty}$

Často se znázorňují pouze hodnoty $f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots$ na číselné ose, která se kreslí ve vodorovné poloze. Např. na obr.7.8 je znázorněno několik členů posloupnosti $\{f_n\}_1^{\infty}$.



Obrázek 7.8: Posloupnost $\{1/n\}_1^\infty$

Kontrolní otázky

1. Co je to zobrazení F množiny A do množiny B? Co je to definiční obor zobrazení, co je to obor zobrazení?

2. Vysvětlete, co je to prosté zobrazení A na B.

3. Co je to inverzní zobrazení?

4. Co je to funkce jedné proměnné? Co je to funkce více proměnných?

7.4. Reálná funkce reálné proměnné

Pojednejme nyní soustavně o reálné funkci jedné reálné proměnné. Zopakujme si ještě jednou zavedení tohoto pojmu.

Předpokládejme, že A, B jsou neprázdné množiny reálných čísel. Potom **předpis** f, jimž ke každému prvku $x \in A$ je přiřazen právě jeden prvek $y \in B$, nazýváme reálnou funkcí reálné proměnné. Pokud nemůže dojít k omylu, budeme v dalším zkráceně mluvit jen o **funkci**. Tuto funkci f budeme většinou zapisovat takto

$$y = f(x), \qquad x \in A. \tag{7.5}$$

Množinu A nazýváme **neodvislým oborem**, proměnnou x s oborem hodnot A nazýváme neodvisle proměnnou. Množinu B nazýváme odvislým oborem. Je nutno si uvědomit, že v B mohou existovat čísla, která nejsou přiřazena žádnému číslu $x \in A$. Množinu všech těch čísel $y \in B$, která jsou přiřazena ke všem číslům $x \in A$, nazýváme oborem funkce f. Neodvislý obor funkce f nazýváme též definičním oborem, budeme jej značit $D(f)$, resp. D_f. Obor funkce budeme značit $H(f)$, resp. H_f. Zřejmě $H_f \subseteq B$. Bude-li funkce f zadaná předpisem bez udání definičního oboru, rozumí se jím množina všech těch čísel, pro něž má předpis přiřazení význam. **Jestliže $M \subseteq D_f$, potom množinu $\{f(x) : x \in M\}$ lze označit jako $f(M)$.**

V matematice označujeme většinou neodvisle proměnnou x a odvisle proměnnou y. Toto označení je nepodstatné, takže funkci (7.5)lze zapsat též např. jako

$$u = f(t), \qquad t \in A. \tag{7.6}$$

Zde neodvisle proměnná je označena t a odvisle proměnná je označena u. (Je nepodstatné označení neodvisle proměnné a odvisle proměnné; podstatným je pouze obor jejich hodnot a předpis přiřazení f.)

Uveďme si několik příkladů.

Příklad 7.10. Položme

$$y = 2x + 1, \qquad x \in \langle 1, 4\rangle. \tag{7.7}$$

Ke každému číslu $x \in \langle 1, 4\rangle$ se přiřazuje vztahem (7.7) právě jedno číslo, totiž číslo $2x + 1$. Je tedy $2x + 1$ funkce definovaná na intervalu $\langle 1, 4\rangle$. Pro pohodlnější zápis si například označme tuto funkci jako $g(x)$, takže

$$g(x) = 2x + 1.$$

Např. k číslu 3 je touto funkcí přiřazeno číslo $2 \cdot 3 + 1$, to jest číslo 7. Místo rčení „k číslu 3 je přiřazeno číslo 7“ můžeme též říci, že funkce g nabývá v bodě (čísle) 3 hodnotu 7. Píšeme pak $g(3) = 7$. Podobně $g(1{,}5) = 2 \cdot 1,5 + 1$, to jest $g(1{,}5) = 4$. Lehce nahlédneme, že oborem funkce g je interval $\langle 3, 9\rangle$. Píšeme též $g(\langle 1, 4\rangle) = \langle 3, 9\rangle$

Příklad 7.11. Položme

$$y = \sqrt{2x + 1}. \tag{7.8}$$

Předpisem (7.8) je definovaná funkce. Poněvadž není uveden její definiční obor, rozumí se jím množina všech těch čísel x, pro něž má předpis $\sqrt{2x+1}$ význam. Tedy $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \geq 0\}$. Tedy

$$D(f) = \left\langle -\frac{1}{2}, \infty\right) .$$

Příklad 7.12. Označme h funkci

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

s definičním oborem $A = (-3, -1\rangle \cup \langle 1, 3)$. Tuto funkci lze zapsat též takto

$$\begin{aligned} h : (-3, -1\rangle \cup \langle 1, 3) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\rightarrow \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

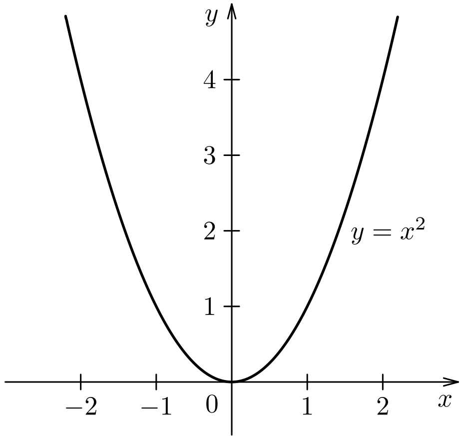
Poznámky ke grafické reprezentaci funkcí jedné proměnné

Grafickou reprezentací grafu funkce $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ v pravoúhlém souřadném systému $0xy$ rozumíme množinu všech bodů $[x, f(x)]$, $x \in A$.

Grafická reprezentace grafů většiny funkcí, které se vyskytují v ekonomických aplikacích, odpovídá intuitivnímu chápání křivky v rovině. Jako příklad si uveďme graf funkce

$$y = x^2, \qquad x \in \langle -2, 2\rangle$$

uvedený na obr. 7.9



Obrázek 7.9: Graf funkce $y = x^2$.

Grafy některých funkcí si nedovedeme vykreslit. Příkladem je funkce

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \{-1,1\} \\ x &\to \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \text{ racionální,} \\ -1, & \text{je-li } x \text{ iracionální.} \end{cases} \end{aligned}$$

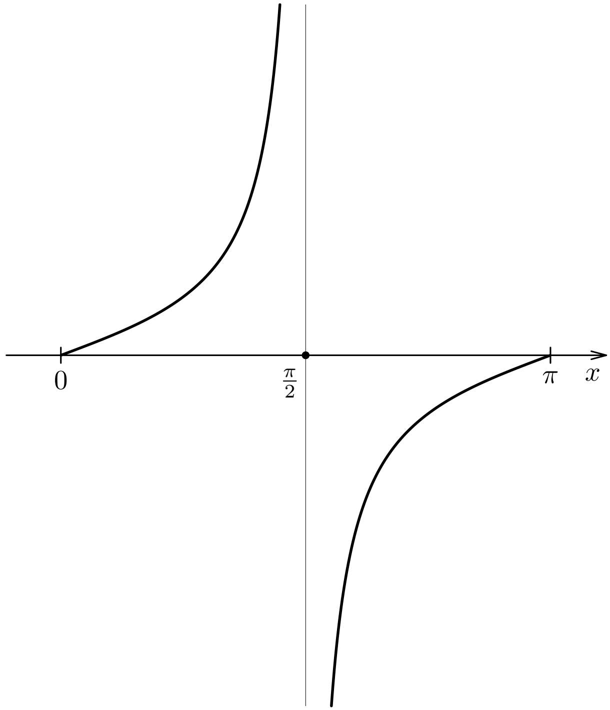
Vytvoření si představy o grafu funkce jedné proměnné.

K vytvoření si hrubé představy o grafu vyšetřované funkce $f : A \to B$ si v množině

A můžeme zvolit body $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ a v nich vypočítat funkční hodnoty $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$. Jestliže pro nějaké i je $\langle x_i, x_{i+1}\rangle \subset A$, spojíme body $[x_i, f(x_i)]$, $[x_{i+1}, f(x_{i+1})]$ úsečkou. Pro „slušné" funkce, nejsou-li vzdálebosti bodů x_i, x_{i+1} velké, nám tyto úsečky dají dobrou představu o grafu funkce. Tímto způsobem se provádí i vykreslování grafů funkcí užitím počítače pro jemné dělení intervalu, v němž graf vyšetřujeme. Na obr. 7.10 je schematický náčrtek grafu funkce $y = TG(x)$, definované na intervalu $< 0, \pi >$ takto

$$TG(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{pro } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle, \\ 0, & \text{pro } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{7.9}$$

Poznámka. Zřejmě pro $x \in < 0, \pi >, x \neq \pi/2$ je $TG(x) = \operatorname{tg}(x)$, v bodě $x = \pi/2$ není funkce $\operatorname{tg}(x)$ definovaná, avšak funkce $TG(x)$ je v bodě 0 definovaná a platí $TG(0) = 0$. Graf funkce $y = TG(x)$ je vykreslen na obr.7.10.

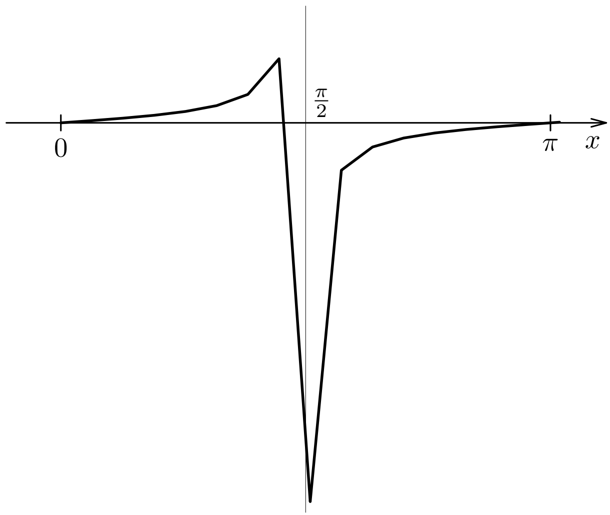


Obrázek 7.10: Graf funkce definované vztahem (7.9).

Na obr. 7.11 je graficky „znázorněna“ funkce (7.9) propojením bodů

$$[x_k, TG(x_k)], \quad \text{kde } x_k = k \cdot 0,2, \quad k = 0, \cdots, 16.$$

Porovnáním obr. 7.11 s obr. 7.10 vidíme, že došlo ke značnému zkreslení. Daná funkce není „slušná“. Je v bodě $\frac{\pi}{2}$ nespojitá. Pojem nespojitosti funkce si vysvětlíme později, zatím poznamenejme alespoň to, že hodnoty této funkce se v bodech „ velice blízkých k číslu $\frac{\pi}{2}$“ navzájem značně liší.



Obrázek 7.11: Pokus o vykreslení funkce $y = \operatorname{tg}(x)$

> *Obdržený výsledek ukazuje, že výše* uvedený postup „znázornění funkce“ není postačující, je nutno jej kombinovat s vyšetřením některých vlastností funkce.

V ekonomických rozvahách se bez pojmu funkce neobejdeme. Označování funkce a neodvisle a odvisle proměnných se většinou zavádí s ohledem na jejich význam a zvyklosti. Jako příklad funkce, která se v ekonomických aplikacích vyšetřuje, je funkce $C(x)$, která vyjadřuje vztah mezi výrobou x jednotek produkce a celkovými náklady na jejich výrobu. Tyto výrobní náklady jsou součtem fixních nákladů a nákladů variabilních, závislých na počtu x jednotek produkce. Funkce $\frac{C(x)}{x}$ se pak nazývá funkcí průměrných nákladů. Uveďme si tento příklad.

Příklad. Při kalkulaci nákladů se odhadnou fixní náklady na 300 p.j. (peněžních jednotek). Jsou to náklady, které vznikají, ať se vyrábí nebo ne. Kromě toho se zjistí, že na výrobu x jednotek je zapotřebí $4x$ p.j. Tedy variabilní náklady jsou $4x$. Celkové náklady jsou tedy

$$C(x) = 300 + 4x.$$

Tuto funkci lze pak použít k dalším úvahám, např. ke stanovení průměrných nákladů AC

$$AC = 4 + \frac{300}{x}.$$

Funkce $C(x)$ ovšem nemusí být lineární. Dále v praktických úlohách nemůže x přesáhnout jistou hodnotu K. Tedy $1 \leq x \leq K$.

Poznamenejme, že x v uvedeném příkladě značí počet jednotek produkce. Tedy x může být v konrétním případě jen přirozené číslo. *Kvůli zjednodušení zkoumané ekonomické problematiky se často používá model s proměnou x, která nabývá všech hodnot jistého intervalu reálných čísel. Tím můžeme dostat zkreslené výsledky.*

7.4.1. Funkce monotónní, funkce sudá a funkce lichá

Uveďme si nyní některé význačné třídy funkcí, to jest funkcí s některými třídě charakteristickými vlastnostmi. Začněme s *monotónními funkcemi*.

Definice 7.2.

Nechť $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je na množině A rostoucí (neklesající), jestliže

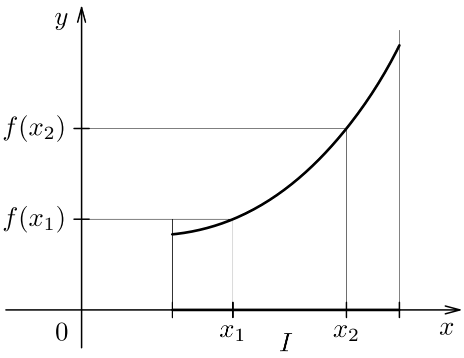
$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2), \quad (f(x_1) \leq f(x_2)). \tag{7.10}$$

Úloha. Dokažte, že funkce $y = x^3$ je na svém definičním oboru rostoucí

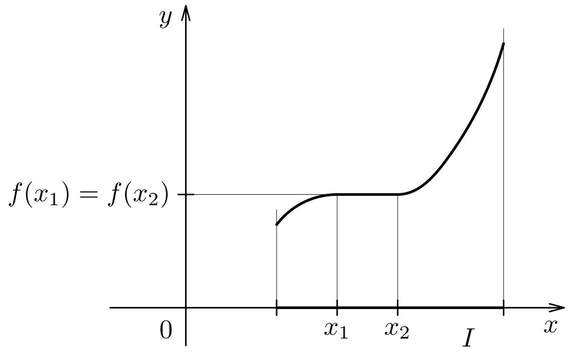
Definice 7.3.
Nechť $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je na množině A klesající (nerostoucí), jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2), \quad (f(x_1) \geq f(x_2)). \tag{7.11}$$

Na obr. 7.13 je uveden příklad grafu funkce rostoucí a na obr. 7.15 je uveden příklad grafu funkce neklesající na intervalu I.



Obrázek 7.13: Graf rostoucí funkce.



Obrázek 7.15: Graf neklesající funkce.

Funkce na obr. 7.10 je na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, je rovněž rostoucí na intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$. Není rostoucí ani na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ ani na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$. Není ani rostoucí na intervalu $(0, \pi)$. Zdůvodněte!

Funkce nerostoucí a funkce neklesající na dané množině nazýváme společným názvem **funkce monotónní**. Funkce rostoucí a funkce klesající na dané množině nazýváme společným názvem **funkce ryze monotónní**. Je-li funkce ryze monotónní, je i monotónní. Opak nemusí platit.

Funkce prostá. *Dalším důležitým pojmem je funkce prostá. Nechť $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkci f nazveme prostou na A, jestliže f má tuto vlastnost*

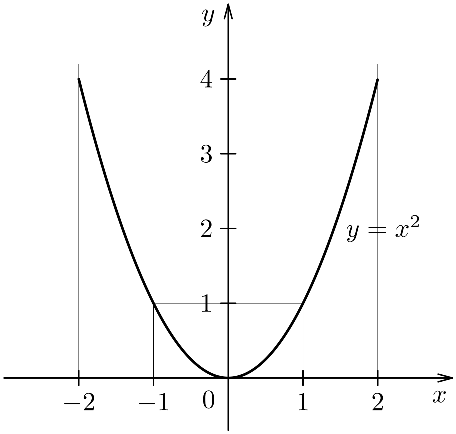
$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \text{ je } f(x_1) \neq f(x_2). \tag{7.12}$$

Příklad 7.13. Nechť funkce $y = f(x)$ je dána tabulkou

x	1	3	3,5	4	5
y	3	1	0	2	4

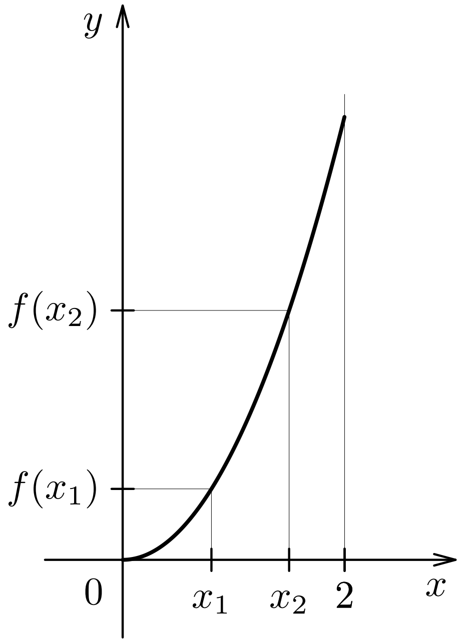
Tedy např. $f(3) = 1$, $f(4) = 2$ atd. Tato funkce je prostá. Není však ani rostoucí ani klesající.

Příklad 7.14. Funkce $y = x^2$ není na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$ prostá. Označme $f(x) = x^2$. Zvolme např. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Je tedy $x_1 \neq x_2$, avšak $f(x_1) = f(x_2) = 1$. Viz obr. 7.16.



Obrázek 7.16: Funkce $y = x^2$ definovaná na intervalu $\langle -2, 2\rangle$.

Avšak funkce $y = x^2$ je na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ prostá. Viz obr. 7.17



Obrázek 7.17: Funkce $y = x^2$ je na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ prostá.

Porovnáním definicí rostoucí funkce, klesající funkce a prosté funkce dospějeme k tomuto závěru:

Funkce ryze monotónní na $A \subseteq \mathbb{R}$ je na A též prostá.

Existuje však funkce prostá, která není ryze monotónní (viz příklad 7.13).

Definice 7.4.
Řekneme, že *funkce* $y = f(x)$ je *sudá (lichá)*, má-li tuto vlastnost: Je-li definovaná v bodě x, je definovaná i v bodě $(-x)$ a platí $f(-x) = f(x)$, $\quad (f(-x) = -f(x))$.

Z definice je tedy patrno, že graf sudé funkce je symetrický vzhledem k ose y a graf liché funkce je symetrický vzhledem k počátku.

Příkladem sudé funkce je funkce $y = x^2$. Skutečně, tato funkce je definovaná pro všechna x a platí $(-x)^2 = x^2$. Příkladem liché funkce je funkce $y = x^3$. Skutečne, tato funkce je definovaná pro všechna x a platí $(-x)^3 = -x^3$.

7.4.2. Funkce složená a funkce inverzní

Složená funkce. *Nechť A je neodvislý obor funkce $u = \varphi(x)$. Označme $B = \varphi(A)$ odvislý obor funkce φ. Nechť $f(u)$ je funkce definovaná na množině B. Ke každému číslu $x \in A$ přiřaďme číslo $F(x)$ vztahem*

$$F(x) = f(\varphi(x)), \tag{7.13}$$

to jest hodnotu funkce f v čísle $u = \varphi(x) \in B$. Funkci f nazýváme vnější složkou a funkci φ vnitřní složkou funkce F.

Příklad 7.15. Funkci

$$y = (x^2+1)^7, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

můžeme chápat jako složenou funkci. Položme

$$A = (-\infty, \infty), \quad u = \varphi(x), \quad \text{kde} \quad \varphi(x) = x^2 + 1,\ x \in A.$$

Označme

$$B = \varphi(A), \qquad \text{tedy} \quad B = \langle 1, \infty).$$

Položme

$$y = f(u), \quad \text{kde} \quad f(u) = u^7,\ u \in B.$$

Potom ke každému $x \in A$ je funkcí φ přiřazeno $u = \varphi(x) \in B$. K tomuto číslu u je funkcí f přiřazeno číslo $y = f(u)$. Tedy $y = f(\varphi(x))$.

Je tedy $f(u) = u^7$ vnější a $u = x^2 + 1$ vnitřní složkou funkce $y = (x^2+1)^7$.

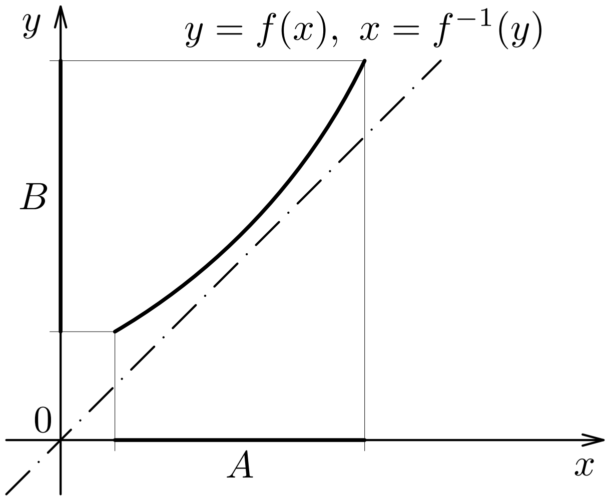
Poznámka. *Složená funkce může být vícenásobně složená.* Např. jestliže f je její vnější složkou a φ je její vnitřní složkou, potom vnitřní složka φ může být opět složenou.

Inverzní funkce. *Nechť funkce $y = f(x)$ je definovaná na množině A a je na ní prostá. To znamená, že pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Označme $B = f(A)$.* Ke každému $y \in B$ přiřaďme to číslo $x \in A$, pro nějž je $f(x) = y$. *Tím jsme zavedli pravidlo, jimž ke každému $y \in B$ je přiřazeno $x \in A$. Je tak definovaná nová funkce, označme ji f^{-1}, jejímž neodvislým oborem je množina B a odvislým oborem je množina A. Ponecháme-li označení y pro proměnnou s oborem B a x pro proměnnou s oborem A, píšeme*

$$x = f^{-1}(y), \qquad y \in B,\ x \in A.$$

V definici inverzní funkce je podstatný předpoklad, že f je na svém definičním oboru prostá. Takovými funkcemi jsou např. funkce ryze monotónní na svém definiční oboru.

Na obr. 10.2 je v kartézském souřadném systému znázorněn graf funkce $y = f(x)$ rostoucí na intervalu $A = D(f)$, tedy graf funkce prosté. Graf funkce $x = f^{-1}(y)$ je totožný s grafem funkce $y = f(x)$, pokud bychom *proti zvyklostem* znázornili neodvislý obor na ose y a odvislý obor na ose x.

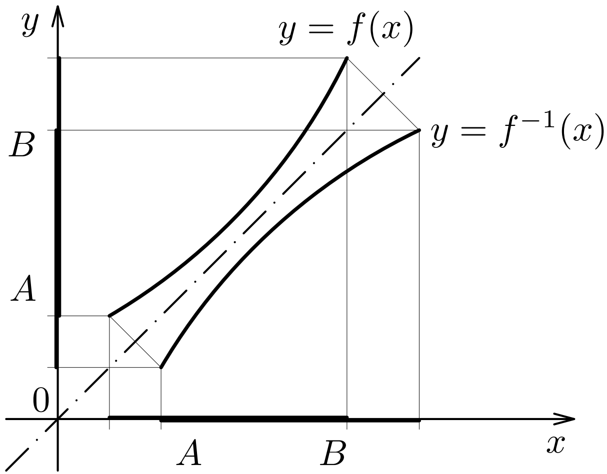


Obrázek 7.18: Graf funkcí $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$.

Označíme-li x neodvisle proměnnou jak pro funkci f, tak i pro funkci f^{-1}, zapíšeme obě funkce takto

$$y = f(x), \quad x \in A,\ y \in B, \qquad y = f^{-1}(x), \quad x \in B,\ y \in A. \tag{7.14}$$

Jestliže jejich neodvislé obory vyznačíme v kartézském souřadném systémy na vodorovné ose, jsou grafy funkcí $f(x)$, $f^{-1}(x)$ symetrické s osou symetrie $y = x$. Graf inverzní funkce $f^{-1}(x)$ jsme dostali překlopením grafu $f(x)$ kolem přímky $y = x$.



Obrázek 7.19: Graf funkcí $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$.

Z definice inverzní funkce vyplývá

- je-li $a \in D(f)$, potom $a = f^{-1}(f(a))$
- je-li $\alpha \in D(f^{-1})$, potom $\alpha = f(f^{-1}(\alpha)$

Je-li prostá funkce daná rovnicí

$$y = f(x), \tag{7.15}$$

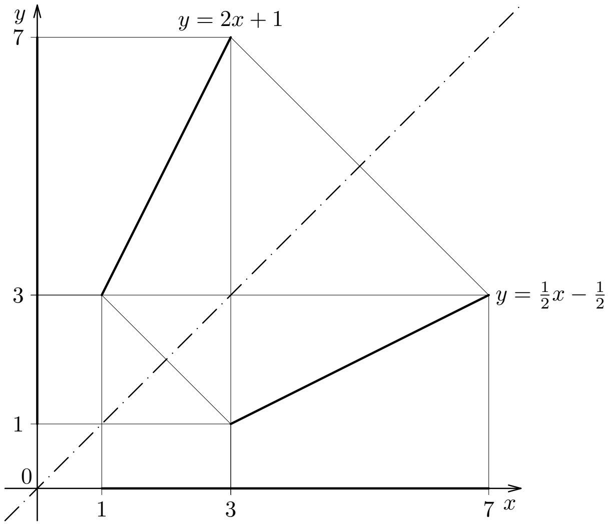
dostaneme k ní funkci inverzní tak, že z rovnice (10.21) vypočítáme x pomocí y. Pojem inverzní funkce vede k zavedení nových funkcí, jak později uvidíme.

Příklad 7.16. K funkci $y = 2x + 1,\ x \in \langle 1, 3\rangle$ určete funkci inverzní.

Řešení. Označme $f(x) = 2x + 1, A = \langle 1, 3\rangle$. Označme $B = f(A)$. Dostáváme $B = \langle 3, 7\rangle$. Z rovnice $y = 2x + 1$ vypočítáme x. Dostáváme $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$. Tedy funkce $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ je inverzní k zadané funkci f, je definovaná na intervalu B. Změnou označení pro neodvisle a odvisle proměnnou dostáváme hledanou inverzní funkci

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad x \in B, \quad y \in A.$$

Grafy zadané funkce a funkce k ní inverzní jsou na obrázku 7.20.



Obrázek 7.20: Grafy funkcí $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ z příkladu 7.16..

Kontrolní otázky

5. Nechť $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$. Vypočítejte

a) $f(2)$ [7]

b) $f(\langle 0, 3\rangle)$ [nelze, v bodě $1 \in \langle 0, 3\rangle$ není $f(x)$ definováno]

c) $f(\langle 5, 6\rangle)$ [$\langle \frac{17}{5}, 4\rangle$]

6. Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-1}$.

$[D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)]$

7. Zjistěte, zda funkce jsou sudé, resp. liché:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^4-1}$ [sudá]

b) $g(x) = \frac{x}{x^3+2}$ [není ani sudá, ani lichá]

c) $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ [lichá]

d) $u(x) = \frac{x^2+1}{x}$ [lichá]

8. Co je to funkce rostoucí, klesající, monotonní?

9. Načrtněte grafy funkcí

a) $y = 2x - 1$

b) $y = x^3 + 1$

c) $y = \frac{3x+1}{x-2}$

Kapitola 8

Limita a spojitost funkce jedné proměnné

Úvod. V této kapitole se zaměříme na zavedení pojmu limity reálné funkce $f(x)$ jedné proměnné v daném bodě. Pojem limity funkce $f(x)$ v daném bodě pak použijeme k zavedení pojmu spojitosti funkce $f(x)$ v daném bodě.

V této kapitole budeme tam, kde nemůže dojít k omylu, používat pojem funkce místo reálná funkce reálné proměnné.

Pojem limity je důležitým pojmem, který je základním pojmem např. pro zavedení pojmu **derivace funkce** a **určitého integrálu z dané funkce.** Dříve než začnete studovat podrobně tuto kapitolu, zopakujte si z kapitoly o číslech zavedení nevlastních čísel $-\infty$, ∞ a rozšíření některých operací „$+$, $-$, $\cdot$, $:$ “ na $\mathbb{R}^*$.

Dále si zopakujte pojem okolí jak reálného čísla, tak i nevlastních čísel. Nechť a, δ jsou reálná čísla. Potom množinu

$< a,\ a+\delta) \ldots\ldots$ nazýváme pravým $\delta-$okolím bodu a, značíme $U_\delta^+(a)$

$(a-\delta,\ a > \ldots\ldots$ nazýváme levým $\delta-$okolím bodu a, značíme $U_\delta^-(a)$

$(a-\delta,\ a+\delta) \ldots\ldots$ nazýváme $\delta-$okolím bodu a, značíme $U_\delta(a)$

Nechť $a = -\infty, \delta \in \mathbb{R}$. Potom množinu
$(-\infty, \delta) \ldots\ldots$ nazýváme $\delta-$ okolím bodu $-\infty$ a značíme $U_\delta(-\infty)$, resp. $U_\delta^+(-\infty)$

Nechť $a = \infty, \delta \in \mathbb{R}$. Potom množinu
$(\delta, \infty) \ldots\ldots$ nazýváme $\delta-$okolím bodu ∞ a značíme $U_\delta(\infty)$, resp. $U_\delta^-(\infty)$

8.1. Limita funkce jedné proměnné v daném bodě

Úvodní poznámky k zavedení pojmu „limita reálné funkce jedné proměnné“

Začněme s vyšetřváním funkce

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

v bodech $x \neq 0$ „v blízkosti bodu“ $x = 0$. Funkce $f(x)$ není v bodě $x = 0$ definovaná. Uveďme si hodnoty této funkce v několika bodech:

x	$\pm 1{,}5$	± 1	$\pm 0{,}5$
$f(x)$	$0{,}664996\ldots$	$0{,}841470\ldots$	$0{,}958851\ldots$

x	$\pm 0{,}1$	$\pm 0{,}01$	$\pm 0{,}001$
$f(x)$	$0{,}998334\ldots$	$0{,}999983\ldots$	$0{,}999999\ldots$

Uvedené hodnoty nás vedou k domněnce, že čím x je „blíže“ k číslu $0, x \neq 0$ tím $f(x)$ je „blíže“ k číslu 1. Slovo „blíže“ budeme precizovat takto: K libovolnému $\varepsilon > 0$ lze určit číslo $\delta > 0$ tak, že pro $x \in U_\delta(0)$, $x \neq 0$, je $\frac{\sin x}{x} \in U_\varepsilon(1)$, to jest pro $x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$, je $1 - \varepsilon < \frac{\sin x}{x} < 1 + \varepsilon$. Důkaz pravdivosti této domněnky nebudeme teď provádět. Poněvadž tato domněnka je pravdivá, budeme říkat, že funkce $\frac{\sin x}{x}$ má v bodě 0 limitu rovnu „1“ a tuto okolnost budeme psát jako

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Dříve, než přikročíme k exaktnímu zavedení pojmu „limita funkce $f(x)$“ v daném bodě $a\in\mathbb{R}^*$, *zavedeme si tento pojem na základě neupřesněných pojmů*. Doufám, že to pomůže k pochopení tohoto pojmu. Pojem limity funkce je základním pojmem, jemuž je nutno dobře porozumět. *Toto porozumění je důležitější než naučení se přesnému znění definic a vět, které dávají návod k jejich výpočtu.*

Osvětlení pojmu limity $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ v následujících případech.

$\boxed{a\in\mathbb{R},\alpha\in\mathbb{R}}$. Rčení „limita funkce $f(x)$ v bodě $a\in\mathbb{R}$ je rovna $\alpha\in\mathbb{R}$“, které symbolicky zapisujeme jako

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,$$

znamená, nepřesně řečeno, toto: Číslem α lze aproximovat hodnoty funkce f se zvolenou přesností ve všech bodech $x\neq a$, ležících dostatečně blízko k číslu a. Jinak řečeno: jestliže „x se blíží k a a $x\neq a$“, potom „$f(x)$ se blíží k α“.

Uveďme tento příklad.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+1}=\frac{4}{5}=0.8$$

znamená, že pro všechna $x \neq 2$, která se málo liší od 2, je $\frac{x+1}{x^2+1}$ definováno a $\frac{x+1}{x^2+1}$ se málo liší od $\frac{4}{5} = 0{,}8$. (Např. pro $x = 2{,}01$ dostáváme

$$\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)_{x=2{,}01} = 0{,}795619\ldots$$

a pro $x = 2{,}001$ dostáváme

$$\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)_{x=2{,}001} = 0{,}7995602\ldots \quad .$$

$\boxed{a \in \mathbb{R}, \alpha = \infty}$. Rčení „limita funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ zprava je rovna ∞“, které symbolicky zapisujeme jako

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty,$$

znamená,že jestliže zvolíme libovolně velké číslo K, potom pro všechna čísla $x > a$, dostatečně blízká k číslu a, nabývá funkce $f(x)$ hodnotu větší než zvolené číslo K. Nepřesně řečeno:Jestliže „x se blíží k a a $x > a$“, potom „$f(x)$ roste nade všechny meze.“ Uveďme tento příklad. Položme $f(x) = \frac{1}{x-2}$.Potom

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty,$$

znamená, že ať zvolíme jakékoliv číslo K, potom pro dostatečně blízká čísla x k číslu „2“, různá od „2“ je $f(x) = \frac{1}{x-2} > K$. Např. pro $x = 2,001$ je $f(2,001) = 1000$ a pro $x = 2,000001$ je $f(2,000001) = 1000000$

$\boxed{a = \infty, \alpha \in \mathbb{R}}$. Rčení „limita funkce $f(x)$ v bodě ∞ je rovna $\alpha \in \mathbb{R}$“, které symbolicky zapisujeme jako

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha,$$

znamená, nepřesně řečeno, toto: Číslem α lze aproximovat hodnoty funkce f se zvolenou přesností pro všechna dostatečně velká x. Jinak řečeno: Pro všechna dostatečně velká $x \in \mathbb{R}$ číslo α aproximuje všechny hodnoty funkce $f(x)$ nepřevyšující zvolenou chybu aproximace.

Uveďme tento příklad.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = 2$$

znamená, že pro „hodně velké x“ je $\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}$ definováno a liší se málo od 2. To vidíme, jestliže danou funkci přepíšeme takto.

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2 + 1/x + 1/(x^2)}{1 - 1/(x^2)}$$

Čitatel se pro hodně velká x málo liší od „2“ a jmenovatel se pro velké hodnoty x málo liší od „1“, takže pro hodně velká x se hodnota uvažované funkce málo liší od „2“. Např pro $x = 100$ je

$$\left(\frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 1} \right)_{x=100} = 2{,}010301\ldots$$

a pro $x = 1000$ je

$$\left(\frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 1}\right)_{x=1000} = 2{,}002003\ldots\ .$$

$\boxed{a = \infty, \alpha = \infty}$ Rčení „limita funkce $f(x)$ v bodě ∞ je rovna ∞“, které symbolicky zapisujeme jako

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

znamená, nepřesně řečeno, toto: Zvolíme-li jakékoliv velké číslo K, potom pro všechna dostatečně velká čísla x je hodnota funkce f v bodě x větší než K.Vyslovme domněnku:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \infty$$

Uvažme, že pro $x > 0$ platí

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{1 + 1/(x^2)}{1/x + 1/(x^2)},$$

takže pro dostatečně velká x je $f(x)$ větší, než zvolené K. Např. pro $x = 1000$ je $f(x) > 999$.

Osvětlete si tyto zápisy

a) $\lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2_+} \frac{3x}{x-2} = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to 2_-} \frac{3x}{x-2} = -\infty$

a nakreslete grafy funkcí, jejichž limity v příslušných bodech jsou uvedeny a vyslovte domněnku o hodnotě příslušné limity.

Limita funkce jedné proměnné

Po úvodních slovech k zavedení pojmu limity uveďme si její přesné zavedení.

Definice 8.1. (Limita funkce jedné proměnné)

Nechť $y = f(x)$ je reálná funkce reálné proměnné x.
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu $\alpha \in \mathbb{R}^*$ a píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha,$$

jestliže ke každému ε–okolí bodu α existuje δ–okolí bodu a tak, že

1. funkce $f(x)$ je definovaná v $U_\delta(a) - \{a\}$
2. pro všechna $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ platí $f(x) \in U_\varepsilon(\alpha)$.

V bodech $a \in \mathbb{R}$ zavádíme i limitu zprava a limitu zleva funkce $f(x)$ takto: Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu zprava (zleva) rovnu číslu $\alpha \in \mathbb{R}^*$ a píšeme

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \alpha \qquad \left(\lim_{x \to a_-} f(x) = \alpha \right),$$

jestliže ke každému ε–okolí bodu $\alpha \in \mathbb{R}^*$ existuje pravé (levé) δ–okolí bodu a tak, že

1. funkce $f(x)$ je definována v $U_\delta^+(a) - \{a\}$ $(U_\delta^-(a) - \{a\})$
2. pro všechna $x \in U_\delta^+(a) - \{a\}$ $(x \in U_\delta^-(a) - \{a\})$ platí $f(x) \in U_\varepsilon(\alpha)$.

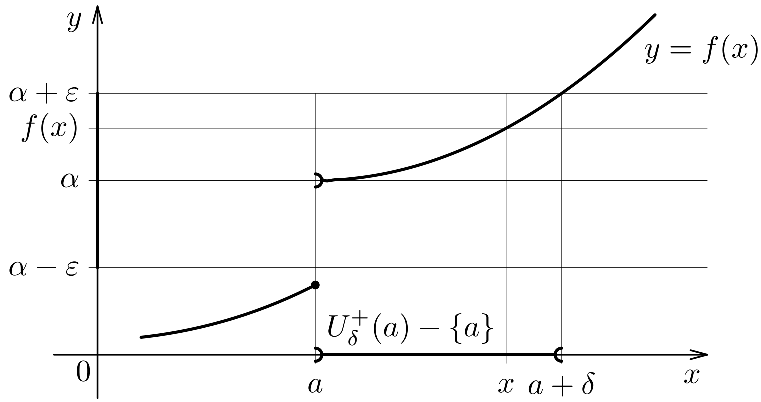
Ukažme, jak lze tuto definici přeformulovat v jednotlivých případech.

$\boxed{a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha.}$ Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu α a píšeme

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \alpha,$$

jestliže k libovolnému vlastnímu číslu $\varepsilon > 0$ lze určit takové vlastní číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a, a + \delta)$, (tj. pro $x \in U_\delta^+(a) - \{a\}$ je funkce $f(x)$ definovaná a $f(x)$ je aproximováno číslem α s chybou nepřevyšující ε, tj. $f(x) \in <\alpha - \varepsilon, \alpha + \epsilon>$.

Grafické znázornění $\lim_{x \to a^+} f(x) = \alpha$, je zobrzeno na následujícím obrázku 8.1



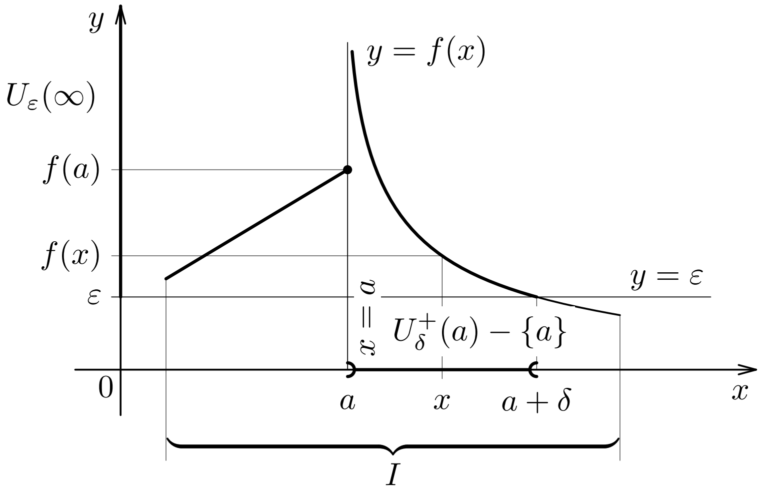
Obrázek 8.1: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \alpha$,

$\boxed{a \in \mathbb{R}, \alpha = \infty, \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty.}$ Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu zprava rovnu ∞ a píšeme

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty,$$

jestliže pro každé libovolně velké číslo ε lze určit takové vlastní číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a, a + \delta)$, (tj. pro $x \in U_\delta^+(a) - \{a\}$ je funkce $f(x)$ definovaná a $f(x) > \varepsilon$.

Grafické znázornění $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ je zobrazeno na následujícím obrázku 8.2



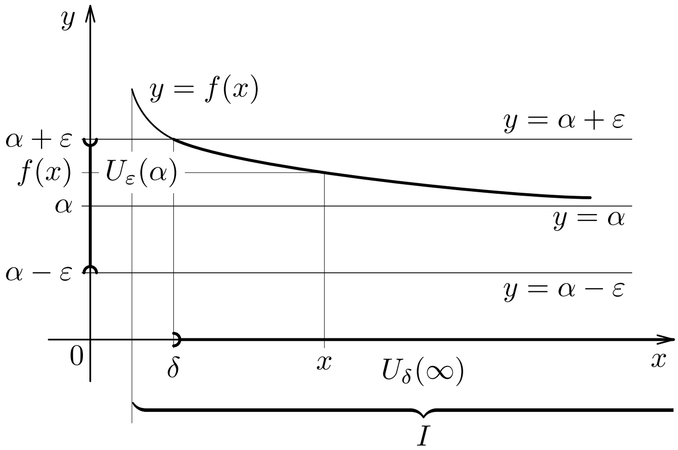
Obrázek 8.2: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$

$\boxed{a = \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \alpha.}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě ∞ limitu rovnu α a píšeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha,$$

jestliže pro každé libovolně malé číslo $\varepsilon > 0$ lze určit takové vlastní číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (\delta, \infty)$, (tj. pro $x \in U_\delta^+(a)$ je funkce $f(x)$ definovaná a $f(x) \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.

Grafické znázornění $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ je zobrazeno na následujícím obrázku 8.3



Obrázek 8.3: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$

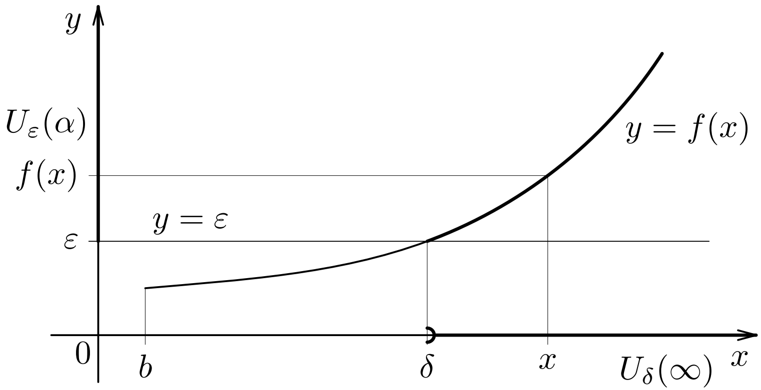
$\boxed{a = \infty, \alpha = \infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = infty}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě ∞ limitu rovnu ∞ a píšeme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

jestliže pro každé libovolně velké číslo $\varepsilon > 0$ lze určit takové vlastní číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (\delta, \infty)$, (tj. pro $x \in U_\delta^+(a)$ je funkce $f(x)$ definovaná a

$f(x) \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.

Grafické znázornění $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ je zobrazeno na následujícím obrázku 8.4



Obrázek 8.4: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Rčení „limita funkce $f(x)$ v bodě ∞ je rovna $\alpha \in \mathbb{R}$", které symbolicky zapisujeme jako

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha,$$

znamená, nepřesně řečeno, toto: Číslem α lze aproximovat hodnoty funkce f se zvolenou přesností pro všechna dostatečně velká x. Jinak řečeno: Pro všechna dostatečně velká $x \in \mathbb{R}$ číslo α aproximuje všechny hodnoty funkce $f(x)$ nepřevyšující zvolenou chybu aproximace.

Poznámka 1. Jestliže interval (c, d) je definičním oborem funkce $f(x)$, budeme někdy

místo $\lim\limits_{x \to c_+} f(x)$ psát $\lim\limits_{x \to c} f(x)$,
místo $\lim\limits_{x \to d_-} f(x)$ psát $\lim\limits_{x \to d} f(x)$.

Poznámka 2. Všimněte si, že označení $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $(\lim\limits_{x \to \infty} f(x))$ je vlastně rovněž označení pro jednostranné limity.

Ukažme, že platí tato věta:

Věta 8.1.
Nechť $f(x)$ je funkce. Potom $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \alpha$ $(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \alpha)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}^*$, když a jenom když

$$\lim_{y \to 0_+} f\left(\frac{1}{y}\right) = \alpha \qquad \left(\lim_{y \to 0_-} f\left(\frac{1}{y}\right) = \alpha\right).$$

Důkaz: Důkaz vychází z toho, že vztahem

$$y = \frac{1}{x}$$

je ke každému $x \in U_\delta(\infty)$, $\delta \neq 0$ přiřazeno právě jedno $y \in U^+_{\frac{1}{\delta}}(0)$ a každé $y \in U^+_{\frac{1}{\delta}}(0)$ je přiřazeno právě k jednomu $x \in U_\delta(\infty)$. Pro $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ je důkaz analogický.

Úloha. Zvolte si funkci $y = f(x)$ a načrtněte její graf pro tyto případy:

a) $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $a \in \mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, $a \in \mathbb{R}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Limita funkce $f(x)$ v daném bodě a nezávisí na hodnotě funkce $f(x)$ v bodě a. Tedy funkce $f(x)$ nemusí být v bodě a ani definovaná. Platí tedy tato poučka:

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, nechť existuje $\delta \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = g(x)$ pro $x \in U_\delta(a) - \{a\}$. Potom existuje-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, existuje i $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Podobně pro $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$.

Funkce $f(x)$ nemusí mít v daném bodě limitu. Uveďme tyto příklady.

Příklad 8.1. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální,} \\ -1 & \text{pro } x \text{ iracionální.} \end{cases}$$

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom neexistuje $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)$ ani $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)$.

Skutečně. V každém intervalu $(a, a+\delta)$ ($(a-\delta, a)$) jsou jak body x, v nichž je $f(x) = 1$, tak body x, v nichž je $f(x) = -1$. Tedy neexistuje ani $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)$ ani $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)$.

Příklad 8.2. Ukažme, že neexistuje $\lim\limits_{x\to 0_+} \sin\frac{1}{x}$.

Řešení. Především zvažme, že funkce $\sin\frac{1}{x}$ je definovaná pro všechna $x \neq 0$. Položme

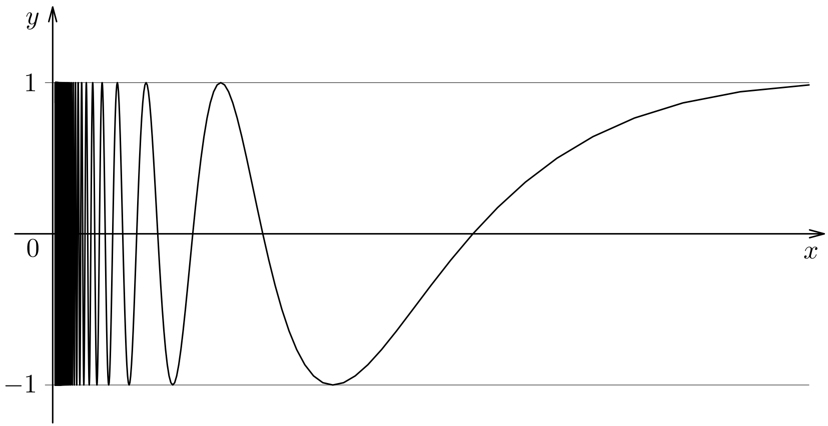
$$x_k = \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Zřejmě posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ má limitu rovnu 0, tj. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Dále

$$\sin\frac{1}{x_k} = \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = \begin{cases} -1 & \text{pro } k \text{ liché,} \\ 1 & \text{pro } k \text{ sudé.} \end{cases}$$

Tedy v každém intervalu $(0,\delta)$ jsou jednak body, v nichž funkce $\sin\frac{1}{x}$ nabývá hodnoty -1, jednak body, v nichž funkce $\sin\frac{1}{x}$ nybývá hodnoty 1, takže neexistuje $\lim\limits_{x\to 0_+} \sin\frac{1}{x}$.

Na obr. 8.5 je vyznačen graf funkce $\sin\frac{1}{x}$ pořízený na počítači.



Obrázek 8.5: Graf funkce $\sin\frac{1}{x}$.

V učebním textu „Matematika A“ jsme zavedli pojem spojitosti funkce $f(x)$ v daném bodě a. Zavedení tohoto pojmu lze provést pomocí pojmu limity funkce $f(x)$ v bodě a takto.

Definice 8.2. (Spojitost funkce v bodě)

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná v bodě $a \in \mathbb{R}$ a nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ $(\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = f(a))$ $[\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = f(a)]$. Potom $f(x)$ je v bodě a spojitá (spojitá zprava) [spojitá zleva].

Je-li a levým (pravým) koncovým bodem intervalu I, na němž je funkce definovaná, můžeme říkat, že funkce $f(x)$ je v bodě a spojitá místo $f(x)$ je v bodě a zprava (zleva) spojitá.

Jestliže funkce $f(x)$ je v bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá, potom výpočet limity funkce $f(x)$ v bodě a lze určit pouhým výpočtem hodnoty funkce $f(x)$ v bodě a.

V učebním textu „Matematika A" jsme uvedli, že elementární funkce polynom, racionální lomená funkce $\sqrt[n]{x}$, a^x $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Uveďme si několik příkladů.

Příklad 8.3. Dokažme, že $\lim\limits_{x\to 10} \log x = 1$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Skutečně. Funkce $\log x$, $\sin x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru. Tedy

$$\lim_{x\to 10} \log x = \log 10 = 1, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Příklad 8.4. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažme

$$\lim_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & n \text{ je sudé,} \\ -\infty, & n \text{ je liché.} \end{cases}$$

Skutečně. *Nechť n je sudé*. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon > 1$. Položme $\delta = -\sqrt[n]{\varepsilon}$. Potom pro $x \in U_\delta(-\infty)$, tj. pro $x \in (-\infty, -\sqrt[n]{\varepsilon})$ je $x^n > \varepsilon$, tj. $x^n \in U_\varepsilon(\infty)$, takže

$$\lim_{x\to -\infty} x^n = \infty \text{ pro } n \text{ sudé.}$$

Podobně se dokáže, že *pro n liché* je $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = -\infty$.

Příklad 8.5. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x + 1).$$

Řešení. Polynom je funkce spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, tedy i v bodě 2. Limita v bodě a, v němž je funkce spojitá, je rovna její funkční hodnotě v bodě a. Tedy

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x + 1) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Příklad 8.6. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x+2}{x^2-1}.$$

Řešení. Funkce $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1}$ je racionální lomená funkce. Víme, že racionální lomená funkce je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, to jest v každém bodě, v němž je jmenovatel nenulový. V našem případě je jmenovatel x^2-1 v bodě 2 roven $2^2-1=3$, takže $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ je rovna $f(2)$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x+2}{x^2-1} = \frac{3\cdot 2+2}{2^2-1} = \frac{8}{3}.$$

Příklad 8.7. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}.$$

Zřejmě $D_f = \mathbb{R} - \{2,3\}$. Funkce $f(x)$ není tedy v bodě 2 spojitá, neboť v něm ani není definovaná. Funkci $f(x)$ přepišme na tvar

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Položme

$$g(x) = \frac{x+2}{x-3}.$$

Zřejmě $f(x){=}g(x)$ pro $x \neq 2$. Poněvadž limita funkce nezávisí na její hodnotě v bodě, v němž limitu počítáme, je

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x). \tag{8.1}$$

Funkce $g(x)$ je však spojitá v bodě 2, takže

$$\lim_{x\to 2} g(x) = g(2),$$

tj.

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \frac{2+2}{2-3}.$$

Podle (8.1) je tedy

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -4.$$

8.2. Limita a spojitost funkce vytvořené pomocí dvou funkcí

Pro funkce, které vzniknou sečítáním, odečítáním, násobením a dělením funkcí, jejichž uvažované limity v daném bodě a známe, můžeme počítat limitu podle následující věty.

Věta 8.2.

Nechť $f(x)$, $g(x)$ *jsou funkce pro něž platí*

$$\lim f(x) = A, \qquad \lim g(x) = B,$$

kde $\lim$ *značí jeden ze symbolů* $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a^+}$, $\lim\limits_{x\to a^-}$, $\lim\limits_{x\to\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$, $a \in \mathbb{R}$ *a symboly* A, B *představují reálná čísla nebo jeden ze symbolů* $+\infty$ *nebo* $-\infty$ *(to jest* $A, B \in \mathbb{R}^*$*). Potom platí*

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \tag{8.2}$$

$$\lim f(x) \cdot g(x) = A \cdot B, \tag{8.3}$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \tag{8.4}$$

pokud má pravá strana význam v $\mathbb{R}^*$*.*

Důkaz: Důkaz věty proveďme jen pro některé případy. Dokažme vztah (8.2) pro limitu v bodě a pro tyto případy. Ostatní případy se dokazují podobně.

α) Nechť $a, A, B \in R$. Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Dokažme, že $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Poněvadž $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, existuje takové $\delta_1 > 0$, že pro $x \neq a$, $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$ je funkce $f(x)$ definovaná a platí

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.5}$$

Podobně, poněvadž $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, existuje $\delta_2 > 0$ tak, že pro $x \in (a - \delta_2, a + \delta_2)$, $x \neq a$, je funkce $g(x)$ definovaná a platí

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.6}$$

Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Ze vztahů (8.5),(8.6) dostáváme pro $x \neq a$, $x \in (a - \delta, a + \delta)$

$$\begin{aligned} &|f(x) \pm g(x) - (A \ \pm B)| = |(f(x) - A) \pm (g(x) - B)| \leq \\ &\leq |f(x) - A\ | + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \ \pm B.$$

β) Nechť $a, A \in \mathbb{R}$, $B = \infty$. Nechť $\varepsilon, K > 0$ jsou libovolná čísla. Poněvadž $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, lze k číslu ε určit $\delta_1 > 0$ tak, že pro $x \in (a-\delta_1, a+\delta_1)$, $x \neq a$, je funkce $f(x)$ definovaná a platí

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

tj.

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, lze k číslu $(K + \varepsilon - A)$ určit $\delta_2 > 0$ tak, že pro $x \in (a-\delta_2, a+\delta_2)$, $x \neq a$, je funkce $g(x)$ definovaná a platí

$$g(x) > K + \varepsilon - A.$$

Označme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Potom pro $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$, je funkce $g(x)$ definovaná a platí

$$f(x) + g(x) > A - \varepsilon + (K + \varepsilon - A) = K.$$

Je tedy

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B = A + \infty = \infty.$$

Podobně se dokáže, že

$$\lim_{x\to a_+}(f(x) - g(x)) = -\infty.$$

Poznámka. Nechť $g(x) = c$, kde c je reálná konstanta. Potom $\lim_{x\to a} g(x) = c$ pro libovolné a, neboť pro libovolné $\varepsilon > 0$ a pro všechna x platí

$$|g(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, platí tedy podle věty 8.2

$$\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x) = c \cdot A,$$

pokud má cA význam.

Z věty 8.2 dostáváme pro funkce spojité tuto větu.

Věta 8.3.
Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v bodě a. Potom i funkce $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ je spojitá v bodě a. Jestliže navíc $g(a) \neq 0$, je i funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v bodě a.

Příklad 8.8. Funkce $\sin x$, $x^2 - 1$ jsou spojité v každém bodě. Tedy i funkce $\sin x + x^2 - 1$, $\sin x - x^2 + 1$, $(x^2 - 1) \cdot \sin x$ jsou spojité v každém bodě. Poněvadž $x^2 - 1 \neq 0$ pro $x \neq 1$ a pro $x \neq -1$, je funkce $\frac{\sin x}{x^2 - 1}$ spojitá v každém bodě x, kde $x \neq \pm 1$.

Příklad 8.9. Vypočítejte

$$\lim_{x\to\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0), \quad a_n \neq 0.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Funkci $f(x)$ přepišme na tvar

$$f(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{x^n} + \cdots + a_1 \frac{x}{x^n} + a_0 \frac{1}{x^n} \right),$$

tj.

$$f(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right).$$

Podle věty 8.2 je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \cdot \left(\lim_{x\to\infty} a_n + \lim_{x\to\infty} \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \lim_{x\to\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} + \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c}{x^m} = \frac{c}{\infty} = 0$ pro $m \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$, dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \cdot \lim_{x\to\infty} a_n.$$

Je tedy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } a_n > 0, \\ -\infty & \text{pro } a_n < 0. \end{cases}$$

Příklad 8.10. Vypočítejte

$$\lim_{x\to-\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0), \quad a_n \neq 0.$$

Řešení. Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě. Položme

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

Dostáváme

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \left(\lim_{x\to-\infty} a_n + \lim_{x\to-\infty} \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \lim_{x\to-\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} + \lim_{x\to-\infty} \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{c}{x^m} = 0$, $m \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ a

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ -\infty & \text{pro } n \text{ liché,} \end{cases}$$

dostáváme [1)]

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_n \cdot \infty & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ -\operatorname{sgn} a_n \cdot \infty & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Tedy např. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2 - 3x + 1) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}) = \infty$.

[1)] $\operatorname{sgn} a = 1$, je-li $a > 0$, $\operatorname{sqn} a = -1$, je-li $a < 0$

Příklad 8.11. Podle věty 8.2 je např. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1/x) = \infty$, neboť x^2 je funkce spojitá, takže $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0^+} 1/x = \infty$.

Příklad 8.12. Vypočítejte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{-x^2 - 2x + 1}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{-x^2 - 2x + 1}.$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-3x+1) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2-2x+1) = -\infty$, nemůžeme bezprostředně použít žádnou větu o limitě podílu, kterou jsme zatím uvedli, neboť $\frac{\infty}{-\infty}$ není definováno ani v $\mathbb{R}^*$. Avšak pro $x \neq 0$ je $f(x) = g(x)$, kde

$$g(x) = \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{-1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Zřejmě

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Je tedy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -2.$$

Příklad 8.13. Vypočítejte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - x + 1}{x^2 + x - 1}.$$

Řešení. Zřejmě, dělíme-li čitatele i jmenovatele číslem x^2, kde $x \neq 0$, dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - x + 1}{x^2 + x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

Příklad 8.14. Vypočítejte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x - 1}.$$

Řešení. Zřejmě, dělíme-li čitatele i jmenovatele x^4 pro $x \neq 0$, dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4})} = \frac{0}{1} = 0.$$

Větu 8.2 pro výpočet $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ nelze použít, jestliže $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = 0$. Je-li $A \neq 0$, je tento případ řešen následující větou. O případě, kdy $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, pojednáme později.

Věta 8.4. (Limita podílu $f(x)/g(x)$, je-li $\lim g(x) = 0$)

Nechť $a, A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$. *Nechť* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$. *Nechť existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro* $x \in U_\delta^+(a) - \{a\}$ *je funkce* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *definovaná a platí*

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)} < 0\right).$$

Potom

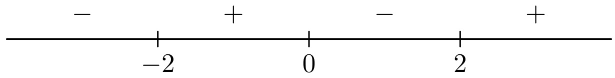
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \quad (-\infty).$$

Příklad 8.15. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x}{x^2-4}.$$

Řešení. Zřejmě $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x = 6$, $\lim\limits_{x\to 2^+} (x^2-4) = 0$. Tedy limita čitatele je různá od nuly a limita jmenovatele je rovna 0. Určeme znamení funkce $\frac{3x}{x^2-4}$. Znamení je znázorněno na obr. 8.6. Poněvadž existuje pravé okolí bodu 2, v němž je funkce $\frac{3x}{x^2-4}$ kladná, je podle věty 8.4

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x}{x^2-4} = \infty.$$

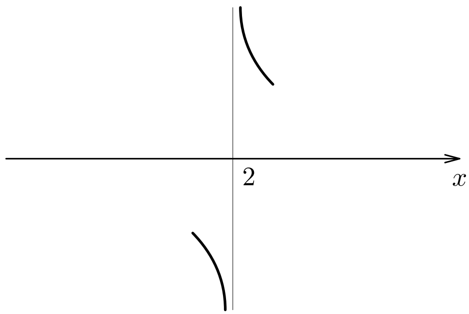


Obrázek 8.6: Znamení funkce z příkladu 8.15.

Podobně bychom zjistili, že

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x}{x^2-4} = -\infty.$$

Poznámka. Schematicky chování funkce $\frac{3x}{x^2-4}$ pro x „blízko“ k číslu 2 znázorňujeme podobně jako na obr. 8.7.



Obrázek 8.7: Znázornění chování funkce $\frac{3x}{x^2-1}$ v okolí bodu $x = 2$, $x \neq 2$.

Příklad 8.16. Vypočítejte
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x+1}{x^2-1}.$$

Řešení. Poněvadž $\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+1) = 4$, $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1) = 0$, $\frac{3x+1}{x^2-1} > 0$ pro $x > 1$ (určete znamení racionální lomené funkce $\frac{3x+1}{x^2-1}$), dostáváme podle věty 8.4, že
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x+1}{x^2-1} = \infty.$$

Spojitost složené funkce

Věta 8.5. (Spojitost složené funkce)

Nechť funkce $u = \varphi(x)$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a nechť funkce $f(u)$ je spojitá v bodě $\alpha = \varphi(a)$. Potom složená funkce $f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě a. Je tedy $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a))$.

Důkaz: Ze spojitosti funkce f v bodě $\alpha = \varphi(a)$ vyplývá, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\varrho > 0$, že pro $u \in U_\varrho(\alpha)$ (tj. pro $x \in (\alpha - \varrho, \alpha + \varrho)$) je funkce $f(u)$ definovaná a platí $f(u) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$ (tj. $f(\alpha) - \varepsilon < f(u) < f(\alpha) + \varepsilon$). Poněvadž funkce φ je spojitá v bodě a, k uvedenému číslu ϱ existuje takové $\delta > 0$, že pro $x \in U_\delta(a)$ (tj. pro $a - \delta < x < a + \delta$) je funkce $\varphi(x)$ definovaná a $\varphi(x) \in U_\varrho(\alpha)$ (to jest

$\alpha - \varrho < \varphi(x) < \alpha + \varrho$). Je-li tedy $x \in U_\delta(a)$, je $u = \varphi(x) \in U_\varrho(\alpha)$ a $f(u) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$, tj. $f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$. Funkce $f(\varphi(x))$ je tedy spojitá v bodě a.

Příklad 8.17. Funkce $\sin(x^2 + x + 1)$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Skutečně. Položme $u = \varphi(x) = x^2 + x + 1$, $f(u) = \sin u$. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Víme, že polynom je funkce spojitá v každém bodě. Je tedy $\varphi(x)$ spojitá i v bodě a. Označme $\alpha = a^2 + a + 1$. Funkce $f(u)$ je spojitá v každém bodě, tedy i v bodě α. Podle věty 8.5 je tedy $f(\varphi(x))$ spojitá v bodě a. Poněvadž a byl libovolný bod z intervalu $(-\infty, \infty)$, je $f(\varphi(x))$ spojitá v každém bodě $a \in (-\infty, \infty)$.

Věta 8.6. (Spojitost složené funkce)
Nechť funkce $\varphi(x)$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Položme $\alpha = \varphi(a)$. Nechť existují taková čísla κ, σ, že $\varphi(U_\kappa(a)) = U^+_\sigma(\alpha)$ ($\varphi(U_\kappa(a)) = U^-_\sigma(\alpha)$). Nechť funkce f je spojitá zprava (zleva) v bodě α. Potom funkce $f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě a.

Důkaz: Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Poněvadž funkce $f(u)$ je spojitá zprava v bodě α, existuje $\varrho > 0$ tak, že $f(u)$ je definovaná v $U^+_\varrho(\alpha)$ a $f(u) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$. Poněvadž $\varphi(x)$ je spojitá v bodě a, k uvedenému číslu ϱ existuje $\delta_1 > 0$, že pro $x \in U_{\delta_1}(a)$ je funkce $\varphi(x)$ definovaná a $\varphi(x) \in U^+_\varrho(\alpha)$. Položme $\delta = \min(\kappa, \delta_1)$. Potom pro $x \in U_\delta(a)$ je $\varphi(x) \in U^+_\varrho(\alpha)$ a $f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(f(\varphi(a))$. Je tedy $\lim\limits_{x \to a} f(\varphi(x)) = f\varphi(a))$, takže $f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě a.

Uveďme si nyní větu o limitě složené funkce, je-li její vnější složka spojitá.

Věta 8.7. (Limita složené funkce)

Nechť φ, f *jsou funkce,* $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *a nechť*

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \alpha.$$

Nechť funkce f *je spojitá v bodě* α. *Potom existuje* $\delta > 0$ *tak, že* $f(\varphi(x))$ *existuje v* $U_\delta(a)$ *a platí*

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to a} \varphi(x)) = f(\alpha). \tag{8.7}$$

Důkaz: Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Poněvadž funkce f je spojitá v bodě α, existuje $\varrho > 0$ tak, že pro $u \in U_\varrho(\alpha)$ je funkce f definovaná a $f(u) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$. Poněvadž $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \alpha$, k číslu ϱ existuje takové $\delta > 0$, že pro $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ je funkce $\varphi(x)$ definovavá a $\varphi(x) \in U_\varrho(\alpha)$. Tedy pro $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ má $f(\varphi(x))$ význam. Je-li $x \in U_\delta(a) - \{a\}$, je $u = \varphi(x) \in U_\varrho(\alpha)$ a tedy $f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$. Platí tedy (8.7).

Příklad 8.18. Ukažme, že

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x+1}{2x-1}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Skutečně. Položme $\varphi(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$, $f(u) = e^u$. Zřejmě

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}.$$

Funkce e^u je spojitá v bodě $u = \frac{3}{2}$, takže

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x+1}{2x-1}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Příklad 8.19. Nechť $\varphi(x) = x^2+1$, $f(u) = \sqrt{u}$. Funkce $f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě 0.

Skutečně. $\varphi(x)$ je spojitá v bodě $a = 0$. Položme $\alpha = \varphi(a)$, tj. $\alpha = 1$. Funkce $\sqrt{u}$ je spojitá v bodě $\alpha = 1$. Podle věty 8.7 je tedy funkce $\sqrt{x^2+1}$ spojitá v bodě $a = 0$.

Poznámka. K domněnce, že funkce $\sqrt{x^2+1}$ je v bodě $a = 0$ spojitá, můžeme dospět i touto úvahou. Když x je dostatečně blízko k 0, je x^2+1 blízko k 1 a stále je $x^2+1 > 0$. Tedy $\sqrt{x^2+1}$ je blízko k číslu $\sqrt{1} = 1$. Poněvadž funkce $\sqrt{x^2+1}$ má v bodě $a = 0$ hodnotu 1, je funkce $\sqrt{x^2+1}$ v bodě $a = 0$ spojitá.

Poznámka. Je možno vyslovit řadu dalších vět podobných k větě 8.7, které vzniknou za předpokladu, že funkce $f(x)$ je pouze zprava, resp. zleva spojitá v α a místo $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ se uvažuje $\lim\limits_{x\to a_+} \varphi(x)$ resp. $\lim\limits_{x\to a_-} \varphi(x)$.

Věta 8.8. (Limita složené funkce)

Nechť φ, f *jsou funkce jedné proměnné a nechť* $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. *Nechť*

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \alpha, \quad \lim_{u\to\alpha} f(u) = \beta. \tag{8.8}$$

Nechť existuje takové okolí $U_\kappa(a)$ *a k němu okolí* $U_\varrho(\alpha)$ *tak, že*

$$\varphi(U_\kappa(a) - \{a\}) = U_\varrho(\alpha) - \{\alpha\}. \tag{8.9}$$

Potom

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = \beta$$

(tj. $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{u\to \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} f(u)$*).*

Důkaz: Dříve, než přikročíme k vlastnímu důkazu, uvažme, že z (8.9) vyplývá, že pro $x \in U_\kappa(a) - \{a\}$ je $\varphi(x) \neq \alpha$.

Nechť $U_\varepsilon(\beta)$ je libovolné okolí bodu β. Poněvadž $\lim\limits_{u\to\alpha} f(u) = \beta$, existuje okolí $U_{\delta_1}(\alpha)$ tak, že funkce f je v $U_{\delta_1}(\alpha) - \{\alpha\}$ definovaná a platí

$$f(u) \in U_\varepsilon(\beta) \quad \text{pro } u \in U_{\delta_1}(\alpha) - \{\alpha\}. \tag{8.10}$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \alpha$, k okolí $U_{\delta_1}(\alpha)$ existuje takové okolí U_{δ_2} bodu a, že funkce φ je definovaná v $U_{\delta_2}(a) - \{a\}$ a

$$\text{pro } x \in U_{\delta_2}(a) - \{a\} \text{ je } \varphi(x) \in U_{\delta_1}(\alpha). \tag{8.11}$$

Položme

$$U_\delta(a) = U_{\delta_2}(a) \cap U_\kappa(a). \tag{8.12}$$

Věta bude dokázána, dokážeme-li, že pro všechna $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ je

$$f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(\beta). \tag{8.13}$$

Nechť tedy $x \in U_\delta(a) - \{a\}$. Vzhledem k (8.9), (8.11), (8.12), (8.13) $u = \varphi(x) \in U_{\delta_1}(\alpha) - \{\alpha\}$. Je tedy

$$f(u) \in U_\varepsilon(\beta),$$

to jest

$$f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(\beta).$$

Je tedy

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = \beta.$$

Příklad 8.20. Ukažme, že

$$\lim_{x\to\infty} e^{3x+1} = \infty.$$

Skutečně. Položme $\varphi(x) = 3x + 1$, $f(u) = e^u$. Zřejmě $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty = \alpha$, $\lim\limits_{u\to\alpha} e^u = \infty$. Podle věty 8.8 je $\lim\limits_{x\to\infty} e^{3x+1} = \infty$.

Podobně dokážeme, že $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x+1} = 0$.

Je řada vět analogických k větě 8.8. Např. následující věta.

Věta 8.9. (Věta o limitě složené funkce)
Nechť φ, f jsou funkce jedné proměnné a nechť $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Nechť

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \alpha, \quad \lim_{u\to\alpha^+} f(u) = \beta. \tag{8.14}$$

Nechť existuje takové okolí $U_\kappa(a)$ a k němu okolí $U_\varrho^+(\alpha)$ tak, že

$$\varphi(U_\kappa(a) - \{a\}) = U_\varrho^+(\alpha) - \{\alpha\}. \tag{8.15}$$

Potom

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = \beta.$$

8.3. Shrnutí, úlohy

V kapitole je zaveden pojem limity funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ a tento pojem je použit k zavedení pojmu spojitosti funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Jsou vyšetřovány limity funkcí $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ v daném bodě pomocí limit funkcí $f(x)$, $g(x)$ v tomto bodě. Je vyšetřována spojitost funkcí $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ v daném bodě, jsou-li v tomto bodě spojité funkce $f(x)$ a $g(x)$. Rovněž je vyšetřovaná limita složené funkce v daném bodě a spojitost složené funkce v daném bodě.

Úlohy

Vysvětlete pojem limity funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$.

Vysvětlete pojem spojitosti funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}$.

Nechť $f(x) < g(x) < h(x)$, $x \in I$, $x \neq a$. Nechť $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \alpha$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x)$? V případě, že existuje, určete $\lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Jaké věty znáte pro výpočet limity součtu, součinu a podílu dvou funkcí?

Vysvětlete pojem funkce spojité daném v bodě.

Jaké věty znáte o spojitosti součtu, součinu a podílu dvou funkcí?

Co víte o spojitosti složené funkce?

1. Jakou větu znáte pro výpočet limity složené funkce?

Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Vypočítejte $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. [$1$, -1, neexistuje]

Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)$ [7]

b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x+1}{x^2+1}$ [$-\frac{1}{2}$]

c) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{\sin x}{x+1} - 2\right)$ [$\frac{\sin 3}{4} - 2$]

Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^2+x-1}{3x+1}$ [∞]

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^2+1}{4x^2+x-1}$ [$\frac{3}{4}$]

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arctg} x$ [$\frac{\pi}{2}$]

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arccotg} x$ [0]

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ [$+1$, -1]

f) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$ [∞, 0]

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \log x$ [$-\infty$, neexistuje]

h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \log_{\frac{1}{10}} x$ [∞]

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ [neexistuje]

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ [0]

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin \frac{1}{x}$ [neexistuje]

v) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \sin \frac{1}{x}$ [0]

Vypočítejte

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{3x+1}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3x+1}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{3x+1}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{3x+1}{x^2-1}$ [∞, $-\infty$, $-\infty$, ∞]

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}} \frac{3x}{(3x+2)^2}$ [$-\infty$]

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x^2-2x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x^2-2x}\right)$ [$+\infty$, $-\infty$]

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$ [$\frac{1}{3}$]

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{3x+1}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{3x+1}$ [$\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$]

Vypočítejte

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x^2+3})$ [$+\infty$]

Je funkce $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ spojitá v bodě 0? Je funkce $g(x)=f(x)$ pro $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, $g(0)=1$ spojitá v bodě $a=0$?

[$f(x)$ není, $g(x)$ je]

Je funkce

a) $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ spojitá v bodě 0? [není]

b) $g(x)=f(x)$ pro $x\neq 0$, $g(0)=2$ spojitá v bodě 0? [není]

Vypočítejte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{x^2}}$ [1]

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1-x)$ [nemá limitu]

c) $\lim\limits_{x\to e^+}\frac{\ln(x-e)}{x}$ [$-\infty$]

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{\frac{x+1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\frac{x+1}{x}}$ [∞, 0]

Kapitola 9

Elementární funkce.

9.1. Polynom a racionální lomená funkce

V této kapitole pojednáme souhrně o řadě funkcí, které znáte (nebo měli byste znát) z dřívějšího studia. Pojednáme též o funkcích cyklometrických, které se na gymnáziích neprobírají. Začneme s polynomem.

Polynom

Zaveďme si komplexní funkci komplexní proměnné „polynom“.

Nechť $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ jsou komplexní čísla. Jestliže ke každému komplexnímu číslu $x \in \mathbb{C}$ přiřadíme číslo $f(x)$ vztahem

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{9.1}$$

je jím definována komplexní funkce na množině všech komplexních čísel $\mathbb{C}$. Tato funkce se nazývá polynom*. Čísla $a_n, \ldots, a_0$ nazýváme koeficienty polynomu $f(x)$. Číslo a_0 nazýváme absolutním členem polynomu $f(x)$. Jestliže $a_n \neq 0$, polynom $f(x)$ nazýváme polynomem n-tého stupně.*

Např. $f(x) = x^2 + 1$ je polynom 2. stupně. Podle definice stupně není polynomu $f(x) = 0$ přiřazen žádný stupeň. Nazýváme jej *nulovým polynomem*.

Číslo α nazýváme kořenem (nulovým bodem) polynomu $f(x)$, jestliže

$$f(\alpha) = 0.$$

Např. polynom

$$P(x) = x^3 + x \tag{9.2}$$

má kořeny $0, i, -i$, neboť $P(0) = 0$, $P(i) = i^3 + i = 0$. Podobně $P(-i) = (-i)^3 + (-i) = 0$. Lze ukázat, že nemá žádné další kořeny.

Jestliže $P(x)$ je polynom a α je jeho kořen, potom polynom prvního stupně $x - \alpha$ se nazývá *kořenovým činitelem odpovídajícímu kořenu* α.

O polynomu platí tyto věty:

Věta 9.1.
Nechť α *je kořenem polynomu* $f(x)$ *stupně* $n \geq 1$. *Potom existuje takový polynom* $g(x)$ *stupně* $n-1$, *že pro každé komplexní číslo* x *platí*

$$f(x) = (x-\alpha) \cdot g(x).$$

Důkaz: Poněvadž $f(\alpha) = 0$ lze polynom $f(x)$ zapsat jako

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(\alpha) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) - \\ &\quad -(a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0). \end{aligned}$$

Úpravou dostáváme

$$f(x) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{-1}) + \cdots + a_1(x-\alpha).$$

Poněvadž

$$x^k - \alpha^k = (x-\alpha)(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \cdots + \alpha^{k-1}), \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, n,$$

lze psát

$$f(x) = (x-\alpha) \cdot [a_n(x^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1],$$

to jest

$$f(x) = (x - \alpha)g(x),$$

kde $g(x) = a_n(x^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1$.

Příklad 9.1. Polynom

$$f(x) = x^2 - x - 2,$$

má číslo 2 za svůj kořen, neboť $f(2) = 0$. Existuje tedy polynom $g(x)$ stupně 2 tak, že

$$f(x) = (x - 2)g(x).$$

Skutečně. Dělením polynomu $f(x)$ kořenovým činitelem $x - 2$ dostáváme

$$\begin{array}{l}
(\quad x^2 - \quad x - 2\,) : (x - 2) = x + 1 \\
\underline{\pm x^2 \mp 2x \qquad\quad} \\
\qquad\qquad\; x - 2 \\
\qquad\quad \underline{\pm \;\; x \mp 2} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

tj.

$$(x^2 - x - 2) : (x - 2) = x + 1,$$

takže

$$f(x) = (x - 2)(x + 1).$$

Zatím jsme pouze zavedli pojem kořene polynomu, ale nezabývali jsme se problémem existence kořene polynomu. O tom vypovídá následující věta:

Věta 9.2. (Fundamentální věta algebry)
Každý polynom stupně $n \geq 1$ má v oboru komplexních čísel kořen.

Důkaz: Bez důkazu.

Definice 9.1.
Říkáme, že číslo α je *k–násobným kořenem polynomu* $f(x)$, jestliže pro každé komplexní číslo x platí

$$f(x) = (x - \alpha)^k g(x),$$

kde $g(x)$ je takový polynom, že $g(\alpha) \neq 0$.

Příklad 9.2. Polynom $x^3 - 3x^2 + 4$ lze zapsat ve tvaru

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2(x + 1).$$

Je tedy $x = 2$ dvojnásobným a $x = -1$ jednoduchým kořenem polynomu $x^3 - 3x^2 + 4$.

Důsledek. *Polynom n–tého stupně, $n \geq 1$,*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

má právě n kořenů, počítáme-li k–násobný kořen za k kořenů.

Důkaz: Nechť $n = 1$, $a_1 \neq 0$. Potom $f(x) = a_1 x + a_0$ je polynom stupně 1. Potom $f(x) = a_1(x + \frac{a_0}{a_1})$, takže $f(x) = (x - \alpha)a_1$, kde $\alpha = -\frac{a_0}{a_1}$.
Předpokládejme, že tvrzení platí pro polynomy stupně $n - 1$ a dokažme, že pak platí také pro polynomy stupně n. Nechť tedy

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Podle fundamentální věty algebry má polynom $f(x)$ kořen v oboru komplexních čísel, označme jej α. Tedy

$$f(x) = (x - \alpha) g(x),$$

kde $g(x)$ je polynom stupně $n - 1$, který má podle předpokladu $n - 1$ kořenů. Poněvadž α je kořenem polynomu $f(x)$, má $f(x)$ právě n kořenů.

Příklad 9.3. Poněvadž

$$x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = (x + 2)^3 (x - 2),$$

je $x = 2$ jednoduchým a $x = -2$ trojnásobným kořenem tohoto polynomu. Má tedy daný polynom 4 kořeny.

Důsledek. *Jestliže polynom $f(x)$ je roven nule v nekonečně mnoha číslech, pak je to polynom nulový.*

Důkaz: Kdyby polynom byl stupně $n \geq 1$, byl by roven nule nejvýše v n navzájem různých číslech. To je spor, takže polynom má všechny koeficienty nulové. Pro $n = 0$ je věta zřejmá.

Důsledek. *Jestliže dva polynomy $f(x), g(x)$ nabývají stejné hodnoty v nekonečně mnoha číslech, pak mají stejné koeficienty u stejných mocnin x.*

Důkaz: Označme

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Polynom $h(x)$ má nulovou hodnotu v nekonečně mnoha číslech, takže všechny jeho koeficienty jsou nulové. Odtud snadno plyne tvrzení.

Polynom s reálnými koeficienty budeme nazývat reálným polynomem.

Věta 9.3.

Je-li $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ jednoduchým kořenem reálného polynomu

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{9.3}$$

je též číslo $\alpha - i\beta$ jeho kořenem.

Důkaz: Dosazením $x = \alpha + i\beta$ do (9.3) dostáváme

$$\begin{aligned} f(\alpha + i\beta) &= a_n(\alpha + i\beta)^n + a_{n-1}(\alpha + i\beta)^{n-1} + \cdots + a_1(\alpha + i\beta) + a_0 \\ &= A + iB, \end{aligned}$$

kde $A = \Re(f(\alpha + i\beta))$, $B = \Im(f(\alpha + i\beta))$. Poněvadž $f(\alpha + i\beta) = A + iB = 0$, je $A = 0$, $B = 0$. Poněvadž $(\alpha - i\beta)^r$ je číslo komplexně sdružené k číslu $(\alpha + i\beta)^r$ pro $r = 1, 2, \ldots, n$, platí

$$\begin{aligned} f(\alpha - i\beta) &= a_n(\alpha - i\beta)^n + a_{n-1}(\alpha - i\beta)^{n-1} + \cdots + a_1(\alpha - i\beta) + a_0 \\ &= A - iB. \end{aligned}$$

Poněvadž $A = B = 0$, je $f(\alpha - i\beta) = 0$, takže $\alpha - i\beta$ je kořenem polynomu (9.3).

Je tedy polynom (9.3) dělitelný součinem kořenových činitelů

$$(x - (\alpha + i\beta)) \cdot (x - (\alpha - i\beta)) = (x - \alpha)^2 + \beta^2,$$

tedy reálným polynomem druhého stupně. Je tedy

$$f(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2] f_1(x), \tag{9.4}$$

kde $f_1(x)$ je reálný polynom stupně $n - 2$. Kdyby $\alpha + i\beta$ byl dvojnásobným kořenem reálného polynomu $f(x)$, byl by $\alpha + i\beta$ jednoduchým kořenem reálného polynomu $f_1(x)$, určeného vztahem (9.4). Tedy $\alpha - i\beta$ by byl podle věty 9.3 též jeho kořenem. Bylo by tedy možné psát

$$f_1(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2] f_2(x), \tag{9.5}$$

kde $f_2(x)$ je reálný polynom stupně $n-4$. Tedy

$$f(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^2 f_2(x).$$

Tímto jsme dospěli k tomuto závěru

> *Je-li $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, k–násobným kořenem reálného polynomu $f(x)$, je též $\alpha - i\beta$ k–násobným kořenem polynomu $f(x)$.*

Poznámka. Jestliže polynom není reálný, tvrzení věty nemusí být splněno. Např. polynom $f(x) = x^2 + x(1-i) - i$ má číslo i za svůj kořen, avšak $-i$ není jeho kořenem.

Z toho, co jsme o kořenech polynomu uvedli, lze dospět k tomuto tvrzení.

Nechť $f(x)$ je reálný polynom. Nechť $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ jsou všechny jeho navzájem různé reálné kořeny a to α k–násobný, β l–násobný, ... , γ m–násobný. Nechť $a \pm ib, \ldots, c \pm id$ jsou všechny jeho navzájem různé dvojice nereálných komplexně sdružených kořenů. Nechť $a+ib$ je p–násobný,..., $c+id$ je q–násobný kořen. Potom platí

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n \cdot (x-\alpha)^k \cdot (x-\beta)^l \cdot \cdots \cdot (x-\gamma)^m \cdot \\ &\cdot [(x-a)^2 + b^2]^p \cdot \cdots \cdot [(x-c)^2 + d^2]^q. \end{aligned} \tag{9.6}$$

pro každé komplexní číslo x.
Polynom $f(x)$ zapsaný ve tvaru (9.6) nazýváme rozkladem reálného polynomu v reálném oboru.

Hledání kořenů polynomů. Vyslovili jsme sice větu o existenci kořenů polynomů, avšak neuvedli jsme zatím nic o způsobu jejich hledání. Tato problematika je značně rozsáhlá a její výklad v plném rozsahu je nad rámec tohoto textu. Uvedeme zde alespoň několik úvodních poznámek k této problematice.

Hledání kořenů polynomů 1. a 2. stupně by Vám mělo být všem dobře známo. Některým z Vás možná není znám případ, kdy kořeny kvadratické rovnice jsou komplexní. Proto si uvedeme i případ hledání kořenů polynomů 1. a 2. stupně. Zde není uvedeno podrobné odvozování. Výklad týkající se polynomů 2. stupně je nutno chápat jen jako připomenutí poznatků z matematiky v dřívějším studiu. Existují i metody na hledání kořenů polynomů 3. a 4. stupně, kterými lze kořeny určit z jejich koeficientů konečným počtem aritmetických operací a odmocňování. Je dokázáno, že **neexistuje výpočtový postup, kterým by bylo možno v obecném případě určit kořeny každého polynomu stupně většího než 4 z jeho koeficientů provedením konečného počtu aritmetických operací a odmocňování**. Výpočtové postupy, kterými by bylo možné určit kořeny každého polynomu 3. a 4. stupně z jeho koeficientů konečným počtem aritmetických operací a odmocňování, dávají někdy výsledky v nepřehledném tvaru, takže se dává často přednost numerickým postupům, kterými lze přibližně hledat kořeny polynomů i stupňů větších než 2.

Hledání kořenů polynomu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{9.7}$$

kde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, vede na řešení algebraické rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{9.8}$$

Číslo α je kořenem polynomu (9.7), když a jenom když je řešením rovnice (9.8).

Kořeny polynomu 1. stupně. Pro $n = 1$ dostáváme z (9.7) polynom

$$P_1(x) = a_1 x + a_0, \quad a_1 \neq 0. \tag{9.9}$$

Příslušnou algebraickou rovnici

$$a_1 x + a_0 = 0, \quad a_1 \neq 0, \tag{9.10}$$

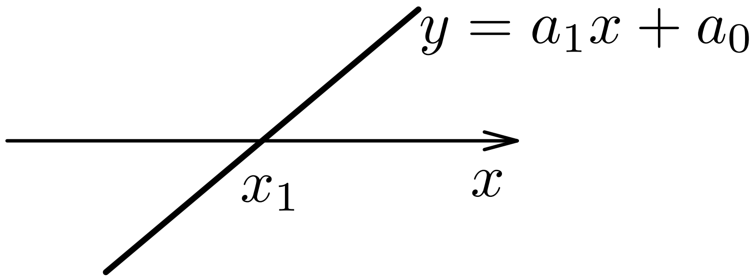
nazýváme *lineární rovnicí*. Má jediný kořen, označíme jej x_1, kde

$$x_1 = -\frac{a_0}{a_1}. \tag{9.11}$$

Polynom $P_1(x) = a_1 x + a_0$, $a_1 \neq 0$, má jediný kořen $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$. Grafem reálného polynomu 1. stupně (9.9) je přímka

$$y = a_1 x + a_0, \tag{9.12}$$

která protíná osu x v bodě $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$. (Viz obr. 9.18.)



Obrázek 9.1: Graf lineární funkce (9.12).

Příklad 9.4. Např. polynom

$$P_1(x) = 2x + 3 \tag{9.13}$$

má právě jeden kořen x_1, který je kořenem rovnice

$$2x + 3 = 0.$$

Tímto kořenem je číslo $x_1 = -\frac{3}{2}$. (Nakreslete si jeho graf.)

Kořeny polynomu 2. stupně. Pro $n = 2$ dostáváme z (9.7) polynom

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_2 \neq 0. \tag{9.14}$$

Kořeny tohoto polynomu jsou řešením kvadratické rovnice

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_2 \neq 0. \tag{9.15}$$

Kořeny x_1, x_2 (ve stručném zápisu $x_{1,2}$) polynomu (9.14), tedy řešení kvadratické rovnice (9.15), lze určit podle vztahu

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}. \tag{9.16}$$

(Vztah (9.16) platí i pro polynomy, které nejsou reálné.)
Číslo

$$D = a_1^2 - 4a_2a_0 \tag{9.17}$$

se nazývá diskriminant kvadratické rovnice (9.15).

Diskuze – reálný polynom 2. stupně. Nechť

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{9.18}$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$, je reálný polynom 2. stupně. Mohou nastat tyto případy.

a) $D = 0$. V tomto případě dostáváme z (9.16)

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2}. \tag{9.19}$$

b) $D > 0$. V tomto případě je $\sqrt{D}$ reálné číslo a z (9.16) dostáváme

$$x_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2a_2}, \qquad x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2a_2}. \tag{9.20}$$

c) $D < 0$. V tomto případě dostáváme z (9.16)

$$x_1 = \frac{-a_1 - i\sqrt{|D|}}{2a_2}, \qquad x_2 = \frac{-a_1 + i\sqrt{|D|}}{2a_2}. \tag{9.21}$$

Příklad 9.5. Určete kořeny polynomů

a) $f(x) = 2x^2 - 3x$,
b) $g(x) = x^2 - 5x + 6$,
c) $h(x) = x^2 + x + 1$.

Řešení.

a) Kořeny polynomu $f(x)$ jsou kořeny rovnice

$$2x^2 - 3x = 0. \tag{9.22}$$

Poněvadž rovnice nemá absolutní člen, není nutno k jejímu řešení použít vztah (9.16). Rovnici (9.22) přepíšeme na tvar

$$x(2x - 3) = 0. \tag{9.23}$$

Poněvadž součin dvou výrazů je roven 0, když alespoň jeden z nich je roven 0, z (9.23) vyplývá $x = 0$ nebo $2x - 3 = 0$. Odtud

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{3}{2}.$$

b) Kořeny polynomu $g(x)$ dostaneme řešením kvadratické rovnice

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Diskriminant D této rovnice počítáme podle (9.17). Dostáváme $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$, tedy $D = 1$. Podle (9.20) dostáváme

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2}, \qquad x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2},$$

tedy

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 3.$$

c) Kořeny polynomu $h(x)$ dostaneme řešením kvadratické rovnice

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Diskriminant této rovnice počítáme podle (9.17). Dostáváme

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1, \text{ takže } D = -3.$$

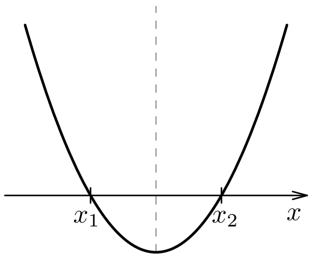
Podle (9.21) dostáváme

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Grafem reálného polynomu 2. stupně (9.14)

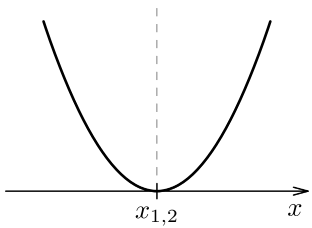
$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0,$$

je parabola, která je pro $a_2 > 0$ *otevřena ve směru kladné osy* y *a pro* $a_2 < 0$ *je otevřena ve směru záporné osy* y*. Označíme* $D = a_1^2 - 4a_2a_0$*. Je-li* $D > 0$*, parabola protíná osu* x *ve dvou různých bodech* x_1, x_2 *daných vztahem* (9.20)*. Je-li* $D = 0$*, parabola se dotýká osy* x *v bodě* $x_1 = x_2$ *daném vztahem* (9.19)*. Je-li* $D < 0$*, parabola neprotíná osu* x*. Viz obr.* 9.2—9.7.



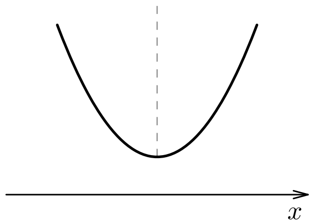
Obrázek 9.2:

$a_2 > 0,\ D > 0$



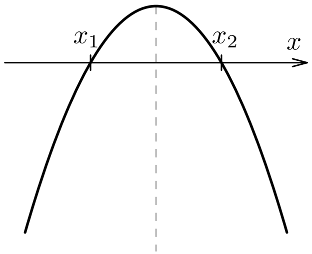
Obrázek 9.3:

$a_2 > 0,\ D = 0$

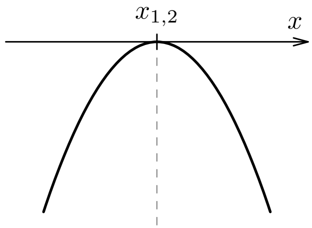


Obrázek 9.4:

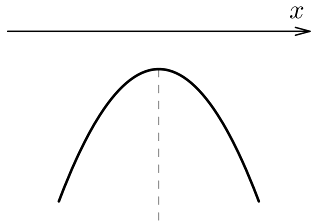
$a_2 > 0,\ D < 0$



Obrázek 9.5:
$a_2 < 0,\ D > 0$



Obrázek 9.6:
$a_2 < 0,\ D = 0$



Obrázek 9.7:
$a_2 < 0,\ D < 0$

Shrňme si nyní dosažené poznatky o hledání kořenů polynomů.

Kořeny polynomů 1. a 2. stupně se hledají výše uvedeným způsobem. Kořeny polynomů 3. a 4. stupně lze sice vždy určit z jejich koeficientů provedením konečného počtu racionálních operací a odmocňování, avšak výsledky bývají vyjádřeny často v komplikovaném tvaru. Pro obecné polynomy stupňů větších než 4 je dokázáno, že nelze nalézt výpočtové postupy, jimiž by bylo možno v obecném případě z jejich koeficientů nalézt kořeny konečným počtem aritmetických operací a odmocňování. To ovšem neznamená, že kořeny některých speciálních polynomů nelze určit konečným počtem zmíněných operací. Je tomu např. pro polynomy $P_n(x) = x^n - a_0$. K určení kořenů polynomů stupňů větších než 2 se používají **numerické metody**. Ucelený výklad těchto metod přesahuje rámec tohoto studijního textu. V dalším pojednání se k této problematice vrátíme. V případě potřeby je možno určit kořeny na počítači, pokud jsou na něm zabudované vhodné programy.

Racionální lomená funkce

Racionální lomenou funkcí nazýváme každou funkci tvaru

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \not\equiv 0,$$

kde $f(x)$ a $g(x)$ jsou polynomy. Poněvadž polynom je definován v každém komplexním čísle, je racionální lomená funkce definována ve všech komplexních číslech v nichž je $g(x) \neq 0$, tj. ve všech číslech x, která nejsou kořeny funkce $g(x)$.

Příklad 9.6. Funkce

$$F(x) = \frac{2x+3}{x^3+x}$$

je racionální lomená funkce. Jmenovatel, funkce $g(x) = x^3 + x$, lze psát ve tvaru $g(x) = x(x+i)(x-i)$. Je tedy $F(x)$ definovaná ve všech komplexních číslech různých od $0, -i, i$.

Nechť čitatel i jmenovatel racionální lomené funkce $F(x)$ mají společného kořenového činitel $x - \alpha$. Zkrátíme-li tímto společným kořenovým činitelem, dostaneme novou racionální lomenou funkce, označme ji $G(x)$. Funkce $F(x)$, $G(x)$ mají stejné hodnoty pro $x \neq \alpha$. Může se ale stát, že funkce $G(x)$ je v α definována, zatímco $F(x)$ není v čísle α definována. V dalším budeme předpokládat, že čitatel a jmenovatel racionální lomené funkce nemají žádný stejný kořen.

Nechť n je stupeň polynomu čitatele a m je stupeň polynomu jmenovatele racionální lomené funkce $F(x)$. Jestliže je $n < m$, funkci $F(x)$ nazýváme **ryze lomenou**, jestliže $n \geq m$, nazýváme funkci $F(x)$ **neryze lomenou**.

Nechť

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

je neryze lomená funkce. Dělením funkce $f(x)$ funkcí $g(x)$ dostaneme

$$f(x) = P(x) \cdot g(x) + Q(x),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Polynom $Q(x)$ je zbytek po dělení, jeho stupeň je menší než stupeň polynomu $g(x)$. Je tedy

$$F(x) = P(x) + \frac{Q(x)}{g(x)}.$$

Funkce $\frac{Q(x)}{g(x)}$ je ryze lomená racionální funkce.

Slovy: Neryze lomenou racionální funkci lze napsat jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Příklad 9.7. Funkce

$$R(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

je neryze lomená. V čitateli je polynom stupně 4, ve jmenovateli je polynom stupně 2. Dělením dostáváme

$$
\begin{array}{rrrrl}
(3x^4 & -2x^3 & & +1\,) & : (x^2+1) = 3x^2 - 2x - 3 + \frac{2x+4}{x^2+1} \\
\pm 3x^4 & & \pm 3x^2 & & \\
\hline
& -2x^3 & -3x^2 & +1 & \\
& \mp 2x^3 & & \mp 2x & \\
\hline
& & -3x^2 & +2x+1 & \\
& & \mp 3x^2 & \mp 3 & \\
\hline
& & & 2x+4 &
\end{array}
$$

9.1.1. Kontrolní úlohy - polynom a racionální funkce

1. V kterých bodech je funkce $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4}$ spojitá? Zdůvodněte.

[ve všech bodech různých od ± 2]

2. Určete kořeny polynomu

a) $x^2 - 7x + 12$ [3, 4]

b) $x^2 + x + 1$ [$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$]

c) $x^3 + 1$ $\qquad [-1,\ \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}]$

3. Rozložte na kořenové činitele polynom

$$x^4 - x^3 + 12x^2 - 13x + 45$$

víte-li, že má kořen $1 + 2i$. $\qquad [(x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i)(x - \frac{-1+i\sqrt{35}}{2})(x - \frac{-1-i\sqrt{35}}{2})]$

4. Dokažte, že polynom

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 9x + 27$$

má dvojnásobný kořen 3.

5. Řešte rovnici

$$x^5 - 7x^4 + 9x^3 - x^2 + 7x - 9 = 0$$

víte-li, že má za kořeny všechny třetí odmocniny z jedné. $\qquad [1,\ \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\ \frac{7\pm\sqrt{13}}{2}]$

6. Rozložte v reálném oboru polynom $x^4 + 1$.
[Návod: $x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2$, $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2$. Odtud $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$.]

7. Rozložte na součet polynomu a ryze lomennou racionální funkci:

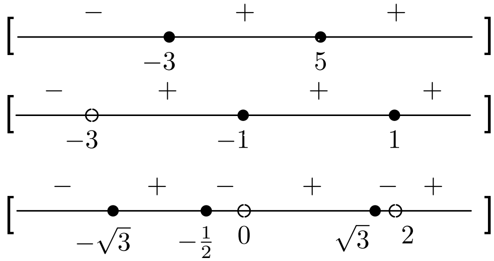
$$\frac{x^4+6x^2+x-2}{x^4-2x^3}$$ $\left[1+\frac{2x^3+6x^2+x-2}{x^4-2x^3}\right]$

8. Určete znamení funkcí

a) $(x^3+27)^3(x-5)^2$

b) $\dfrac{(x^2-1)^2}{x+3}$

c) $\dfrac{(2x+1)^3(x^2-3)^3}{x(x-2)}$



9.1.2. Zavedení odmocnin

Připomeňme si pojem inverzní funkce.

Věta 9.4. (Inverzní funkce)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $I = D(f)$. Označme její odvislý obor (je jím interval) $J = f(I)$. K funkci f existuje funkce inverzní f^{-1}, jejím neodvislým oborem je interval J a odvislým oborem je interval I. Funkce f^{-1} je na svém definičním oboru J spojitá a rostoucí (klesající).

Důkaz: Důkaz provedeme pro funkce f rostoucí na inervalu I. Pro funkce klesající je důkaz analogický. Předpokládejme tedy, že $f(x)$ je na intervalu I spojitá a rostoucí.

Dokažme, že funkce $f^{-1}(x)$ je rostoucí na intervalu J. Nechť $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$. Kdyby bylo $f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2)$, platilo by

$$f(f^{-1}(x_1)) \geq f(f^{-1}(x_2)), \tag{9.24}$$

neboť f je rostoucí na I. Podle (10.19) dostáváme z (9.24) $x_1 \geq x_2$, což je spor s předpokladem, že $x_1 < x_2$. Je tedy funkce $f^{-1}(x)$ rostoucí na intervalu J.

Dokažme dále, že funkce $f^{-1}(x)$ je spojitá na J. Nechť $a \in J$ je libovolný bod, který není jeho pravým koncovým bodem. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Potom $f^{-1}(a) \in I$ a není to pravý koncový bod intervalu I. Jestliže $f^{-1}(a) + \varepsilon \notin I$, označme b libovolný bod z J, pro nějž je $b > a$. Jestliže $f^{-1}(a) + \varepsilon \in I$, položme $b = f(f^{-1}(a) + \varepsilon) \in J$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b)$ je $f^{-1}(x)$ definována. Zároveň z monotónie této funkce plyne

$$f^{-1}(a) \leq f^{-1}(x) < f^{-1}(a) + \varepsilon,$$

to jest

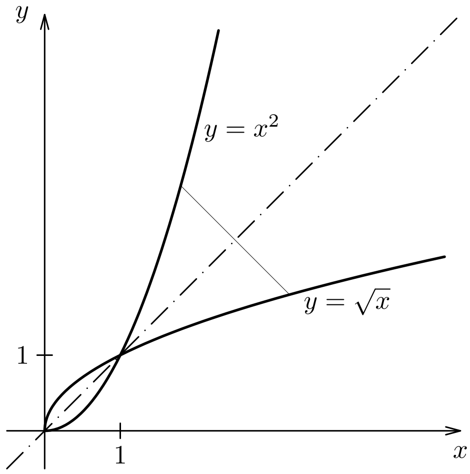
$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(a)| < \varepsilon.$$

Tedy $f^{-1}(x)$ je v bodě a spojitá zprava. Podobně se dokáže, že funkce $f^{-1}(x)$ je spojitá zleva v každém bodě $a \in J$, který není levým koncovým bodem intervalu J. Je tedy $f^{-1}(x)$ funkce spojitá v J.

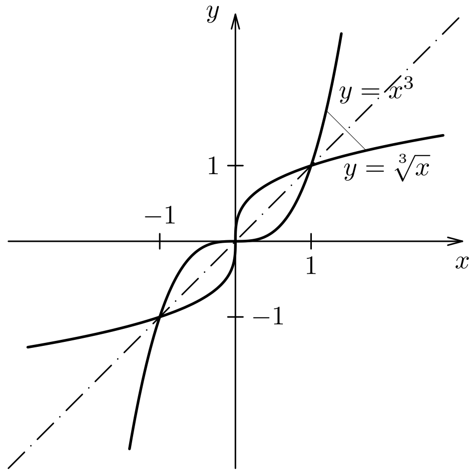
9.2. Funkce $\sqrt[n]{x}$

Uvažujme funkci $y = x^n$, kde n je přirozené. Tato funkce je zřejmě definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$.
Pro n liché *je tato funkce na svém definičním oboru $I = (-\infty, \infty)$ spojitá a rostoucí. Označme $J = (-\infty, \infty)$ obor hodnot této funkce. Proto k ní existuje funkce inverzní na intervalu J. Podle věty 10.6 je tato inverzní funkce rostoucí a spojitá na J. Označíme ji $\sqrt[n]{x}$. Funkce $\sqrt[n]{x}$ pro n liché je lichá.*
Pro n sudé je sice funkce x^n rovněž definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$, avšak není na něm prostá. Např. $(-2)^n = 2^n$ pro každé sudé n. Budeme proto uvažovat její zúžení na interval *$I = \langle 0, \infty)$ na němž je tato zúžená funkce $y = x^n$ rostoucí a spojitá, tedy prostá. Obor hodnot této zúžené funkce je interval $J = \langle 0, \infty)$. Proto k ní existuje funkce inverzní, definovaná na intervalu J. Podle věty 10.6 je tato inverzní funkce rostoucí a spojitá. Označíme ji $\sqrt[n]{x}$.*

Na obr. 10.4 jsou narýsovány grafy funkcí $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, \infty)$ a na obr. 10.5 jsou narýsovány grafy funkcí $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ v kartézském souřadném systému.



Obrázek 9.8: Grafy funkcí x^2 a $\sqrt{x}$.



Obrázek 9.9: Grafy funkcí x^3 a $\sqrt[3]{x}$.

Poznámka. *Uvažme dva případy.*
a) n *sudé. Potom* $\sqrt[n]{x}$ *je definována jen pro* $x \geq 0$*. Je tedy*

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \quad n \textit{ sudé}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Např. $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2.$
b) n *liché. Potom* $\sqrt[n]{x}$ *je definována pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a platí*

$$\textit{je-li } x < 0, \ \textit{potom } \sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}.$$

Pravidla pro počítání s odmocninami. Vzhledem k uvedené poznámce stačí se omezit na odmocniny s nezápornými argumenty.

Věta 9.5. (Odmocniny – pravidla)

Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$. *Potom platí*

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} \tag{9.25}$$

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y} \tag{9.26}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}, \quad \textit{pokud } y \neq 0. \tag{9.27}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} \tag{9.28}$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m} \tag{9.29}$$

Důkaz: Dokažme jen vztah (9.25). Uvědomte si, že z existence $\sqrt[n]{x}$ vyplývá existence $\sqrt[n]{x^m}$. Položme

$$\sqrt[n]{x} = y, \quad \sqrt[n]{x^m} = u \tag{9.30}$$

kde y a u jsou taková reálná čísla, že

$$y^n = x \quad u^n = x^m \tag{9.31}$$

Ze vztahů (9.31) vyplývá

$$y^{nm} = x^m = u^n.$$

To znamená, že

$$(y^m)^n = u^n.$$

Odtud

$$y^m = u.$$

Vzhledem k (9.30) dostáváme dokazovaný vztah

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}.$$

Dokažte další pravidla!

Příklady na procvičení odmocnin

a) $\sqrt{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{125 \cdot 5} = \sqrt{5^4} = 5^2 = 25$

b) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$

c) $\sqrt[3]{-\dfrac{81}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$

d) $\sqrt[3]{32\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{32^2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^{10} \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^{11}}} = 2\sqrt[6]{2^5}$

e) $\left(\sqrt[3]{-8}\right)^2 = (-\sqrt[3]{8})^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

f) $\left(\sqrt{9}\right)^4 = \left(\sqrt{3^2}\right)^4 = 3^4 = 81$

g) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[4]{3}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{-4}}$ neexistuje v $\mathbb{R}$

i) $\sqrt{8}+\sqrt{72}=\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{6^2\cdot 2}=2\sqrt{2}+6\sqrt{2}=8\sqrt{2}.$

j) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^2=\dfrac{x^2+2x+1}{x}$ pro $x>0$

k) $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt[6]{x^3}\sqrt[6]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2=$

$=\left(\dfrac{\sqrt[6]{x^5}-1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2=\dfrac{\sqrt[3]{x^5}-2\sqrt[6]{x^5}+1}{\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[3]{x^3}-2\sqrt[6]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=$

$=x-2\sqrt[6]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x-2\sqrt[6]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$ pro $x>0$

nebo

$\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2=x-2\sqrt{x}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x-2\sqrt[6]{x^3}\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x}}=$

$x-2\sqrt[6]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$ pro $x>0$

9.3. Mocniny s racionálním exponentem

V dřívějším pojednání jsme si ukázali zavedení celočíselných mocnin reálných čísel a zavedení operací jejich násobení a umocňování. Byly uvedeny jejich Vám dobře známé vlastnosti. Mocniny reálných čísel nyní rozšíříme i pro racionální mocnitele a později i pro mocniny s reálným exponentem, a to tak, že se zachovají základní vlastnosti mocnin s celočíselným mocnitelem. Vlastnosti odmocnin reálných čísel uvedené ve větě 9.5 nás vedou k rozšíření celočíselných mocnin reálných čísel na mocniny reálných čísel s racionálním exponentem.

Definice 9.2.
Nechť $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ a nechť x je kladné reálné číslo. Definujme $x^{\frac{p}{q}}$ vztahem

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}. \tag{9.32}$$

Pro $x = 0$, $p, q \in \mathbb{N}$ položme $x^{\frac{p}{q}} = 0$.

Pro $x > 0$ je při této definici splněn nezbytný požadavek platnosti vztahu

$$x^r = x^s,$$

kde r, s jsou odlišné zápisy téhož racionálního čísla. Nechť tedy $r = \frac{pk}{qk}$, pro $k \in \mathbb{N}$, je odlišné vyjádření téhož racionálního čísla $\frac{p}{q}$. Potom podle (9.32) je

$$x^{\frac{pk}{qk}} = \sqrt[qk]{x^{pk}}.$$

Avšak $\sqrt[qk]{x^{pk}} = \sqrt[qk]{(x^p)^k}$ a podle (9.25) je $\sqrt[qk]{(x^p)^k} = \sqrt[q]{x^p}$. Je tedy

$$x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{pk}{qk}} \qquad \text{pro } k \in \mathbb{N}. \tag{9.33}$$

Ukažme si nyní následující vlastnosti takto zavedených mocnin reálných čísel s racionálním exponentem. Především si všimněme, že pro $q = 1$ je $x^{\frac{p}{q}} = x^p$, tedy mocnina s celočíselným exponentem. Každé pravidlo pro počítání s mocninami s racionálním exponentem platí tedy i pro celočíselné mocniny.

1) Nechť $x > 0$, $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{u}{v}$, kde $p, u \in \mathbb{Z}$, $q, v \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s}, \qquad \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}.$$

Skutečně, postupně dostáváme

$$x^r \cdot x^s = x^{\frac{p}{q}} \cdot x^{\frac{u}{v}} = x^{\frac{pv}{qv}} \cdot x^{\frac{qu}{qv}} = \sqrt[qv]{x^{pv}} \cdot \sqrt[qv]{x^{qu}}$$

Podle (9.26) je tedy

$$x^r \cdot x^s = \sqrt[qv]{x^{pv} \cdot x^{qu}}.$$

Poněvadž $pv, uq \in \mathbb{Z}$, lze psát

$$x^r \cdot x^s = \sqrt[qv]{x^{pv+qu}}.$$

Užitím (9.32) je tedy
$$x^r \cdot x^s = x^{\frac{pv+qu}{qv}},$$
tj.
$$x^r \cdot x^s = x^{\frac{pv}{qv}+\frac{qu}{qv}}.$$
Dospěli jsme ke vztahu
$$x^r \cdot x^s = x^{r+s}.$$
Vztah $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$ se dokazuje obdobně.

2) Nechť $x > 0$, $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{u}{v}$, kde $p, u \in \mathbb{Z}$, $q, v \in \mathbb{N}$. Potom platí
$$(x^r)^s = x^{rs}.$$
Skutečně. postupně dostáváme
$$(x^r)^s = (x^{\frac{p}{q}})^{\frac{u}{v}} = \sqrt[v]{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^u} = \sqrt[v]{\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^u}.$$
Podle (9.25) dostáváme odtud
$$(x^r)^s = \sqrt[v]{\sqrt[q]{x^{pu}}}.$$
Podle (9.28) dostáváme odtud
$$(x^r)^s = \sqrt[vq]{x^{pu}},$$

takže užitím (9.32)

$$(x^r)^s = x^{\frac{pu}{vq}} = x^{\frac{p}{q}\cdot\frac{u}{v}} = x^{r\cdot s}.$$

3) Nechť $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Nechť $x > 1$. Ukažme, že

$$x^r < x^s.$$

Nechť $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{u}{v}$, kde $p, u \in \mathbb{Z}$, $q, v \in \mathbb{N}$. Potom

$$x^r = \sqrt[q]{x^p}, \qquad x^s = \sqrt[v]{x^u}.$$

Podle (9.33) lze zapsat x^r, x^s ve tvaru

$$x^r = \sqrt[qv]{x^{pv}}, \qquad x^s = \sqrt[qv]{x^{qu}}.$$

Poněvadž $r < s$, tj. $\frac{p}{q} < \frac{u}{v}$, je

$$pv < qu.$$

poněvadž $x > 1$, je $x^{pv} < x^{qu}$. Poněvadž qv–tá odmocnina je funkce rostoucí, je

$$x^r = \sqrt[qv]{x^{pv}} < \sqrt[qv]{x^{qu}} = x^s.$$

Podobně platí: Nechť $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$, $0 < x < 1$, potom

$$x^r > x^s.$$

Obdržené výsledky shrneme do následující věty.

Věta 9.6. Mocniny s racionálním exponentem

Nechť $r, s \in \mathbb{Q}$, $x > 0$. *Potom platí*

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s},$$

$$\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s},$$

$$(x^r)^s = x^{rs},$$

Je-li $x > 1$ *a* $r < s$ *je* $x^r < x^s$.

Je-li $0 < x < 1$ *a* $r < s$ *je* $x^r > x^s$.

9.4. Mocniny s reálným exponentem

Zavedeme si nyní mocniny kladných reálných čísel s reálným exponentem jako rozšíření mocnin kladných reálných čísel s racionálním exponentem. Jeden z možných způsobů tohoto rozšíření je uveden v následující definici.

Definice 9.7. (Zavedení $x^\gamma,\ \gamma \in \mathbb{R}$)
Nechť $x > 0$. Označme

$$D = \{x^\alpha :\ \alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha \le \gamma\}.$$

a) *Nechť $x > 1$. Položme*

$$x^\gamma = \sup D.$$

b) *Nechť $0 < x < 1$. Položme*

$$x^\gamma = \inf D.$$

c) *Nechť $x = 1$. Položme*

$$x^\gamma = 1.$$

d) *Nechť $x = 0,\ \gamma > 0$. Položme $0^\gamma = 0$.*
e) 0^0 *není definováno.*

Ukažme, že takto zavedené číslo x^γ má tuto vlastnost.

Nechť $x > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Označme

$$H = \{x^\beta : \beta \in \mathbb{Q},\ \beta > \gamma\}.$$

Potom platí
$\tilde{\text{a}}$) Nechť $x > 1$. Potom platí

$$x^\gamma = \inf H.$$

$\tilde{\mathrm{b}})$ Nechť $0 < x < 1$. Potom platí

$$x^\gamma = \sup H.$$

Dokažme $\tilde{\mathrm{a}})$.

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a k němu určeme $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$n > \frac{x^\gamma(x-1)}{\varepsilon}.$$

Zvolme α, β tak, že $\alpha < \gamma < \beta$, $0 < \beta - \alpha < \frac{1}{n}$. Potom platí

$$1 < x^{\beta-\alpha} < x^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta. \tag{9.34}$$

Tedy

$$x^{\beta-\alpha} - 1 < \delta.$$

Z (9.34) dostáváme $x = (1+\delta)^n > 1 + n\delta$. Odtud

$$\delta < \frac{x-1}{n}.$$

Ukažme nyní, že $x^\beta - x^\alpha < \varepsilon$.

$$x^\beta - x^\alpha = x^\alpha(x^{\beta-\alpha} - 1) < x^\alpha \cdot \delta < x^\alpha \frac{x-1}{n} < x^\gamma \frac{x-1}{n} < \varepsilon.$$

Poněvadž $x^\beta - x^\gamma < x^\beta - x^\alpha$ pro všechna α, dostáváme

$$x^\beta - x^\gamma < \varepsilon.$$

K libovolnému $\varepsilon > 0$ lze tedy nalézt β tak, že $x^\beta - x^\gamma < \varepsilon$. Je tedy $\inf H = x^\gamma$.

Poznámka. Důlaz $\tilde{\mathrm{b}}$) je analogický.

Pro mocniny reálných čísel s reálným exponentem se definují aritmetické operace a operace umocňování pomocí mocnin s racionálním exponentem. Tuto konstrukci zde nebudeme uvádět. Uvedeme si pouze vlastnosti mocnin reálných čísel s reálným exponentem.

Na množině mocnin reálných čísel lze zavést aritmetické operace a jejich umocňování reálnými čísly rozšířením odpovídajících operací zavedených pro racionální čísla. Pro tyto mocniny platí tato pravidla.

Věta 9.8. Mocniny s reálným exponentem

Nechť $r, s \in \mathbb{R}$, $x > 0$. *Potom platí*

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s},$$

$$\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s},$$

$$(x^r)^s = x^{rs},$$

Je-li $x > 1$ *a* $r < s$, *je* $x^r < x^s$.

Je-li $0 < x < 1$ *a* $r < s$, *je* $x^r > x^s$.

9.5. Exponenciální funkce a logaritmus

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$. Definicí 9.4.7 jsme zavedli a^x pro každé $x \in \mathbb{R}$. Vztahem

$$y = a^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

je tedy pro $a > 0$, $a \neq 1$ definována funkce. Nazýváme ji *exponenciální funkcí o základu* a. Oborem jejich funkčních hodnot je interval $(0, \infty)$.

Požadavek $a > 0$ je nutný, neboť a^x je pro všechna $x \in \mathbb{R}$ definovaná jen pro $a > 0$. Pro $a = 1$ je sice a^x definováno pro všechna x, ale v tomto případě je $1^x = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tuto funkci neřadíme mezi exponenciální funkce.

Exponenciální funkci o základu $a = 10$ *nazýváme dekadickou exponenciální funkcí.*

Z definice mocniny a^x *lehce vyplývá její spojitost v každém bodě* x.
Pro $a > 1$ *je funkce* $y = a^x$ *rostoucí, pro* $0 < a < 1$ *je funkce* $y = a^x$ *klesající. Existuje proto k ní funkce inverzní. Označíme ji* $y = \log_a x$. *Je tedy* $\log_a x$ *pro* $x \in (0, \infty)$ *to číslo* $y \in (-\infty, \infty)$, *pro něž* $a^y = x$.

Příklad 9.8. $\log_{10} 100 = 2$, neboť $10^2 = 100$, $\log_{10} 0{,}01 = -2$, neboť $10^{-2} = 0{,}01$.

Ukažme si některé vlastnosti funkce $y = log_a x$.

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$. Dále nechť $x_1, x_2 > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \tag{9.35}$$
$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \tag{9.36}$$
$$\log_a x_1^s = s \log_a x_1. \tag{9.37}$$

Dokažme např. (9.35). Položme

$$\log_a x_1 = y_1, \quad \log_a x_2 = y_2, \quad \log_a(x_1 x_2) = y. \tag{9.38}$$

Potom

$$x_1 = a^{y_1}, \quad x_2 = a^{y_2}, \quad x_1 x_2 = a^y. \tag{9.39}$$

Odtud dostáváme

$$x_1x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2} = a^y.$$

Tedy

$$y = y_1 + y_2.$$

Vzhledem k (9.38) dostáváme

$$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Vztahy (9.36), (9.37) se dokazují analogicky.

Ukažme ještě jednu vlastnost.

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. *Potom*

$$x = a^{\log_a x}.$$

Skutečně. Položme

$$\log_a x = y. \tag{9.40}$$

Je tedy $x = a^y$. Dosadíme-li sem za y (9.40), dostáváme

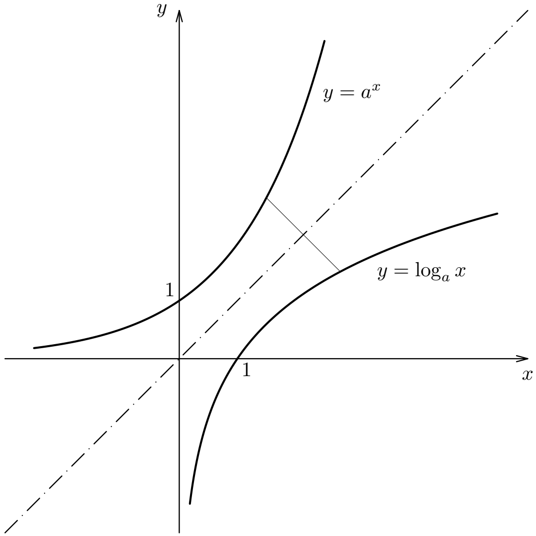
$$x = a^{\log_a x}.$$

Shrňme dosažené výsledky.

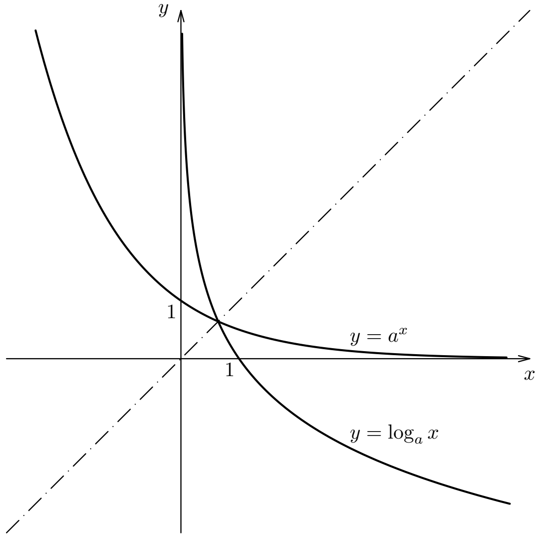
Funkce $y = a^x$, kde a je kladná reálná konstanta různá od jedné, je spojitá. Pro $a > 1$ je rostoucí na intervalu $(-\infty, \infty)$ a pro $0 < a < 1$ je klesající na intervalu $(-\infty, \infty)$. Oborem jejich hodnot je v obou případech interval $(0, \infty)$. Nazývá se exponenciální funkcí se základem a. Speciálním případem je funkce $y = a^x$ pro $a = 10$, tedy funkce $y = 10^x$. Nazývá se dekadická exponenciální funkcí.

K funkci a^x existuje funkce inverzní, značíme ji $\log_a x$ (čteme logaritmus x při základě a). Je definována na intervalu $(0, \infty)$. Funkce $\log_a x$ je pro $a > 1$ rostoucí a pro $0 < a < 1$ klesající na intervalu $(0, \infty)$. Je v něm spojitá.

Na obr. 10.6 jsou grafy funkcí $y = a^x$, $y = \log_a x$ pro $a > 1$ v kartézském souřadném systému. Na obr. 10.7 jsou grafy funkcí $y = a^x$, $y = \log_a x$ pro $0 < a < 1$.



Obrázek 9.10: Graf funkce a^x a $\log_a x$ pro $a > 1$.



Obrázek 9.11: Graf funkce a^x a $\log_a x$ pro $0 < a < 1$

Nechť a, b jsou kladná reálná čísla různá od jedné. Jsou-li $x_1, x_2 \in (0, \infty), s \in \mathbb{R}$ potom platí

$$\begin{aligned}\log_a(x_1 \cdot x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2, && (9.41)\\ \log_a \frac{x_1}{x_2} &= \log_a x_1 - \log_a x_2, && (9.42)\\ \log_a x^s &= s \cdot \log_a x. \log_b x = \log_a x \cdot \log_b a. && (9.43)\end{aligned}$$

Funkci $y = \log_{10} x$ nazýváme dekadickým logaritmem a většinou ji zkráceně zapisujeme jako $y = \log x$.

Eulerovo číslo. Velký význam má exponenciální funkce se základem iracionálního čísla, zvaného Eulerovo číslo. Značí se e. Toto číslo lze definovat jako

$$e = \sup A, \qquad \text{kde } A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Označíme-li $B = \{(1 + \frac{1}{n-1})^n, \ n \in \mathbb{N}\}$, platí $\inf B = e$. Dále platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n, \qquad n = 2, 3, \dots$$

Lze ukázat, že

$$e \doteq 2{,}718281828459045235 4\dots$$

Funkce

$$y = e^x, \qquad (-\infty, \infty),$$

je tedy speciálním případem funkce $y = a^x$ *pro* $a > 1$. *Jejím definičním oborem je* $(-\infty, \infty)$. *Oborem jejích funkčních hodnot je interval* $(0, \infty)$. *Nazývá se* přirozenou exponenciální funkcí.

K funkci $y = e^x$ *existuje funkce inverzní. Místo* $y = \log_e x$ *se většinou píše*

$$y = \ln x, \qquad x \in (0, \infty).$$

Nazývá se přirozenou logaritmickou funkcí.

Obecná mocnina. Funkci

$$y = x^s, \qquad s \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, \infty)$$

definujeme vztahem

$$x^s = \left(e^{\ln x}\right)^s = e^{s \ln x}.$$

Odtud je vidět, že je to funkce spojitá na intervalu $(0, \infty)$.

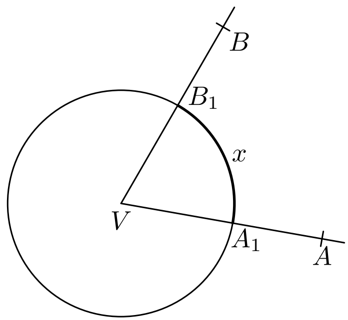
9.6. Trigonometrické funkce

Dříve než začneme s vlastním výkladem, zopakujme si některé Vám dobře známé pojmy.

9.7. Úhel v obloukové míře.

Úhly měříme jak ve stupních tak i v míře obloukové. Nechť AVB je libovolný úhel.

Oblouková míra úhlů. Sestrojme v rovině AVB jedotkovou kružnici (to jest kružnici o poloměru 1) se středem v bodě V, viz obr. 9.12. Označme A_1 (B_1) její průsečík s přímkou VA (VB). Potom velikostí úhlu AVB v obloukové míře rozumíme délku x kruhového oblouku A_1B_1 vyznačeného na obrázku (9.12). Jedotkový úhel obloukové míry se nazývá radián. Označuje se *rad*. Je tedy 1 rad velikost úhlu, který na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu vytíná oblouk jednotkové délky. Při označování velikosti úhlu se většinou vynechává označení rad. Tedy např. pravý úhel v obloukové míře je roven $\frac{\pi}{2}rad$, zkráceně zapsáno $\frac{\pi}{2}$.



Obrázek 9.12: Úhel v obloukové míře.

Stupňová velikost úhlů. Jednotkový stupeň úhlové míry, zvaný (úhlový) stupeň je roven $\frac{1}{90}$ pravého úhlu. Jako menší jednotky stupňové velikosti úhlu se používají minuty a vteřiny. Stupně, minuty a vteřiny vyznačujeme jako „$^\circ$, $'$, $''$“. Platí $1^\circ = 60', 1' = 60''$. Je tedy

$$1^\circ = 60' = 3600''.$$

Velikost úhlu AVB ve stupňové míře nazýváme nezáporné číslo, které vyjadřuje kolikrát je úhel AVB větší (menší) než jeden stupeň (míněno úhlový stupeň).

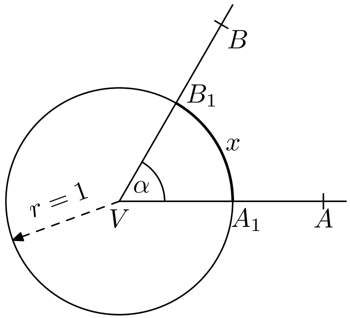
Vztah mezi velikosti úhlu v obloukové míře a velikosti úhlu v míře stupňové. Úhlu 360° ve stupňové míře odpovídá úhel 2π v obloukové míře. Tedy mezi velikosti úhlu α ve stupňové míře a velikosti x téhož úhlu v obloukové míře platí vztah

$$\alpha : x = 180 : \pi.$$

(Viz obr. 9.13.) Odtud dostáváme např. $x = \frac{\pi}{180}\alpha$. Např. pro úhel $\alpha = 90^\circ$ dostáváme $x = \frac{\pi}{2}$.

V následující tabulce 9.1 je vyznačen vztah mezi velikosti úhlů v míře stupňové a v míře obloukové pro některé význačné úhly.

Orientovaný úhel. Orientovaným úhlem v rovině rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem. V této dvojici první polopřímku nazýváme počátečním ramenem a druhou koncovým ramenem orientovaného úhlu. Společný počátek těchto polopřímek



Obrázek 9.13: Vztah mezi velikosti úhlu ve stupních a v obloukové míře.

úhel ve stupních	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
úhel v radiánech	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Tabulka 9.1: Vztah mezi velikostmi úhlů ve stupních a v radiánech.

nazýváme vrcholem úhlu. Orientovaný úhel s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB budeme označovat $\widehat{AVB}$.

Uvažujme orientovaný úhel $\widehat{AVB}$. Jeho velikostí v obloukové míře rozumíme každé číslo tvaru (viz.(9.13))

$$\alpha + 2k\pi \tag{9.44}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ a α určíme takto:

a) Jestliže $VA = VB$, je $\alpha = 0$.

b) Jestliže $VA \neq VB$ je α velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB v kladném smyslu, to jest proti pohybu hodinových ručiček. Je tedy $0 \leq \alpha < 2\pi$. Takto definované číslo α se nazývá základní velikostí orientovaného úhlu.

Součet a rozdíl orientovaných úhlů. Nechť $\widehat{AVB}, \widehat{BVC}$ jsou orientované úhly. Koncové rameno prvního z nich je počátečním ramenem druhého z nich. Jejich součtem se nazývá orientovaný úhel $\widehat{AVC}$. Jestliže velikost prvního z nich je $\alpha + 2k_1\pi$ a velikost druhého je $\beta + 2k_2\pi$, kde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, potom jejich sučtem je úhel $\alpha + \beta + 2k\pi$, kde $k = k_1 + k_2$. Jestliže úhel $\widehat{AVC}$ je součtem úhlů $\widehat{AVB}$ a $\widehat{BVC}$, pak úhel $\widehat{BVC}$ nazýváme rozdílem úhlů $\widehat{AVC}$ a $\widehat{AVB}$.

Periodické funkce Dříve než si zavedeme goniometrické funkce, zopakujme si pojem periodické funkce.

Funkci $f(x)$ nazýváme periodickou, *jestliže má tuto vlastnost: Existuje takové číslo* ω, *zvané perioda funkce* $f(x)$, *že platí: Je-li funkce* $f(x)$ *definovaná v čísle* x, *je definovaná ve všech číslech* $x + k\omega, k \in \mathbb{Z}$ *a platí*

$$f(x + k\omega) = f(x), k \in \mathbb{Z}. \tag{9.45}$$

Nejmenší číslo ω *pro něž platí (9.45) se nazývá* základní periodou.

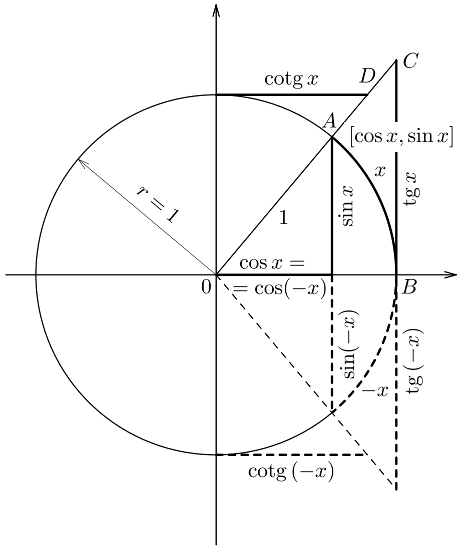
Zavedení funkcí $\sin x, \ \cos x, \ \operatorname{tg} x, \ \operatorname{cotg} x$

Zabývejme se nyní trigonometrickými funkcemi, zvanými někdy též funkce *goniometrické*. Omezíme se na funkce $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$. V pravoúhlém souřadném systému sestrojme kružnici o jednotkovém poloměru se středem v počátku. Zvolme libovolně x a sestrojme polopaprsek vycházející z počátku, který svírá s kladnou osou úhel x. Tento polopaprsek protne kružnici v jednom bodě. Jeho souřadnice označme $\cos x, \sin x$ (viz obr. 10.8). Tyto souřadnice závisí na x, takže $\cos x$ a $\sin x$ jsou funkce definované pro každé reálné x.

Pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$ definujeme další trigonometrické funkce $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ vztahy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

pro ty úhly x, pro něž je jmenovatel různý od 0. Zavedení funkcí $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ je patrno též z obr.10.8



Obrázek 9.14: Zavedení funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$.

Některé význačné vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$.

Trigonometrické funkce jsou dostatečně známy ze střední školy a proto zde jen zopakujeme jejich základní vlastnosti.

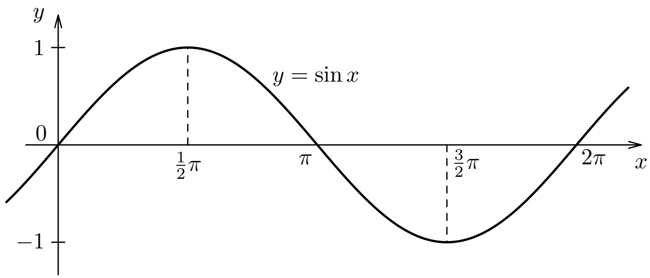
Z definice a z konstrukce je vidět, že $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin 2\pi = 0$, $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos(-2\pi) = 1$. Z definice je vidět, že obě funkce jsou periodické s periodou 2π a že $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) =$

$\cos x$. Pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ nabude $\sin x$ všech hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a $\cos x$ všech hodnot z intervalu $\langle -1, 0 \rangle$. Pro $x \in \langle \pi, \frac{3\pi}{2} \rangle$ nabude $\sin x$ všech hodnot z intervalu $\langle -1, 0 \rangle$, $\cos x$ všech hodnot z intervalu $\langle -1, 0 \rangle$; konečně pro $x \in \langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \rangle$ nabude $\sin x$ všech hodnot z intervalu $\langle -1, 0 \rangle$ a $\cos x$ všech hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

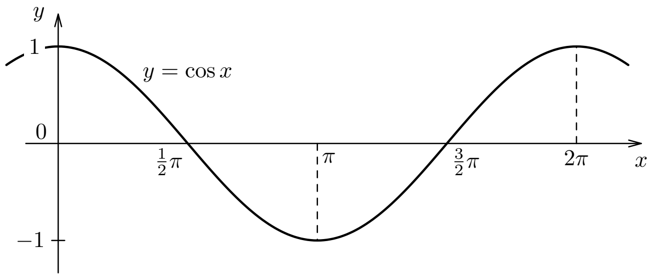
Dále z obr. 10.8, je patrno, že funkce $\sin x, \cos x$ jsou periodické s periodou 2π. Funkce $\sin x$ je rostoucí v intervalech $< -\pi/2 + k2\pi, \pi/2 + k2\pi >, k \in \mathbb{N}$ a klesající v intervalech $\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + k2\pi, k \in \mathbb{N}$.

Funkce $\sin x$ je kladná pro úhly v prvním a ve druhém kvadrantu a záporná pro úhly ve třetím a ve čtvrtém kvadrantu. Funkce $\cos x$ je kladná pro úhly v prvním a ve čtvrtém kvadrantu a je záporná pro úhly ve druhém a ve třetím kvadrantu.

Na obr.9.15 je vykreslen graf funkce $\sin x$ a na obr.9.16 je vykreslen graf funkce $\cos x$.



Obrázek 9.15: Graf funkce $\sin x$.



Obrázek 9.16: Graf funkce $\cos x$.

Ze střední školy jsou známy **součtové vzorce:**

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \sin x_2 \cdot \cos x_1, \tag{9.46}$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2. \tag{9.47}$$

Z těchto vzorců lze lehce odvodit řadu dalších velice užitečních vztahů.

Klademe-li v těchto vzorcích $x_1 = x_2 = x$, dostaneme z (9.46)

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Dosadíme-li $x_1 = x_2 = x$ do vzorce pro kosinus rozdílu do (9.47), dostáváme

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1.}$$

Tento vzorec se vzorcem pro $\cos 2x$ dává:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.}$$

Ze vzorců pro $\sin(x_1 \pm x_2)$ a $\cos(x_1 \pm x_2)$ snadno dostaneme:

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \cdot \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \cos \frac{x_1 - x_2}{2},$$
$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \cdot \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - x_2}{2},$$

$$\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cdot \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \cos \frac{x_1 - x_2}{2},$$
$$\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \cdot \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Spojitost funkcí $\sin x$ a $\cos x$.

Věta 9.9. *Funkce $\sin x$ je v čísle 0 spojitá.*

Důkaz: (Sleduj obr. 10.8.) Buď $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Z definice a konstrukce je patrno, že zde platí $0 < \sin x < x$. Zvolme $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ libovolně a položme $\delta = \varepsilon$. V $U_\delta^+(0)$ je funkce $\sin x$ definována a platí $|\sin x - 0| = |\sin x| = \sin x < x < \varepsilon$, takže funkce $\sin x$ je v 0 zprava spojitá. Poněvadž funkce $\sin x$ je lichá, lehce nahlédneme, že funkce $\sin x$ je v čísle 0 také zleva spojitá a proto je v čísle 0 spojitá.

Věta 9.10. *Funkce $\cos x$ je v čísle 0 spojitá.*

Důkaz: Buď $\varepsilon > 0$. Zvolme číslo $\delta = \sqrt{2\varepsilon} > 0$. Pak v okolí $U_\delta^+(0)$ je funkce $\cos x$ definována a je v tomto okolí

$$|\cos x - 1| = |1 - \cos x| = 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} = \varepsilon.$$

Je tedy funkce $\cos x$ v čísle 0 zprava spojitá. Poněvadž

$$\cos(x) = \cos(-x),$$

je funkce $\cos x$ i zleva spojitá a proto je i spojitá v bodě 0.

Věta 9.11. *Funkce $\sin x$ je spojitá ve všech bodech.*

Důkaz: Nechť a je libovolné číslo. Dokažme, že je v něm funkce $\sin x$ spojitá. Z definice spojitosti funkce vyplývá, že funkce $\sin x$ je spojitá v bodě a když a jenom když funkce $\sin(a + h)$ je spojitá v bodě $h = 0$. Podle (9.46) dostáváme

$$\sin(a + h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h. \tag{9.48}$$

Poněvadž funkce $\sin h, \cos h$ jsou funkce spojité v bodě $h = 0$, dostáváme odtud, že pravá strana v (9.48) je spojitá v bodě $h = 0$, takže funkce $\sin x$ je spojitá v bodě a.

Věta 9.12. *Funkce $\cos x$ je spojitá ve všech bodech.*

Důkaz: Skutečně. Spojitost funkci $\cos x$ vyplývá ze vztahu $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ a z věty o spojitosti složené funkce.

Funkce $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$.

Pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$ jsme definovali trigonometrické funkce $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ vztahy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

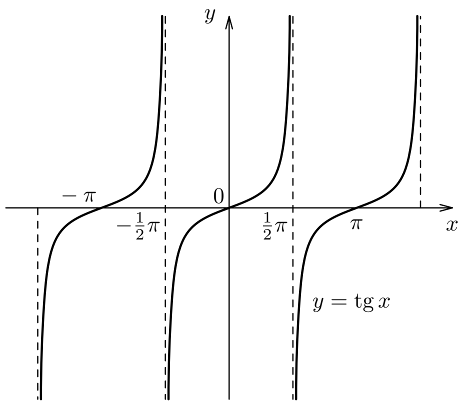
pro ty úhly x, pro něž je jmenovatel různý od 0. Jejich zavedení je patrno též z obr.10.8

Některé význačné vlastnosti funkcí $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Funkce $\operatorname{tg} x$ je definována pro všechna x různá od lichých násobků $\frac{\pi}{2}$, funkce $\operatorname{cotg} x$ je definována pro x různá od násobků π. Funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou kladné pro úhly pro x v prvním a ve třetím kvadrantu v němž jsou definovány a záporné pro úhly ve druhém a ve třetím kvadrantu v němž jsou definovány. Tyto funkce jsou zřejmě periodické s periodou π.

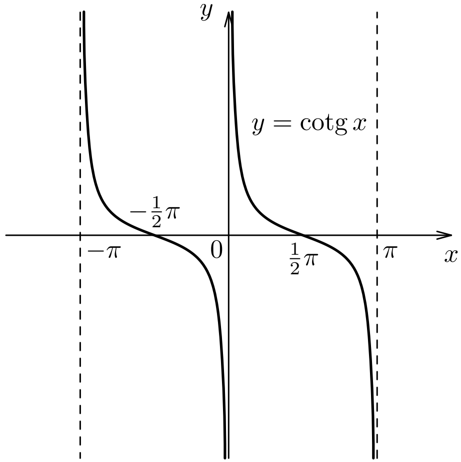
Podobným způsobem jako u funkcí $\sin x$ a $\cos x$ lze ukázat, že funkce $\operatorname{tg} x$ stále roste v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a nabude všech reálných hodnot. Funkce $\operatorname{tg} x$ není definovaná pro liché násobky čísla π. Podobně funkce $\operatorname{cotg} x$ stále klesá v intervalu $(0, \pi)$ a nabývá zde všech reálných hodnot.

Graf funkce $\operatorname{tg} x$ je na obr. 9.17.



Obrázek 9.17: Graf funkce $\operatorname{tg} x$.

Graf funkce $\operatorname{cotg} x$ je na obr.(9.18).



Obrázek 9.18: Graf funkce $\operatorname{cotg} x$.

Ukázali jsme, že funkce $\sin x, \cos x$ jsou spojité na intervalu $(-\infty, \infty)$. Funkce $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ jsou tedy jako podíl spojitých funkcí funkce spojité v každém bodě svého definičního oboru. Můžeme tedy vyslovit tento závěr:

Věta 9.13.

Trigonometrické funkce jsou spojité ve všech číslech, ve kterých jsou definovány.

Důkaz: Důkaz vychází z věty o spojitosti podílu a z vět předcházejících.

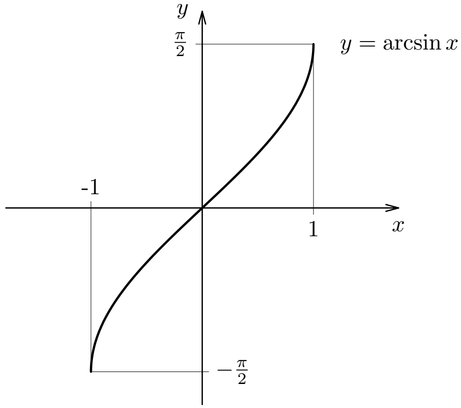
9.7.0.1. Funkce cyklometrické

Zabývejme se především existencí funkcí inverzních k funkcím $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$.

Funkce $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$. nejsou prosté, tedy k nim neexistují funkce inverzní. Budeme proto uvažovat tyto funkce pouze na intervalech, na nichž jsou prosté.

Funkce $arcsinx$ Uvažujme funkci $y = \sin x$, zúženou na interval $< -\pi/2,\ \pi/2 >$. Tato funkce je na tomto intervalu spojitá a rostoucí. Oborem jejich hodnot je interval $< -1, 1 >$. Existuje tedy funkce k ní inverzní, označme ji $arcsin$. Jejím neodvislým oborem je interval $< -1,\ 1 >$ a odvislým oborem je interval $< -\pi/2, \pi/2.$. Na svém definičním obor je spojitá a rostoucí. V kartézském souřadném systém je její graf symetrický vzhledem k ose $y = x$ s grafem funkce $sinx$, zúžené na interval $< -\pi/2, \pi/2. >$. Její graf je na obr.10.9

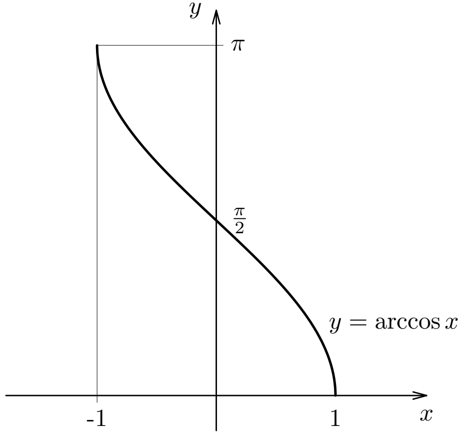
$\arcsin x$ *je ten úhel z intervalu* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, *jehož sinus má hodnotu* x.



Obrázek 9.19: Graf funkce $\arcsin x$.

Funkce $arccosx$ Uvažujme funkci $y = \cos x$, zúženou na interval $< 0, \ \pi >$. Tato funkce je na tomto intervalu spojitá a klesající. Oborem jejich hodnot je interval $< -1, 1 >$. Existuje tedy funkce k ní inverzní, označme ji $arccos$. Jejím neodvislým oborem je interval $< -1, \ 1 >$ a odvislým oborem je interval $< 0, \pi >$. Na svém definičním oboru je spojitá a klesající. V kartézském souřadném systém je její graf symetrický vzhledem k ose $y = x$ s grafem funkce $cosx$, zúžené na interval $< 0, \pi >$. Její graf je na obr.10.10

$\arccos x$ *je ten úhel z intervalu* $\langle 0, \pi \rangle$*, jehož kosinus má hodnotu* x*.*



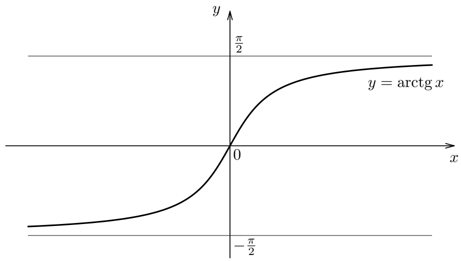
Obrázek 9.20: Graf funkce $\arccos x$.

9.7.0.2. Funkce $\operatorname{arctg} x$

Funkce $\operatorname{tg} x$ je v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ spojitá a rostoucí a nabývá zde všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Tedy k ní existuje funkce inverzní definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$. Tuto funkci označujeme $\operatorname{arctg} x$. Podle věty 10.6 je to funkce spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$ a je v něm rostoucí. Nabývá všech hodnot z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Její graf v kartézském souřadném systému se dostane překlopením grafu funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ okolo přímky $y = x$ (viz obr. 10.11). Geometrický význam funkce $\operatorname{arctg} x$ je tento:

$\operatorname{arctg} x$ *je ten úhel z intervalu* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$*, jehož tangens má hodnotu* x*.*

Graf funkce $\operatorname{arctg} x$ je na obr,10.11



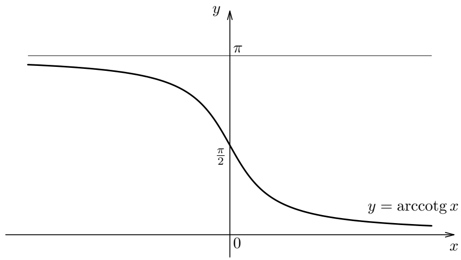
Obrázek 9.21: Graf funkce $\operatorname{arctg} x$.

Funkce $\operatorname{cotg} x$ je v intervalu $(0, \pi)$ spojitá a klesající a nabývá v něm všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Tedy k ní existuje funkce inverzní definovaná v intervalu $(-\infty, \infty)$. Tuto funkci označujeme $\operatorname{arccotg} x$. Podle věty 10.6 je to funkce spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$ a je v něm klesající. Nabývá všech hodnot z intervalu $(0, \pi)$. Její graf v kartézském souřadném systému se dostane překlopením grafu funkce $f(x) = \operatorname{cotg} x$, $x \in (0, \pi)$ okolo přímky $y = x$ (viz obr. 10.12). Geometrický význam funkce $\operatorname{arccotg} x$ je tento:

$\operatorname{arccotg} x$ *je ten úhel z intervalu* $(0, \pi)$*, jehož kotangens má hodnotu* x*.*

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ se nazývají *funkce cyklometrické*. Dosavadní výsledky o spojitosti lze shrnout takto:

Věta 9.14. *Funkce cyklometrické jsou spojité na svém definičním oboru.*



Obrázek 9.22: Graf funkce $\operatorname{arccotg} x$.

Věta 9.15. *Funkce cyklometrické jsou spojité na svém definičním oboru.*

Kapitola 10

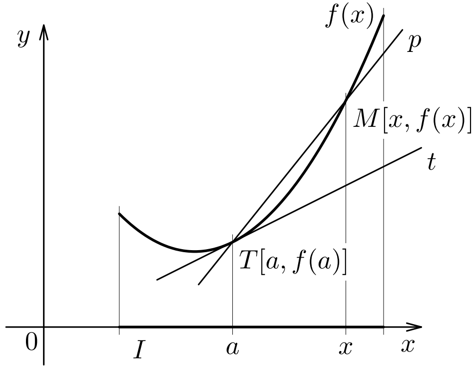
Derivace reálné funkce reálné proměnné

10.1. Zavedení pojmu derivace funkce

Začneme s touto úlohou.

Nechť $y = f(x)$ je reálná funkce reálné proměnné definovaná na intervalu I. Nechť a je vnitřním bodem intervalu I. Upřesněme si intuitivně chápaný pojem tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[a, f(a)]$ (viz obr. 10.1)

Názor nás vede k této definici. Zvolme bod $x \in I$, $x \neq a$, a uvažujme přímku p jdoucí body $T[a, f(a)]$, $M[x, f(x)]$ (p je sečnou grafu funkce $f(x)$). Její směrnice, označme



Obrázek 10.1: Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[a, f(a)]$.

ji $k(x)$ (to jest tangens úhlu, který svírá přímka p s kladným směrem osy x), je rovna

$$k(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ .$$

Lze tedy při pevně zvoleném a považovat $k(x)$ za funkci proměnné x. Tato funkce není v bodě a definovaná.

Existuje-li

$$k = \lim_{x \to a} k(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

pak přímku jdoucí bodem $T[a, f(a)]$ se směrnicí k nazveme tečnou grafu funkce $y = f(x)$ v bodě T. Přímku na ni kolmou nazveme normálou křivky $y = f(x)$ v bodě T. (Podobně mluvíme o pravé (levé) polotečně grafu funkce $y = f(x)$.)

V řadě aplikací se setkáváme s touto úlohou. Nechť $f(x)$ je daná funkce. Má se určit limita (resp. limita zprava (zleva)) v bodě a funkce $F(x)$ definované vztahem

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pro tyto limity, pokud existují, zavádíme pojem derivace funkce $f(x)$ v bodě a následující definicí.

Definice 10.1. (Definice derivace funkce)

Nechť $f(x)$ je funkce, a je reálné číslo. Jestliže existuje číslo, označme jej $f'^{+}(a) \in \mathbb{R}$ ($f'^{-}(a) \in \mathbb{R}$) tak, že

$$f'^{+}(a) = \lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \left(f'^{-}(a) = \lim_{x \to a^{-}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \right) \tag{10.1}$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací zprava* funkce $f(x)$ v čísle a (*derivací zleva* funkce $f(x)$ v čísle a).

Jestliže funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci zprava $f'^{+}(a)$ a derivaci zleva $f'^{-}(a)$ a jestliže $f'^{+}(a) = f'^{-}(a)$, nazýváme tuto společnou hodnotu *derivací funkce* $f(x)$ v bodě a a značíme ji $f'(a)$. Je tedy

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Dohoda o označování. Jestliže uvažujeme funkci $f(x)$ na intervalu I, jehož levým (pravým) koncovým bodem je bod a, budeme někdy používat označení $f'(a)$ místo $f'^{+}(a)$ ($f'^{-}(a)$).

Poznámka 1. Všimněmě si, že funkce

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

vystupující v definici derivace funkce $f(x)$ v (10.1) není definovaná v bodě a, neboť jmenovatel je v bodě a roven 0.

Poznámka 2. Položíme-li v (10.1) $x = a + h$, můžeme derivaci funkce $f(x)$ v čísle a definovat též jako

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{10.2}$$

Na h se můžeme dívat jako na přírustek neodvosle proměnné x, to jest h je číslo, o něž se změní x–ová souřadnice, přejdeme-li z bodu a do bodu $a + h$. Přírustek neodvisle proměnné se často označuje též jako $\triangle x$. Čitatel v (10.2) je pak přírustkem odvisle proměnné y a označujeme jej obvykle $\triangle y$, resp. $\triangle f$. Tedy Δy je hodnota, o níž se změní funkční hodnota při přechodu z bodu a do bodu $a + h$. Tedy (10.2) lze zapsat jako

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Poznámka 3. *Pojem derivace funkce má značné uplatnění v ekonomických aplikacích.* Vyjdeme z příkladu, který nám pomůže pochopit problematiku využití derivací v některých ekonomických aplikacích.

Nechť $s = s(t)$ vyjadřuje ujetou vzdélenost auta za dobu t. Nechť t_1, t_2, kde $t_1 < t_2$, jsou dva časové okamžiky. Potom za dobu $t_2 - t_1$ auto ujede vzdálenost $s(t_2) - s(t_1)$.

Číslo

$$\frac{s(t_2) - s(t_1}{t_2 - t_1}$$

vyjadřuje tedy průměrnou rychlost, kterou auto dosáhne v době od časového okamžiku t_1 do časového okamžiku t_2, tj. za dobu $t_2 - t_1$. Potom derivaci $s'(t_0)$ funkce $s(t)$ v bodě t_0, tj.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

můžeme nazvat *okamžitou rychlostí* auta v časovém okamžiku t_0.

Jestliže proměnné x a y značí nějaké ekonomické veličiny, vyjadřuje funkce $y = f(x)$ jejich vzájemnou závislost. Potom $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ vyjadřuje průměrný a $f'(a)$ okamžitý poměr změny těchto ekonomických veličin. V závislosti na ekonomické aplikaci dostává derivace $f'(a)$ vhodný ekonomický název.

Jestliže $y = f(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a)$, potom přímka jdoucí bodem $T[a, f(a)]$ se směrnicí $f'(a)$ je tečnou ke grafu $y = f(x)$ v jejím bodě T. Přímka k ní kolmá, jdoucí bodem T, je její normálou v bodě T.

Derivace funkce $f(x) = c$, $c \in (-\infty, \infty)$

Nechť $f(x) = c$, $c \in (-\infty, \infty)$. Potom podle definice 10.1 dostáváme pro $a \in$

$(-\infty, \infty)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = 0.$$

Je tedy

$$c' = 0, \quad \textit{kde } c \in \mathbb{R}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Derivace funkce $f(x) = x^n$

Určeme derivaci funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, v bodě $a \in (-\infty, \infty)$. Podle definice je

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

Poněvadž

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

a limita funkce nezáleží na hodnotě funkce v bodě, v němž limitu počítáme, dostáváme odtud

$$f'(a) = \lim_{x \to a}(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

Vzhledem ke spojitosti polynomu v bodě a je $f'(a)$ rovna funkční hodnotě polynomu v závorce v bodě a, takže

$$f'(a) = na^{n-1}.$$

Funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, má v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$ derivaci

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{10.3}$$

Příklad 10.1. Vypočítejte derivaci funkce $f(x) = x^3$ v jejím bodě $x = 4$.

Řešení. Podle (10.3) dostáváme v obecném bodě $x \in (-\infty, \infty)$

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Tedy $f'(4) = 3 \cdot 4^2$, tj. $f'(4) = 48$.

Poznámka. Místo $f'(4)$ můžeme psát $(x^3)'_{x=4}$.

Zaveďme si nyní pojem derivace funkce $f(x)$ vyšších řádů.

Derivace funkce vyšších řádů. *Nechť funkce $f(x)$ má derivaci v každém bodě intervalu $I_1 \subseteq I = D_f$. Přiřadíme-li ke každému $x \in I_1$ hodnotu $f'(x)$, je na I_1 definována funkce $f'(x)$.*

Má-li funkce $f'(x)$ derivaci v každém bodě $x \in I_2 \subseteq I_1$, potom tuto derivaci nazýváme druhou derivací funkce $f(x)$ na I_2 a značíme ji $f''(x)$ nebo $f^{(2)}(x)$.

Analogicky definujeme $f^{(n)}(x)$ pro $n = 3, 4, \dots$. Podobně definujeme derivace vyšších řádů dané funkce zleva a zprava.

Úmluva. Řekneme-li, že funkce $f(x)$ má derivaci na intervalu I, bude to znamenat, že má derivaci v každém vnitřním bodě intervalu I a jestliže levý (pravý) koncový bod patří do I, potom má v něm derivaci zprava (zleva). Podobně pro vyšší derivace.

Poznámka. Pro n-tou derivaci funkce $f(x)$, $n > 1$, se používá zápis $f^{(n)}(x)$, resp. $f''(x)$ pro $n = 2$, $f'''(x)$ pro $n = 3$, $\dots$. Čteme pak f s čárkou, f se dvěma čárkami, f se třemi čárkami, atd. Pro $n > 3$ nebývá zvykem používat čárek pro označení derivace.

Příklad 10.2. Funkce

$$y = 3x^4$$

má v intervalu $(-\infty, \infty)$ derivace

$$y' = 12x^3, \quad y'' = 36x^2, \quad y''' = 72x, \quad y^{(4)} = 72, \quad y^{(k)} = 0 \text{ pro } k \geq 5.$$

Zabývejme se nyní otázkou, zda všechny funkce mají v každém bodě derivaci. Odpověď je záporná, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 10.3. Zjistěme, zda funkce $f(x) = |x|$ má v bodě 0 derivaci.

Řešení. Zřejmě $f(x) = x$ pro $x > 0$ a $f(x) = -x$ pro $x < 0$. Podle definice derivace dostáváme

$$f'^{+}(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$
$$f'^{-}(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Poněvadž $f'^{+}(0) \neq f'^{-}(0)$, nemá funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0 derivaci.

O vztahu mezi spojitostí funkce $f(x)$ v daném bodě a a existencí derivace funkce $f(x)$ v bodě a platí tato věta.

Věta 10.1. (Vztah spojitost – existence derivace)

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a)$. Potom $f(x)$ je v bodě a spojitá. Je-li funkce $f(x)$ v bodě a spojitá, nemusí mít v bodě a derivaci.

Důkaz: a) Nechť funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a)$. Dokažme, že pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Nechť $x \neq a$. Podle věty 8.2 je

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}(f(x) - f(a) + f(a)) = \\
&= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a)\right] = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + \lim_{x\to a} f(a) = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a) + \lim_{x\to a} f(a) = \\
&= f'(a)\cdot 0 + f(a) = \\
&= f(a)
\end{aligned}
$$

Má-li tedy funkce $f(x)$ v bodě a derivaci, je v něm funkce $f(x)$ spojitá.

Příklad 10.3 ukazuje, že funkce může být spojitá v daném bodě i když v něm nemá derivaci.

Poznámka. Podobně platí: Jestliže funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci zprava (zleva), potom je funkce $f(x)$ v bodě a spojitá zprava (zleva).

Ukažme si pravidla pro výpočet derivací součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí.

Věta 10.2.

Nechť $f(x)$, $g(x)$ *mají v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *derivace* $f'(a)$, $g'(a)$ *a nechť* $c \in \mathbb{R}$ *je libovolné číslo. Potom platí:*

$$[c \cdot f(x)]'_{x=a} = c \cdot f'(a), \tag{10.4}$$

$$[f(x) \pm g(x)]'_{x=a} = f'(a) \pm g'(a), \tag{10.5}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]'_{x=a} = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \tag{10.6}$$

Je-li $g(a) \neq 0$, *potom platí:*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=a} = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}. \tag{10.7}$$

Důkaz: Dokažme jen vzorec (10.5) pro derivaci součtu. Platí

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))'_{x=a} &= \lim_{x \to a} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right]. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Poněvadž existují limity

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a},$$

dostáváme z (10.8) podle věty 8.2

$$[f(x)+g(x)]'_{x=a} = f'(a)+g'(a).$$

Poznámka. Analogická věta platí pro derivaci zleva a pro derivaci zprava v daném bodě.

Příklad 10.4. Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ mají v bodě a derivace $f'(a)$, $g'(a)$ a nechť c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Potom funkce

$$F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$

má v bodě a derivaci a platí

$$F'(a) = c_1 f'(a) + c_2 g'(a). \tag{10.9}$$

Skutečně. Podle (10.4) je

$$[c_1 f(x)]'_{x=a} = c_1 f'(a), \qquad [c_2 g(x)]'_{x=a} = c_2 g'(a).$$

Odtud a z (10.5) vyplývá (10.9).

Vztah (10.5) lze zobecnit: Nechť $f_1(x), \dots, f_n(x)$ jsou funkce mající v bodě a derivace $f_1'(a), \dots, f_n'(a)$. Nechť $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Potom funkce

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

má v bodě a derivaci a platí

$$f'(a) = c_1 f_1'(a) + \cdots + c_n f_n'(a).$$

Příklad 10.5. Vypočítejte derivaci polynomu

$$f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 2x - 1$$

v bodě 2.

Řešení. Dostáváme

$$f'(2) = 4 \cdot (4 \cdot x^3)_{x=2} - 3 \cdot (2 \cdot x)_{x=2} + 2 \cdot (1).$$

Vyčíslením

$$f'(2) = 128 - 12 + 2 = 118.$$

Příklad 10.6. Nechť $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$. Potom pro $x \in (-\infty, \infty)$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 4x - 4, \\ f''(x) &= 6x + 4, \\ f'''(x) &= 6, \\ f^{(n)}(x) &= 0 \quad \text{pro } n \geq 4. \end{aligned}$$

Příklad 10.7. Vypočítejme druhou derivaci funkce

$$F(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}.$$

Řešení. Označme $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 2$. Poněvadž $g(x) = 0$ jen pro $x = -2$, je $D_F = (-\infty, \infty) - \{-2\}$. Podle (10.7) je pro $x \in D_F$

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 1.$$

Podle (10.7) dostáváme

$$F'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)},$$

tj.

$$F'(x) = \frac{2x \cdot (x + 2) - (x^2 - 1) \cdot 1}{(x + 2)^2}.$$

Úpravou

$$F'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}, \quad x \in D_F. \tag{10.10}$$

Funkce $F(x)$ má první derivaci určenou vztahem (10.10) pro $x \in D_F$.

Podobně vypočítáme i $F''(x)$. První derivaci (po zavedení derivací složených funkcí lze výpočet realizovat jednodušeji) $F'(x)$ přepíšeme na tvar

$$F'(x) = \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

kde $f_1(x) = x^2 + 4x + 1$, $g_1(x) = x^2 + 4x + 4$. Podle (10.7) dostáváme

$$F''(x) = \frac{f_1'(x)g_1(x) - f_1(x)g_1'(x)}{g_1^2(x)}.$$

Tedy

$$F''(x) = \frac{(2x+4)\cdot(x^2+4x+4) - (x^2+4x+1)\cdot(2x+4)}{(x+2)^4}.$$

Po úpravě dostáváme

$$F''(x) = \frac{6x+12}{(x+2)^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2\},$$

tj.

$$F''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

Cílem našich dalších úvah bude

- odvodit větu o derivování složené funkce
- odvodit větu o derivování inverzní funkce
- odvodit derivace elementárních funkcí.

Derivace složené funkce

Začněme se složenou funkcí. Znovu si připomeňme zavedení pojmu „složené funkce“ a větu o spojitosti složené funkce.

Nechť A je neodvislý obor funkce $u = \varphi(x)$, $B = H_\varphi$ její odvislý obor. Nechť dále funkce $f(u)$ je definovaná na množině B. Ke každému číslu $x \in A$ přiřaďme číslo $F(x) = f[\varphi(x)]$, tj. hodnotu funkce $f(u)$ v čísle $\varphi(x)$. Tím je definovaná na množině A nová funkce $F(x)$, zvaná složená funkce. Funkci $f(u)$ nazýváme její vnější složkou a funkci $u = \varphi(x)$ nazýváme její vnitřní složkou.

Jako příklad uveďme funkci $y = \sin(3x^2+1)$. Jde o složenou funkci. Její vnitřní složkou je funkce $u = 3x^2 + 1$, definovaná na intervalu $A = (-\infty, \infty)$. Odvislý oborem funkce $u = 3x^2 + 1$ je interval $B = \langle 1, \infty)$. Na množině B je definovaná funkce $f(u) = \sin u$.

Tedy $y = sin(3x^2 + 1)$ je definovaná na intervalu A a oborem funkčních hodnot je interval $\langle -1, 1 \rangle$. (Zdůvodněte!)

V dřívějším výkladu jsme si dokázali tuto větu.

Věta 10.3. *Nechť funkce $u = \varphi(x)$ je spojitá v bodě a a funkce $y = f(u)$ je spojitá v bodě $\alpha = \varphi(a)$. Potom složená funkce $F(x) = f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě a.*

Další analogické věty jsou věty, v nichž se o funkcích f, φ předpokládá jen jednostranná spojitost.

O derivování složené funkce platí tato věta.

Věta 10.4. (Derivace složené funkce)

Nechť funkce $u = \varphi(x)$ má derivaci v čísle a a něchť funkce $f(u)$ má derivaci v čísle $\alpha = \varphi(a)$. Potom složená funkce $F(x) = f(\varphi(x))$ má v čísle a derivaci a platí

$$F'(a) = f'(\alpha) \cdot \varphi'(a), \quad \textit{tj.} \;\; F'(a) = f'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a). \tag{10.11}$$

Důkaz: Položme

$$R(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(\alpha)}{y-\alpha} - f'(\alpha) & \text{pro } y \neq \alpha, \\ 0 & \text{pro } y = \alpha. \end{cases} \tag{10.12}$$

Poněvadž

$$\lim_{y \to \alpha} R(y) = f'(\alpha) - f'(\alpha) = 0 = R(\alpha),$$

je funkce $R(y)$ spojitá v bodě α. Poněvadž funkce $\varphi(x)$ má derivaci v bodě $x = a$, je podle věty 10.1 spojitá v bodě a. Je tedy i složená funkce $R(\varphi(x))$ spojitá v bodě a. Užitím (10.12) lze funkci $R(\varphi(x))$ zapsat takto

$$R(\varphi(x)) = \begin{cases} \frac{f(\varphi(x))-f(\varphi(a))}{\varphi(x)-\varphi(a)} - f'(\alpha) & \text{pro } \varphi(x) \neq \varphi(a), \\ 0 & \text{pro } \varphi(x) = \varphi(a). \end{cases} \tag{10.13}$$

Pro $x \neq a$, $\varphi(x) \neq \varphi(a)$ lze užitím (10.13) psát

$$[R(\varphi(x)) + f'(\alpha)]\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))}{x - a}. \tag{10.14}$$

Avšak, jak zjistíme dosazením $\varphi(x) = \varphi(a)$ do (10.14), vidíme, že (10.14) platí i pro $\varphi(x) = \varphi(a)$, $x \neq a$. Dále dostáváme (pokud jednotlivé limity existují)

$$F'(a) = \lim_{x\to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))}{x - a}. \tag{10.15}$$

Užitím (10.14) dostáváme z (10.15) s ohledem na (10.13)

$$F'(a) = \lim_{x\to a}[R(\varphi(x)) + f'(\alpha)]\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}. \tag{10.16}$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to a} R(\varphi(x)) = R(\varphi(a)) = R(\alpha) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} = \varphi'(a)$, dostáváme z (10.16)

$$F'(a) = f'(\alpha)\varphi'(a),$$

tj.

$$F'(a) = f'(\varphi(a))\varphi'(a).$$

Příklad 10.8. Vypočítejte derivaci funkce $F(x) = (x^2 + 1)^7$ v čísle x.

Řešení. Funkce $F(x)$ je složenou funkcí. Její vnější složkou je funkce $f(u) = u^7$ a vnitřní složkou je funkce $u = \varphi(x)$, kde $\varphi(x) = x^2 + 1$. Podle věty 10.4 dostáváme $F'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$. Poněvadž $f'(u) = 7u^6$ a $\varphi'(x) = 2x$, dostáváme $F'(x) = 7(x^2 + 1)^6 \cdot 2x$, takže po úpravě dostáváme

$$F'(x) = 14x(x^2 + 1)^6, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Je řada analogických vět k větě 10.4. Jde v nich o derivování složených funkcí v případě, že a, resp. α, jsou koncovými body intervalů, na nichž se výpočty provádějí. Uveďme si bez důkazu následující větu.

Věta 10.5. *Nechť funkce $u = \varphi(x)$ má derivaci v čísle a a nechť funkce $f(u)$ má derivaci zprava (zleva) v čísle $\alpha = \varphi(a)$. Nechť existuje takové okolí $U_\kappa(a)$, že $\varphi(U_\kappa(a)) = U_\rho^+(\alpha)$, pro nějaké ρ. Potom složená funkce $F(x) = f(\varphi(x))$ má v bodě a derivaci a platí*

$$F'(a) = f'^{+}(\alpha) \cdot \varphi'(a), \quad \text{to jest } F'(a) = f'^{+}(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a). \tag{10.17}$$

Poznámka. Budeme-li se držet úmluvy, že v koncových bodech intervalu píšeme místo jednostranné derivace derivaci, můžeme vztah (10.17) nahradit vztahem (10.11), takže lze psát

$$F'(a) = f'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a).$$

Derivace inverzní funkce.

S pojmem inverzní funkce jste se již setkali dříve při studiu středoškolské matematiky. Byl zopakován i v textu „Matematika A“. Ve stručnosti si pojem inverzní funkce ještě jednou zopakujme. Navíc si odvoďme souvislost mezi derivací funkce $f(x)$ v bodě $x = \alpha$ a funkce k ní inverzní $f^{-1}(y)$ v bodě $a = f(\alpha)$.

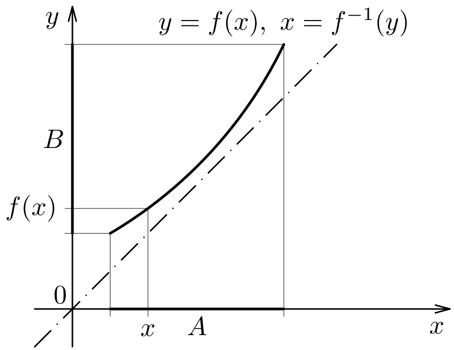
Nechť funkce $y = f(x)$ je definovaná na množině A a je na ní prostá. To znamená, že pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Označme $B = f(A)$. *Ke každému $y \in B$ přiřaďme to číslo $x \in A$, pro nějž je $f(x) = y$.* Tím jsme zavedli pravidlo, jimž ke každému $y \in B$ je přiřazeno $x \in A$. Je tak definovaná nová funkce, označme ji f^{-1}, jejímž neodvislým oborem je množina B a odvislým oborem je množina A. Ponecháme-li označení y pro proměnnou s oborem B a x pro proměnnou s oborem A, píšeme

$$x = f^{-1}(y), \qquad y \in B, \ x \in A.$$

V definici inverzní funkce je podstatný předpoklad, že f je na svém definičním oboru *prostá.* Takovými funkcemi jsou např. funkce ryze monotónní na svém definiční oboru.

To nám umožní odvodit vzorce pro derivování některých elementárních funkcí.

Na obr. 10.2 je znázorněn graf funkce $y = f(x)$ rostoucí na intervalu $A = D(f)$, tedy graf funkce prosté. Graf funkce $x = f^{-1}(y)$ je totožný s grafem funkce $y = f(x)$, pokud bychom *proti zvyklostem* znázornili neodvislý obor na ose y a odvislý obor na ose x.



Obrázek 10.2: Graf funkcí $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$.

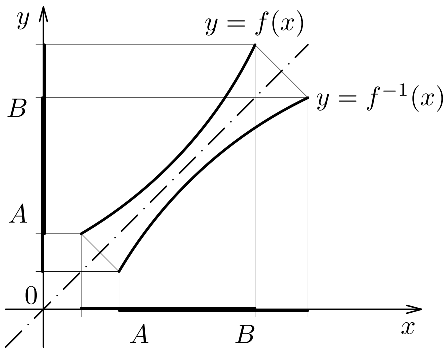
Z definice inverzní funkce vyplývá

- je-li $a \in D(f),$ potom $a = f^{-1}(f(a)),$ (10.18)
- je-li $\alpha \in D(f^{-1}),$ potom $\alpha = f(f^{-1}(\alpha)).$ (10.19)

Označíme-li x neodvisle proměnnou jak pro funkci f, tak i pro funkci f^{-1}, zapíšeme obě funkce takto

$$y = f(x), \quad x \in A,\ y \in B, \qquad y = f^{-1}(x), \quad x \in B,\ y \in A. \tag{10.20}$$

Jestliže jejich neodvislé obory vyznačíme na vodorovné ose, jsou grafy funkcí (10.20) symetrické s osou symetrie $y = x$, viz. obr. 10.3. Graf inverzní funkce $f^{-1}(x)$ jsme dostali překlopením grafu $f(x)$ kolem přímky $y = x$.



Obrázek 10.3: Graf funkcí $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$.

Poznámka. Je-li prostá funkce daná rovnicí

$$y = f(x), \tag{10.21}$$

dostaneme k ní funkci inverzní tak, že z rovnice (10.21) vypočítáme x pomocí y. Pojem inverzní funkce vede k zavedení nových funkcí.

Zopakujme si následující větu o vzájemném vztahu mezi spojitosti funkce $f(x)$ a k ní inverzní funkce $f^{-1}(x)$.

Věta 10.6. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $I = D(f)$. Označme její odvislý obor (je jím interval) $J = f(I)$. K funkci f existuje funkce inverzní f^{-1}, jejím neodvislým oborem je interval J a odvislým oborem je interval I. Funkce f^{-1} je na svém definičním oboru J spojitá a rostoucí (klesající).*

Ukažme si nyní vztah mezi derivací dané funkce a funkce k ní inverzní. Platí následující věta.

Věta 10.7. (Derivace inverzní funkce)

Nechť f je funkce spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť oborem jejich funkčních hodnot je interval $J = f(I)$. Nechť a je takový vnitřní bod intervalu J, že v čísle $\alpha = f^{-1}(a) \in I$ má funkce f derivaci $f'(\alpha) \neq 0$. Pak funkce f^{-1} má v čísle a derivaci a platí

$$[f^{-1}(a)]' = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Důkaz: Definujme

$$F(y) = \frac{y - \alpha}{f(y) - f(\alpha)} \text{ pro } y \in I,\, y \neq \alpha, \quad F(\alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)} \text{ pro } y = \alpha.$$

Vzhledem k ryzí monotónnosti funkce f na intervalu I, je $f(y) - f(\alpha) \neq 0$. Funkci

$F(y)$ lze pro $y \neq \alpha$ přepsat takto

$$F(y) = \frac{1}{\frac{f(y)-f(\alpha)}{y-\alpha}}.$$

Poněvadž dle předpokladu má funkce f v bodě α derivaci, je

$$\lim_{y\to\alpha} \frac{f(y)-f(\alpha)}{y-\alpha} = f'(\alpha).$$

Poněvadž $f'(\alpha) \neq 0$, je podle (10.7)

$$\lim_{y\to\alpha} F(y) = \lim_{y\to\alpha} \frac{1}{\frac{f(y)-f(\alpha)}{y-\alpha}} = \frac{1}{f'(\alpha)} = F(\alpha).$$

Je tedy funkce $F(y)$ spojitá v bodě α. Funkce f^{-1} je podle věty 10.6 spojitá na intervalu J, tedy i v čísle a. Je tedy i funkce $F(f^{-1}(x))$ spojitá v bodě a. Je tedy

$$\lim_{x\to a} F(f^{-1}(x)) = F(f^{-1}(a)) = F(\alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Užitím tohoto vztahu dostáváme

$$[f^{-1}(a)]' = \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(a))} =$$

$$= \lim_{x\to a} F(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

K větě 10.7 můžeme vyslovit řadu analogických vět. Vyslovme tuto.

Věta 10.8. (Derivace inverzní funkce)
Nechť f je funkce spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť oborem jejích funkčních hodnot je interval $J = f(I)$. Nechť a je levý (pravý) koncový bod intervalu J a nechť v čísle $\alpha = f^{-1}(a)$ má funkce f derivaci $f'^{+}(\alpha) \neq 0$ ($f'^{-}(\alpha) \neq 0$). Potom funkce f^{-1} má v čísle a derivaci zprava (zleva) a platí

$$[f^{-1}(a)]'^{+} = \frac{1}{f'^{+}(\alpha)}, \quad \left[[f^{-1}(a)]'^{-} = \frac{1}{f'^{-}(\alpha)}\right]$$

Důkaz: Důkaz je analogický k důkazu věty 10.7.

10.2. Derivace elementárních funkcí

Předložený text vychází z předpokladu, že čitatel je seznámen s elementárními funkcemi v rozsahu uvedeném v učebním textu „Matematika A“. I když v následujícím textu se zavádí jejich stručné zavedení a uvádějí se některé jejich význačné vlastnosti, je nutno, abyste se s těmito funkcemi dobře seznámili.

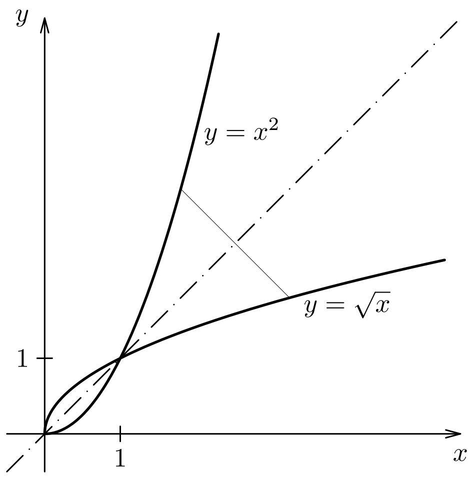
Funkce $y = \sqrt[n]{x}$

Uvažujme funkci $y = x^n$, kde n je přirozené. Tato funkce je zřejmě definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$.

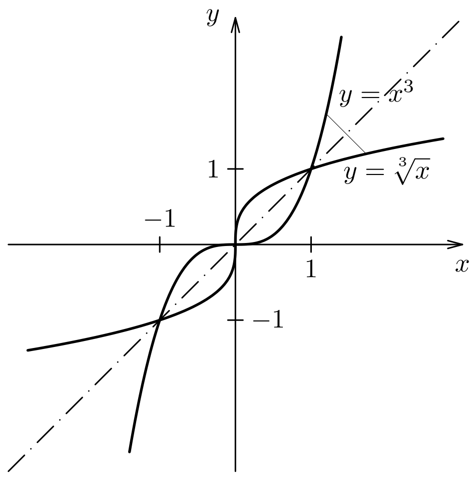
Pro n *liché* je tato funkce na svém definičním oboru $I = (-\infty, \infty)$ spojitá a rostoucí. Označme $J = (-\infty, \infty)$ obor hodnot této funkce. Proto k ní existuje funkce inverzní na intervalu J. Podle věty 10.6 je tato inverzní funkce rostoucí a spojitá na J. Označíme ji $\sqrt[n]{x}$. Funkce $\sqrt[n]{x}$ pro n liché je lichá.

Pro n sudé je sice funkce x^n rovněž definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$, avšak není na něm prostá. Např. $(-2)^n = 2^n$ pro každé sudé n. Budeme proto uvažovat její *zúžení na interval* $I = \langle 0, \infty)$. Na něm je tato zúžená funkce $y = x^n$ rostoucí a spojitá, tedy prostá. Obor hodnot této zúžené funkce je interval $J = \langle 0, \infty)$. Proto k ní existuje funkce inverzní, definovaná na intervalu J. Podle věty 10.6 je tato inverzní funkce rostoucí a spojitá. Označíme ji $\sqrt[n]{x}$.

Na obr. 10.4 jsou narýsovány grafy funkcí $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, \infty)$ a na obr. 10.5 jsou narýsovány grafy funkcí $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.



Obrázek 10.4: Grafy funkcí x^2 a $\sqrt{x}$.



Obrázek 10.5: Grafy funkcí x^3 a $\sqrt[3]{x}$.

Poznámka. Všimněte si, že funkce $\sqrt[n]{x}$ je pro *pro* n *sudé* definována jen pro $x \in \langle 0, \infty)$. Podle definice je pak $\sqrt[n]{x}$ pro každé $x \in \langle 0, \infty)$ rovno tomu číslu $y \in \langle 0, \infty)$, pro něž je $y^n = x$. Je-li tedy např. $a \in \mathbb{R}$, je $a^n \in \langle 0, \infty)$, takže

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \quad \text{pro } n \text{ sudé}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Např. $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$.

Pro počítání s odmocninami platí pravidla, která jste měli odvozeny na gymnáziích.

Jsou uvedeny i ve studijním textu „Matematika A“. Je nutné, abyste si tato pravidla zopakovali.

Derivace funkce $\sqrt[n]{x}$.

Odvoďme si nyní vzorec pro derivování funkce $\sqrt[n]{x}$. V obou uvažovaných případech, totiž jak pro n sudé tak i pro n liché, jsme označili inverzní funkci k funkci x^n jako $y = \sqrt[n]{x}$. V každém bodě $x \neq 0$ svého definičního oboru je funkce $y = x^n$ různá od nuly, takže v něm lze vypočítat její derivaci podle věty 10.7 takto. Položme $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Potom

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(y^n)'} = \frac{1}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}}. \tag{10.22}$$

Dostáváme tedy:

Funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ má pro $x \in D_f$, $x \neq 0$, derivaci a platí

$$f'(x) = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}}. \tag{10.23}$$

Uveďme si nyní příklad na derivaci složené funkce obsahujících funkci $\sqrt[n]{x}$.

Příklad 10.9. Vypočítejte derivaci funkce

$$y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}. \tag{10.24}$$

Řešení. Danou funkci můžeme považovat za složenou funkci. Vnitřní složkou je funkce

$$u = \varphi(x), \quad \text{kde} \quad \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1} \tag{10.25}$$

a vnější složkou je funkce

$$y = f(u) = \sqrt[3]{u}.$$

Funkce $\varphi(x)$ je definovaná pro všechna $x \neq 1$. Hodnotu 0 nabývá jen v bodě $x = -1$. Její derivaci určíme jako derivaci podílu. Dostáváme

$$u' = \varphi'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1.$$

Její definiční obor je shodný s definičním oborem funkce $\varphi(x)$. Funkce $y = f(u)$ má derivaci v každém bodě $u \neq 0$ a je rovna

$$f'(u) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{u}\right)^2}.$$

Podle věty 10.7 platí tedy

$$f'(\varphi(x)) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{\varphi(x)}\right)^2} \cdot \varphi'(x), \quad x \neq \pm 1.$$

Dospěli jsme k tomuto závěru. Funkce (10.24) má pro každé $x \neq \pm 1$ derivaci

$$y'(x) = -\frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\right)^2 \cdot \frac{1}{(x-1)^2}. \tag{10.26}$$

Derivace funkce e^x

Funkci $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme přirozenou exponenciální funkcí. Tuto funkci znáte ze středoškolského studia. Její zavedení bylo uvedeno i v učebním textu „Matematika A“.

Odvození derivace funkce $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, provedeme ve dvou krocích.

a) Odvoďme pomocný vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \tag{10.27}$$

který použijeme pro výpočet derivace funkce $y = e^x$.

Při zavádění Eulerova čísla e v kapitole ?? jsme zavedli dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n. \tag{10.28}$$

Dokázali jsme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = e.$$

Nechť $x \in (0, \frac{1}{2})$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové přirozené číslo, že

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}. \tag{10.29}$$

Poněvadž $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, je

$$e < b_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n. \tag{10.30}$$

Poněvadž podle (10.29) je $x \leq \frac{1}{n}$, dostáváme z (10.30)

$$e^x < \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}, \tag{10.31}$$

to jest

$$e^x < 1 + \frac{1}{n-1}. \tag{10.32}$$

Poněvadž $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, je

$$e > a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{10.33}$$

Poněvadž podle (10.29) je $x > \frac{1}{n+1}$, dostáváme z (10.33)

$$e^x > \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n+1}. \tag{10.34}$$

Ze vztahů (10.32) a (10.34) vyplývá

$$\frac{1}{n+1} + 1 < e^x < 1 + \frac{1}{n-1}, \tag{10.35}$$

$$\frac{1}{n+1} < e^x - 1 < \frac{1}{n-1}. \tag{10.36}$$

Z (10.29) plynou nerovnosti

$$n - 1 > \frac{1}{x} - 2, \quad \text{takže } \frac{1}{n-1} < \frac{x}{1-2x}, \tag{10.37}$$

$$n + 1 < \frac{1}{x} + 1, \quad \text{takže } \frac{1}{n+1} > \frac{x}{x+1}. \tag{10.38}$$

Z (10.36), (10.37), (10.38) dostáváme

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-2x}. \tag{10.39}$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1-2x} = 1$, dostáváme z (10.39)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

b) Počítejme nyní derivaci funkce e^x. Pro libovolné x je podle definice

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}.$$

Výpočtem dostáváme postupně

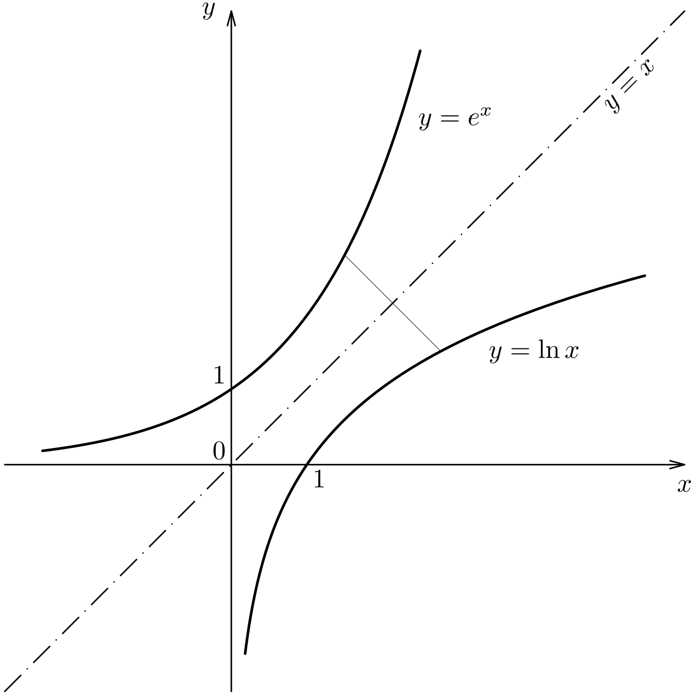
$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Funkce e^x je spojitá a rostoucí na intervalu $(-\infty, \infty)$ a nabývá všech hodnot z intervalu $(0, \infty)$. V každém čísle má derivaci a platí $(e^x)' = e^x$.

Derivace funkce $y = \ln x$

Z vlastností exponenciální funkce a z definice inverzní funkce vyplývá, že k funkci e^x existuje funkce inverzní definovaná na intervalu $(0, \infty)$. Tato inverzní funkce je spojitá a rostoucí a nabývá všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Nazývá se *přirozený logaritmus* a budeme ji značit $\ln x$. Její graf dostaneme z grafu funkce e^x překlopením kolem přímky $y = x$ (viz obr. 10.6). Z věty 10.7 plyne, že $\ln x$ má v každém čísle svého definičního oboru derivaci a platí

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$



Obrázek 10.6: Graf funkce e^x a $\ln x$.

Jestliže položíme

$$y = \ln x, \ x \in (0, \ \infty) \quad \textit{potom} \quad e^y = x, \ y \in (-\infty, \infty) \tag{10.40}$$

Tedy přirozený logaritmus čísla $x \in (0, \infty)$ *je mocnitel, na nějž je nutno umocnit základ* e*, abychom dostali číslo* x*. Odtud dostáváme*

$$x = e^{\ln x}.$$

Funkce $\ln x$ *je spojitá a rostoucí funkce na intervalu* $(0, \infty)$ *a nabývá všech hodnot z intervalu* $(-\infty, \infty)$*. V každém čísle svého definičního oboru má derivaci a platí*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Jsou-li $x, x_1, x_2 \in (0, \infty), s \in \mathbb{R}$*, potom platí*

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \tag{10.41}$$

$$\ln x^s = s \cdot \ln x. \tag{10.42}$$

Příklad 10.10. Vypočítejte derivaci funkce

$$y = e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Řešení. Jde o složenou funkci. Vnitřní složkou je funkce $u = \varphi(x)$, kde $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Vnější složkou je funkce $y = f(u)$, kde $f(u) = e^u$. Funkce $f(u)$ má derivaci v každém bodě u. Platí

$$f'(u) = e^u. \tag{10.43}$$

Funkce $\varphi(x)$ má derivaci v každém bodě svého definičního oboru, tj. pro $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Výpočtem dostáváme

$$\varphi'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}. \tag{10.44}$$

Podle věty o derivování složené funkce dostáváme z (10.43) a (10.44)

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(-\frac{2}{(x-1)^2} \right), \qquad \text{tj.} \quad y' = \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Příklad 10.11. Vypočítejte druhou derivaci funkce

$$y = \ln(3x - 1)$$

a určete její definiční obor.

Řešení. Jde o složenou funkci. Vnější složkou je funkce $y = f(u)$, kde $f(u) = \ln u$. Její definiční obor je interval $(0, \infty)$. Vnitřní složkou je funkce $u = 3x - 1$. Je sice definovaná a má derivaci pro všechna x, avšak tento definiční obor je nutno omezit na ta x, pro než je $u = \varphi(x)$ v definičním oboru funkce $y = \ln u$ a má v nich derivaci. Je to pro $x \in (\frac{1}{3}, \infty)$. Derivováním dostaneme

$$y' = \frac{1}{3x-1} \cdot (3x-1)', \qquad \text{tj.} \quad y' = \frac{3}{3x-1}, \; x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right),$$

$$y'' = -\frac{9}{(3x-1)^2}, \; x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right).$$

Uvědomte si, že funkce $\frac{3}{3x-1}$ je definovaná pro $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$. Avšak y' může být definovaná jen pro $x \in D_f$ v nichž má funkce $f(x)$ derivaci. Podobná poznámka platí i pro definiční obor funkce $f''(x)$.

Derivace exponenciální funkce a logaritmu s obecným základem

Když již máme definovanou přirozenou exponenciální funkci a přirozený logaritmus, můžeme definovat exponenciální funkci s obecným základem a, to jest funkci

$$y = a^x, \quad \text{kde} \quad a > 0, \; a \neq 1.$$

Pro $a > 1$ je funkce $y = a^x$ rostoucí na intervalu $(-\infty, \infty)$ a pro $0 < a < 1$ je funkce $y = a^x$ klesající na intervalu $(-\infty, \infty)$. Lze ji vyjádřit ve tvaru

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}.$$

Odtud je vidět, že je to funkce spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$. Její derivaci určíme jako derivaci složené funkce. Dostáváme

$$(a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

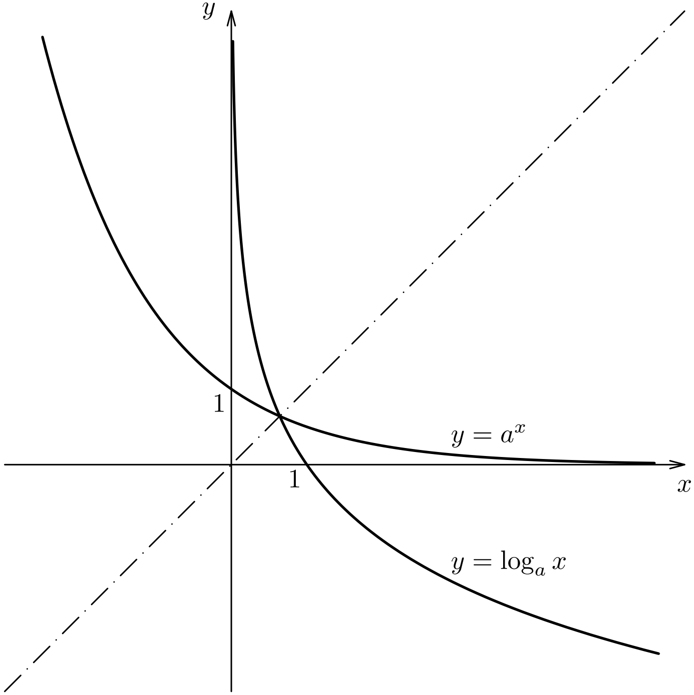
Funkce $y = a^x$ pro $a > 1, a \neq 1$ nabývá všech hodnot z intervalu $(0, \infty)$. Existuje k ní funkce inverzní, která se značí $\log_a x$ a nazývá *logaritmus o základě* a. Je to funkce spojitá a ryze monotónní v intervalu $(0, \infty)$, která nabývá všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Její derivace je podle věty 10.7 rovna

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Na obr. 10.7 je náčrtek grafů funkcí $y = a^x$ a funkce $y = \log_a x$ pro $0 < a < 1$. Pro $a = e$, tedy pro $a > 1$, je graf funkce $y = a^x$ a graf funkce $y = \log_a x$ znázorněn na obr. 10.6. Graf těchto funkcí pro $a = e$ jsme již dříve vyšetřili. Pro logaritmy se základem a platí pravidla analogická k pravidlům uvedeným pro funkci $y = \ln x$.

Řešme ještě jednu otázku. Nechť a, b jsou kladná reálná čísla různá od nuly. V jakém vztahu jsou čísla $\log_a x$, $\log_b x$? Abychom to ukázali, předpokládejme, že a, b jsou kladná čísla různá od jedné. Nechť x je kladné číslo. Označme $y = \log_a x$. Potom postupně dostáváme:

$$x = a^y, \qquad \log_b x = \log_b a^y = y \cdot \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a.$$



Obrázek 10.7: Graf obecné exponenciální a logaritmické funkce, $0 < a < 1$.

Je tedy

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Funkce $y = a^x$, kde a je kladná reálná konstanta různá od jedné, je spojitá a pro $a > 1$ je rostoucí na intervalu $(-\infty, \infty)$ a pro $0 < a < 1$ je klesající na intervalu $(-\infty, \infty)$. Oborem jejich hodnot je v obou případech interval $(0, \infty)$. V každém bodě x svého definičního oboru má funkce a^x derivaci

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Nazývá se exponenciální funkcí se základem a. Speciálním případem je přirozená exponenciální funkce pro $a = e$ a dekadická exponenciální funkce pro $a = 10$.
K funkci a^x existuje funkce inverzní, značíme ji $\log_a x$ (čteme logaritmus x při základě a). Je definována na intervalu $(0, \infty)$. Funkce $\log_a x$ je pro $a > 1$ rostoucí a pro $0 < a < 1$
klesající na intervalu $(0, \infty)$. Je v něm spojitá. V každém bodě $x \in (0, \infty)$ má derivaci a platí

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Jsou-li $x, x_1, x_2 \in (0, \infty), s \in \mathbb{R}$ potom platí

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \tag{10.45}$$

$$\log_a x^s = s \cdot \log_a x. \tag{10.46}$$

Je-li b kladné reálné číslo různé od 1 platí

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Příklad 10.12. Vypočítejte derivaci funkce

$$y = 2^{\sqrt{x^2+1}}.$$

Řešení. Jde o složenou funkci. Vnější složkou je funkce

$$y = f(u), \quad \text{kde } f(u) = 2^u,\ u \in (-\infty, \infty).$$

Vnitřní složkou je

$$u = \varphi(x), \quad \text{kde } \varphi(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

Nechť $x = a \in (-\infty, \infty)$. Funkce $\varphi(x)$ má v bodě a derivaci. Položme $\alpha = \varphi(a)$. Funkce f má v bodě α derivaci. Platí

$$y'(a) = f'(\alpha) \cdot \varphi'(a), \quad \text{to jest} \quad y'(a) = (2^u)'_{u=\alpha}(\varphi'(x))_{x=a}.$$

Tedy

$$y' = 2^{\sqrt{a^2+1}} \cdot \ln 2 \cdot (\sqrt{x^2+1})'_{x=a}. \tag{10.47}$$

Vypočítejme nyní $\varphi'(a)$. Funkce

$$u = \varphi(x) = \sqrt{x^2+1}$$

je složená. Její vnější složkou je funkce

$$u = g(v), \quad \text{kde } g(v) = \sqrt{v},\ v \in \langle 0, \infty)$$

a vnitřní složkou je funkce

$$v = x^2 + 1.$$

Funkce $u = \varphi(x)$ má v bodě a derivaci

$$u'(a) = (\sqrt{x^2+1})'_{x=a} = \frac{1}{2}\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Dosazením do (10.47) dostáváme

$$y' = \ln 2 \cdot 2^{\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \quad \text{pro } a \in (-\infty, \infty).$$

Derivace obecné mocniny $y = x^s$

Obecná mocnina je funkce x^s definovaná pro $x > 0$ a jakékoliv reálné s. Dá se vyjádřit ve tvaru

$$x^s = (e^{\ln x})^s = e^{s \cdot \ln x}.$$

Odtud je vidět, že je to funkce spojitá pro každé $x \in (0, \infty)$. Její derivace je podle věty 10.7

$$(x^s)' = (e^{s \cdot \ln x})' = e^{s \cdot \ln x} \cdot s \cdot \frac{1}{x} = s \cdot x^s \cdot \frac{1}{x} = s x^{s-1}.$$

Funkce x^s je spojitá na intervalu $(0, \infty)$ a má zde derivaci $s x^{s-1}$, tedy

$$(x^s)' = s x^{s-1}, \quad x \in (0, \infty), \ s \in \mathbb{R}.$$

V závěru této části jako aplikaci na předcházející věty řešme následující příklad.

Příklad 10.13. Vypočítejte derivaci funkce

$$y = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1).$$

Řešení. Jde zde o součin dvou funkcí. Druhá z nich je funkce složená. Poněvadž $x^2 + 1 > 0$, je daná funkce definovaná v intervalu $(-\infty, \infty)$ a má zde derivaci, kterou na základě předchozích vět určíme takto

$$y' = 2x \ln(x^2 + 1) + x^2 \frac{1}{x^2 + 1} 2x,$$

takže po úpravě dostáváme

$$y' = 2x\left[\ln(x^2+1) + \frac{x^2}{x^2+1}\right].$$

Derivace funkce $f(x)^{g(x)}$

Nechť

$$F(x) = f(x)^{g(x)}, \quad x \in A. \tag{10.48}$$

Nechť $f(x) > 0$ pro $x \in A$ a nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ mají pro $x \in A$ derivace $f'(x)$, $g'(x)$. Funkci (10.48) lze přepsat do tvaru

$$F(x) = e^{\ln f(x)^{g(x)}}, \tag{10.49}$$

a po úpravě jako

$$F(x) = e^{g(x)\ln f(x)}. \tag{10.50}$$

Tuto funkci můžeme derivovat jako složenou funkci. Dostáváme

$$F'(x) = e^{g(x)\ln f(x)}\Big(g(x)\ln f(x)\Big)'.$$

Provedením vyznačené derivace obdržíme

$$F'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Příklad 10.14. Vypočítejte derivaci funkce

$$y = x^{\sin x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Řešení. Funkci $x^{\sin x}$ lze přepsat na tvar

$$y = e^{\sin x \ln x}.$$

Derivací dostaneme postupně

$$\begin{aligned} y' &= e^{\sin x \ln x}(\sin x \ln x)' \\ y' &= x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x\right), \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Derivace trigonometrický funkcí

Zavedení funkcí $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x$

Zabývejme se nyní trigonometrickými funkcemi, zvanými někdy též funkce *goniometrické*. Omezíme se na funkce $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$. V pravoúhlém souřadném systému s osami u, v sestrojme kružnici o jednotkovém poloměru se středem v počátku. Zvolme libovolně x a sestrojme polopaprsek vycházející z počátku, který svírá s kladnou osou u úhel x. Tento polopaprsek protne kružnici v jednom bodě, označme jej A. Jeho souřadnice označme $\cos x, \sin x$ (viz obr. 10.8). Tyto souřadnice závisí na x, takže $\cos x$ a $\sin x$ jsou funkce definované pro každé reálné x.

Pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$ definujeme další trigonometrické funkce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

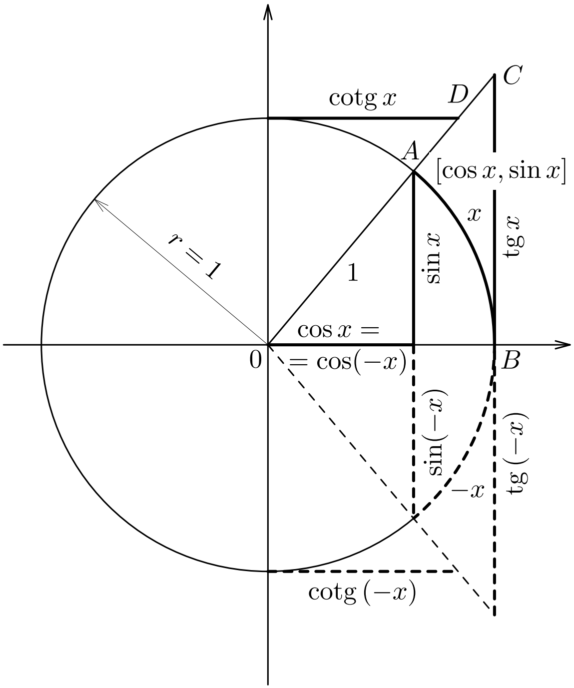
pro ty úhly x, pro něž je jmenovatel různý od 0.

Trigonometrické funkce jsou známy ze střední školy a bylo o nich pojednáno i v učebním textu „Matematika A“. Nakreslete si jejich grafy! Zopakujte si podrobně jejich vlastnosti.

Uveďme si tyto jejich vlastnosti:

Funkce $\sin x$ je kladná pro úhly v prvním a ve druhém kvadrantu a záporná pro úhly ve třetím a ve čtvrtém kvadrantu. Funkce $\cos x$ je kladná pro úhly v prvním a ve čtvrtém kvadrantu a je záporná pro úhly ve druhém a ve třetím kvadrantu. Obě tyto funkce jsou periodické s periodou 2π.

Funkce $\operatorname{tg} x$ je definována pro všechna x různá od lichých násobků $\frac{\pi}{2}$, funkce $\operatorname{cotg} x$ je definována pro x různá od násobků π. Funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou kladné pro úhly pro x v prvním a ve třetím kvadrantu v němž jsou definovány a záporné pro úhly ve druhém a ve třetím kvadrantu kvadrantu v němž jsou definovány. Tyto funkce jsou periodické s periodou π.



Obrázek 10.8: Zavedení funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$.

Odvození derivace funkce $f(x) = \sin x$

a) Dokažme napřed, že platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ je (viz obr. 10.8) $0 < \sin x < x$. Dále je obsah výseče OAB menší nežli obsah trojúhelníku OBC, tj. $\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Celkem tedy platí

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Odtud přechodem k převráceným hodnotám dostáváme

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}.$$

Vynásobíme-li celou nerovnost kladným číslem $\sin x$, dostaneme

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \qquad \text{tj.} \qquad -1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x.$$

Připočteme-li číslo 1 ke všem třem výrazům, máme

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Buď $\varepsilon > 0$ a $\delta = \sqrt{2\varepsilon} > 0$. Pro $x \in (0, \delta)$ je funkce $\sin(x)/x$ definována a platí v něm

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = \left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x =$$
$$= 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} = \varepsilon,$$

takže

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dále je

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

b) Dokažme, že

$$(\sin x)' = \cos x \text{ pro } x \in (-\infty, \infty).$$

Nechť $a \in (-\infty, \infty)$. Potom platí

$$(\sin x)'_{x=a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x\to a} 2\cos\frac{x+a}{2} \sin\frac{x-a}{2} \frac{1}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} \left(\cos\frac{x+a}{2} \sin\frac{x-a}{2} : \frac{x-a}{2}\right). \tag{10.51}$$

Položme

$$f(y) = \frac{\sin y}{y} \quad \text{pro} \quad y \neq 0, \;\; f(0) = 1.$$

Tato funkce $f(y)$ je spojitá v čísle 0. Položme dále

$$\Phi(x) = \frac{x-a}{2}.$$

Zřejmě funkce $\Phi(x)$ je v čísle a spojitá a nabývá zde hodnoty 0, to jest $\Phi(a) = 0$. Podle věty 8.5 je složená funkce $F(x) = f[\Phi(x)]$ v čísle a spojitá, tj.

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \lim_{x\to a} F(x) = F(a) = f[\Phi(a)] = f(0) = 1. \tag{10.52}$$

Položme nyní $f(y) = \cos y$, $\Phi(x) = (x+a)/2$. Složená funkce $F(x) = f[\Phi(x)]$ je v čísle a spojitá, takže

$$\lim_{x\to a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos a. \tag{10.53}$$

Z (10.51), (10.52), (10.53) dostáváme

$$(\sin x)'_{x=a} = \cos a.$$

Funkce $f(x) = \sin x$ má v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$ derivaci a platí

$$\Big(\sin x\Big)' = \cos x.$$

Derivace funkce $y = \cos x$

Užitím věty o derivování složené funkce dostáváme

$$\Big(\cos x\Big)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Funkce $f(x) = \cos x$ má v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$ derivaci a platí

$$(\cos x)' = \sin x, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Derivace funkcí $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$

Z pravidel o derivování podílu dvou funkcí dostáváme pro $x \in (-\infty, \infty) - \{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$ *má v každém bodě* $x \in (-\infty, \infty) - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$, $k \in \mathbb{Z}$ *derivaci a platí*

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in (-\infty, \infty) - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Podobně pro $x \in (-\infty, \infty) - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Funkce $f(x) = \operatorname{cotg} x$ *má v každém bodě* $x \in (-\infty, \infty) - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ *derivaci a platí*

$$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in (-\infty, \infty) - \{k\pi\}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Derivace cyklometrických funkcí

V předcházejícím výkladu jsme zjistili, že funkce $\sin x$ je v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ spojitá a rostoucí a nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Tedy k ní existuje funkce inverzní definovaná na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Tuto funkci označujeme $\arcsin x$. Podle věty 10.6 je tato funkce spojitá na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a je na něm rostoucí. Nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

okolo přímky $y = x$ (viz obr. 10.9). Geometrický význam funkce $\arcsin$ je tento:

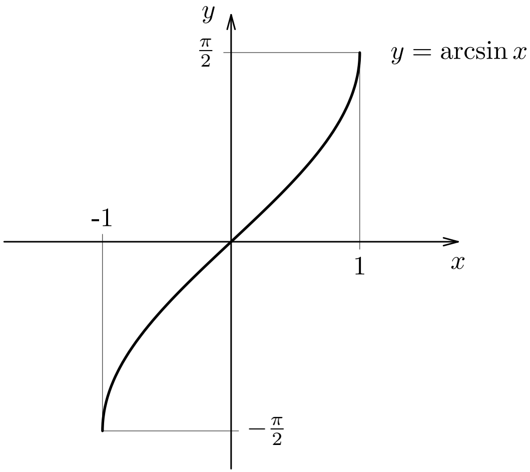
„$\arcsin x$ *je ten úhel z intervalu* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, *jehož sinus má hodnotu* x*.*“

Funkce $\cos x$ je v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ spojitá a klesající a nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Tedy k ní existuje funkce inverzní, je definovaná na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Tuto funkci označujeme $\arccos x$. Podle věty 10.6 je to funkce spojitá na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a je na něm klesající. Nabývá všech hodnot z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce $f(x) = \cos x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ okolo přímky $y = x$ (viz obr. 10.10). Geometrický význam funkce $\arccos x$ je tento:

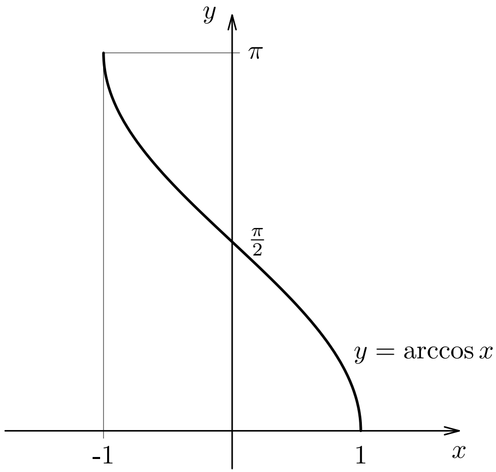
„$\arccos x$ *je ten úhel z intervalu* $\langle 0, \pi \rangle$, *jehož kosinus má hodnotu* x*.*“

Funkce $\operatorname{tg} x$ je v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ spojitá a rostoucí a nabývá zde všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Tedy k ní existuje funkce inverzní, je definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$. Tuto funkci označujeme $\operatorname{arctg} x$. Podle věty 10.6 je to funkce spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ a je v něm rostoucí. Nabývá všech hodnot z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ okolo přímky $y = x$ (viz obr. 10.11). Geometrický význam funkce $\operatorname{arctg} x$ je tento:

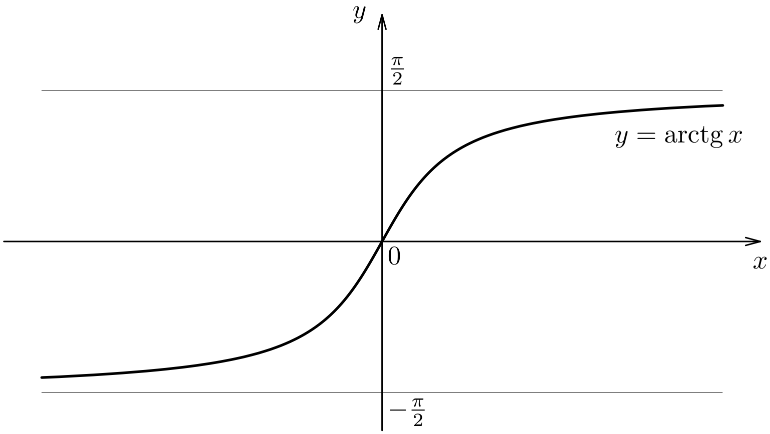
„$\operatorname{arctg} x$ *je ten úhel z intervalu* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *jehož tangens má hodnotu* x*.*“



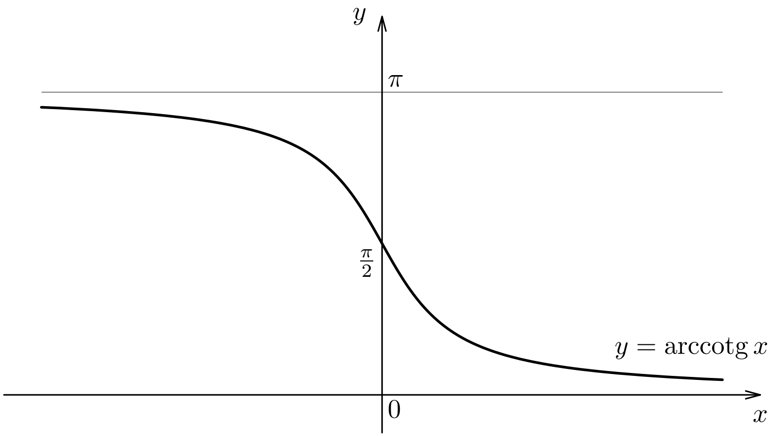
Obrázek 10.9: Graf funkce $\arcsin x$.



Obrázek 10.10: Graf funkce $\arccos x$.



Obrázek 10.11: Graf funkce $\operatorname{arctg} x$.



Obrázek 10.12: Graf funkce $\operatorname{arccotg} x$.

Funkce $\operatorname{cotg} x$ je na intervalu $(0, \pi)$ spojitá a klesající a nabývá na něm všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Tedy k ní existuje funkce inverzní definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$. Tuto funkci označujeme $\operatorname{arccotg} x$. Podle věty 10.6 je to funkce spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ a je na něm klesající. Nabývá všech hodnot z intervalu $(0, \pi)$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce $f(x) = \operatorname{cotg} x$, $x \in (0, \pi)$ okolo přímky $y = x$ (viz obr. 10.12). Geometrický význam funkce $\operatorname{arccotg} x$ je tento:

„$\operatorname{arccotg} x$ *je ten úhel z intervalu* $(0, \pi)$, *jehož kotangens má hodnotu* x.“

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ se nazývají *funkce cyklometrické*. Dosavadní výsledky o spojitosti lze shrnout takto:

Funkce cyklometrické jsou spojité na svém neodvislém oboru.

Derivace cyklometrických funkcí.

Funkce $\sin x$ je spojitá a rostoucí na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Jejím odvislým oborem je interval $\langle -1, 1 \rangle$. V každém bodě a z intervalu $(-1, 1)$ má funkce $\arcsin x$ tuto vlastnost: číslo $\alpha = \arcsin a$ je z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, takže funkce $\sin x$ má v něm derivaci $\cos \alpha \neq 0$. Podle věty 10.7 má funkce $\arcsin x$ v čísle a derivaci a platí:

$$(\arcsin x)'_{x=a} = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}},$$

neboť $\sin \alpha = a$. Všimněme si také, že $\cos a$ je kladný, neboť a je z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, takže odmocninu je nutno opatřit znaménkem plus. V každém bodě x z intervalu $(-1, 1)$

tedy platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Podobně odvodíme, že v každém bodě x intervalu $(-1,1)$ platí

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V intervalu $(-\infty,\infty)$ máme

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$
$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{cotg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Obdržené výsledky můžeme shrnout do následující věty.

Funkce cyklometrické mají derivace v každém vnitřním bodě svého neodvislého oboru a platí:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$
$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Uveďme si nyní souhrnně derivace elementárních funkcí.

Derivace elementárních funkcí

$$(c)' = 0,\ \ c \in \mathbb{R},\ \ \textit{pro}\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\Big(x^n\Big)' = nx^{n-1},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ \textit{pro}\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\Big(\sqrt[n]{x}\Big)' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ n\ \textit{sudé},\ \ \textit{pro}\ x \in (0, \infty)$$

$$\Big(\sqrt[n]{x}\Big)' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ n\ \textit{liché},$$

$$\textit{pro}\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$(e^x)' = e^x,\ \ \textit{pro}\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ \textit{pro}\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ \ \textit{pro}\ x \in (0, \infty)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ \textit{pro}\ x \in (0, \infty)$$

$$(x^s)' = sx^{s-1},\ \ s \in \mathbb{R},\ \ \textit{pro}\ x \in (0, \infty)$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ \ \textit{pro}\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$(\cos x)' = -\sin x,\ \ \textit{pro}\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\textit{pro } x \in (-\infty, \infty) - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ \textit{pro } x \in (-\infty, \infty) - \{k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \textit{pro } x \in (-1, 1)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \textit{pro } x \in (-1, 1)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ \textit{pro } x \in (-\infty, \infty)$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ \textit{pro} x \in (-\infty, \infty)$$

10.3. Shrnutí, úlohy

Shrnutí kapitoly

Byl zaveden pojem derivace funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$ a poukázáno na význam derivace (Definice 10.1). Byly odvozeny derivace elementárních funkcí. Jsou zde uvedeny vzorce pro výpočet derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí (Věta 10.2). Dále byla uvedena věta o derivaci složené funkce (Věta 10.4). Byla odvozena věta o výpočtu derivace inverzní funkce (Věta 10.7). Dále byl vyšetřen vztah mezi existencí derivace funkce $f(x)$ v daném bodě a a spojitostí funkce v bodě a.

Úlohy

1. Napište rovnici tečny ke křivce $y = 3x^2 - x + 1$ v bodě $T[1, ?]$ ležícím na dané křivce. $[5x - y - 2 = 0]$
2. Napište rovnici normály ke křivce $y = \frac{x}{x+1}$ v jejím bodě $T[0, ?]$. $[x + y = 0]$
3. Ve kterém bodě křivky $y = x^3 - 3x^2 + 1$ svírá tečna s osou x úhel $45°$? [x–ová souřadnice bodu je $1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$]
4. Ve kterých bodech má křivka $y = x^3 - 27x$ vodorovnou tečnu?

[x–ové souřadnice těchto bodů jsou 3, -3]

5. Nechť $f(y) = \sqrt[3]{y}$ je vnější složkou a $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$ je vnitřní složkou funkce $F(x)$. Napište $F(x)$ explicitně. Určete její definiční obor.

[$F(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},\ D_F = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$]

6. Derivujte

a) $y = \sqrt{x^2+1}$ [$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in (-\infty, \infty)$]

b) $y = x \sin 2x$ [$\sin 2x + 2x \cos 2x,\ x \in (-\infty, \infty)$]

c) $y = \sin^2 \sqrt{x}$ [$\frac{\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}},\ x \in (0, \infty)$]

d) $y = 3^{x^2+1}$ [$2 \ln 3 \cdot x \cdot 3^{x^2+1},\ x \in (-\infty, \infty)$]

e) $y = x^x$ [Návod: $x^x = e^{x \ln x}$; $y' = x^x(\ln x + 1),\ x \in (0, \infty)$]

7. Vypočítejte první derivaci funkce

a) $y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ [$\frac{2}{(1-x^2)\ln 2}$]

b) $y = x^2(\sqrt{1+x^2} + 3x)$ [$2x(\sqrt{1+x^2} + 3x) + x^2(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 3)$]

c) $y = e^{x \cos 2x}$ [$e^{x\cos 2x}(\cos 2x - 2x \sin 2x)$]

8. Vypočítejte derivace až do 3. řádu funkce

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 1$

[$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4,\ f''(x) = 6x + 6,\ f'''(x) = 6,\ x \in (-\infty, \infty)$]

b) $f(x) = xe^x$

$[f'(x) = e^x(x+1),\ f''(x) = e^x(x+2),\ f'''(x) = e^x(x+3),\ x \in (-\infty, \infty)]$

Kapitola 11

Použití derivací

11.1. Funkce spojité na intervalu

Připomeňme si, že „Jestliže funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci, je v něm spojitá“.

Začneme se zavedením pojmu lokálního extrému funkce $f(x)$.

Definice 11.1.
Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a platí v něm pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

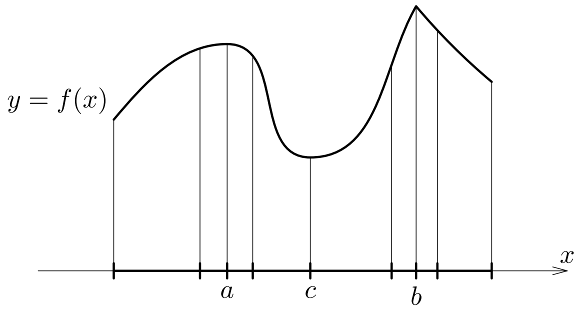
$$f(x) \leq f(x_0), \quad (f(x) \geq f(x_0)) \tag{11.1}$$

Definice 11.2. (Vlastní lokální extrémy)

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *vlastní lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a platí $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pro něž je $x \neq x_0$.

Lokální maxima a lokální minima nazýváme společným názvem **lokální extrémy** (též relativní). Podobně vlastní lokální maxima a minima nazýváme *vlastními lokálními extrémy*.

Na obr. 11.1 je vyznačena funkce $f(x)$, která má v bodech a, b lokální maximum a v bodě c lokální minimum.



Obrázek 11.1: Funkce s lokálním maximem v bodech a a b a lokálním minimem v bodě c.

Zaveďme si nyní pojem *absolutního extrému funkce* $f(x)$ na množině $M \subseteq D_f$. V této definici se porovnává hodnota funkce $f(x)$ v bodě x_0 s hodnotami funkce ve všech ostatních bodech dané množiny. Místo pojmu absolutního extrému můžeme mluvit o *globálním extrému* funkce na množině.

Definice 11.1.

Řekneme, že funkce $f(x)$ *má* absolutní maximum (minimum) na množině M *v bodě* $x_0 \in M$*, jestliže funkce* $f(x)$ *je definovaná na množině* M *a jestliže* $f(x) \leq f(x_0)$ *(*$f(x) \geq f(x_0)$*) pro každé* $x \in M$*.*

Řekneme, že funkce $f(x)$ má své vlastní absolutní maximum (minimum) na množině *M v bodě $x_0 \in M$, jestliže funkce $f(x)$ je definována na množině M a jestliže $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) pro každé $x \in M$.*
Absolutní minimima a absolutní maxima nazýváme společným názvem absolutní extrémy.
Absolutní vlastní maximum a absolutní vlastní minimum nazýváme společným názvem vlastní absolutní extrémy.

Poznámka. V nahoře uvedených pojmech se místo vlastní extrém používá též termín ostrý extrém.

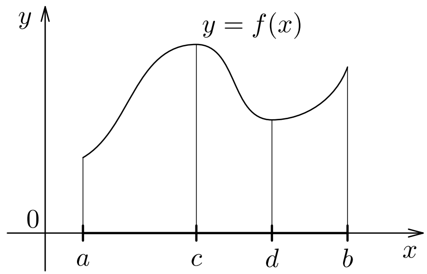
O existenci absolutního extrému funkce $f(x)$ na intervalu vypovídá následující věta. Ve většině aplikací nás zajímá nalezení absolutního extrému.

Věta 11.2. (Weierstrassova)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existují body $x_0, x_1 \in \langle a, b\rangle$ tak, že funkce $f(x)$ nabývá svého absolutního minima (maxima) na intervalu $\langle a, b\rangle$ v bodě x_0 (x_1). Tento bod je buďto krajním bodem intervalu $\langle a, b\rangle$, anebo bodem, v němž funkce nabývá svého lokálního extrému.

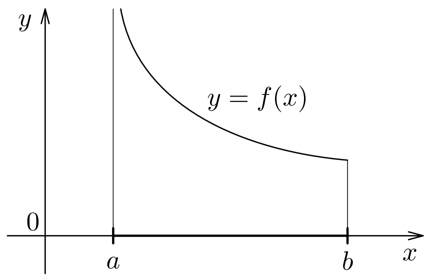
Na obr. 11.2 nabývá funkce $f(x)$ svého lokálního maxima v bodě c, lokálního minima v bodě d, absolutního maxima v bodě c a absolutního minima v bodě a.

Funkce na obr. 11.3 na $(a, b\rangle$ nabývá absolutního minimum v bodě b, avšak $\mathbf{nemá}$



Obrázek 11.2: Absolutní extrémy na $\langle a, b\rangle$.

absolutní maximum na $(a, b\rangle$**.** Tato funkce $f(x)$ je sice spojitá na $(a, b\rangle$, avšak není spojitá na $\langle a, b\rangle$. Větu 11.2 nelze aplikovat, nejsou splněny její předpoklady.



Obrázek 11.3: Porušení předpokladů věty 11.2.

Zabývejme nyní problémem určení bodů, v nichž funkce nabývá lokální extrém. K tomu budeme potřebovat několik vět.

Věta 11.3. *Nechť $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$). Pak existuje takové okolí čísla a, že pro všechna čísla $x < a$ z tohoto okolí platí $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$) a pro všechna $x > a$ z tohoto okolí platí $f(x) > f(a)$ ($f(x) < f(a)$).*

Důkaz: Nechť $f'(a) > 0$. Pak existuje

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0.$$

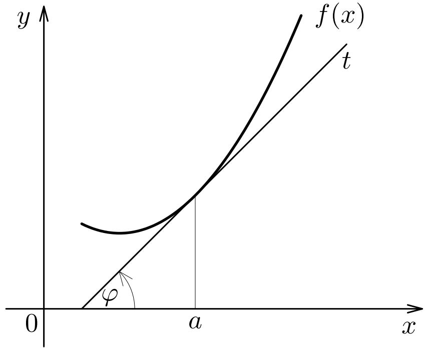
Existuje tedy takové okolí čísla a, že v němž je uvedený podíl definován a je stále kladný, tj.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Tedy v tomto okolí jsou čísla $f(x) - f(a)$, $x - a$ stejných znamének. Pro $x < a$ je tedy $f(x) < f(a)$, pro $x > a$ je $f(x) > f(a)$. Podobně se provede důkaz pro druhý případ $f'(a) < 0$.

Poznámka. Jak víme, geometrický význam první derivace je směrnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a. Je-li tedy $f'(a) > 0$, svírá tečna grafu $f(x)$ v bodě a úhel φ, pro nějž je $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Viz obr. 11.4.

Podobně, je-li $f'(a) < 0$, svírá tečna grafu funkce $f(x)$ v bodě a úhel φ, pro nějž je $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Viz obr.11.5

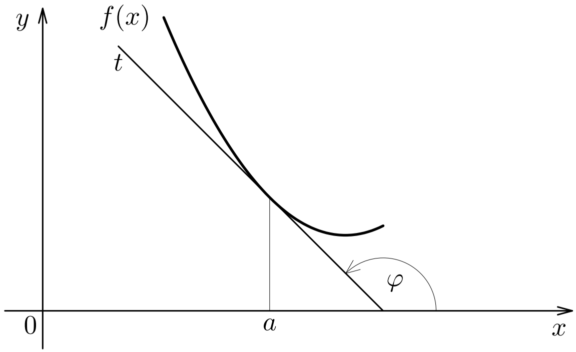


Obrázek 11.4: Derivace – směrnice tečny ($f'(a) > 0$).

11.2. Věty o funkcích spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$

Věta 11.4. (Rolleova) *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má v každém vnitřním bodě tohoto intervalu derivaci. Buď dále $f(a) = f(b)$. Pak existuje takové číslo $c \in (a, b)$, že $f'(c) = 0$.*

Důkaz: Je-li funkce $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$ konstantní, tvrzení je správné a za c lze vzít kterékoliv číslo uvnitř $\langle a, b\rangle$. Nechť tedy $f(x)$ není v $\langle a, b\rangle$ konstantní. Pak tedy aspoň v jednom čísle $x \in (a, b)$ platí $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Dejme tomu, že $f(x) > f(a)$. Podle věty Weierstrassovy nabude funkce $f(x)$ v některém čísle c, kde $a < c < b$, své maximální hodnoty. Dokažme, že $f'(c) = 0$. Kdyby bylo totiž $f'(c) > 0$, pak by podle věty 11.3 existovalo jisté okolí čísla c tak, že pro všechna $x > c$ z tohoto okolí by platilo



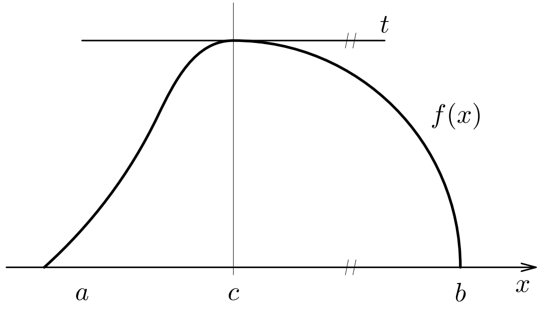
Obrázek 11.5: Derivace jako směrnice tečny $(f'(a) < 0)$.

$f(x) > f(c)$, podobně, kdyby $f'(c) < 0$, pak by existovalo jisté okolí čísla c tak, že pro všechna $x < c$ z tohoto okolí by platilo $f(x) > f(c)$. To však není možné, neboť $f(c)$ je ze všech funkčních hodnot maximální. Tedy opravdu $f'(c) = 0$.

Poznámka. Geometrický smysl věty je tento: graf funkce $y = f(x)$ má za daných předpokladů aspoň v jednom bodě vodorovnou tečnu (viz obr. 11.6).

Příklad 11.1. Buď $f(x) = |x|$, $x \in \langle -1, 1\rangle$. Tvrzení věty neplatí, v čísle 0 je porušen předpoklad o existenci derivace. Viz obr. 11.7

Věta 11.5. (Obecná věta o přírůstku funkce) *Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť mají v každém vnitřním bodě tohoto intervalu derivace. Pak*



Obrázek 11.6: Tečna grafu $f(x)$ v lokálním maximu.

existuje takové číslo $c \in (a,b)$*, že*

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c).$$

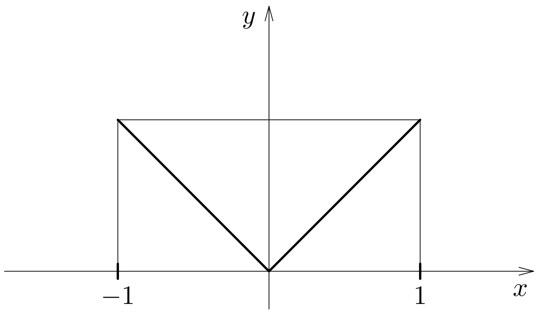
Důkaz: Zaveďme pomocnou funkci

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x).$$

Z předpokladů o funkcích $f(x)$ a $g(x)$ vychází, že funkce $F(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá a uvnitř má derivaci. Dále $F(a) = F(b)$. Podle věty 11.4 existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$F'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0.$$

Odtud tvrzení věty.



Obrázek 11.7: Graf funkce $y = |x|$, $x \in \langle -1, 1\rangle$.

Poznámka. Rolleova věta 11.4 je zvláštním případem věty 11.5 pro $g(x) = x$ a funkci $f(x)$, pro níž platí $f(a) = f(b)$.

Věta 11.6. (Věta o přírustku funkce)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť existuje $f'(x)$ pro $x \in (a, b)$. Potom existuje alespoň jedno $c \in (a, b)$ tak, že

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a). \tag{11.2}$$

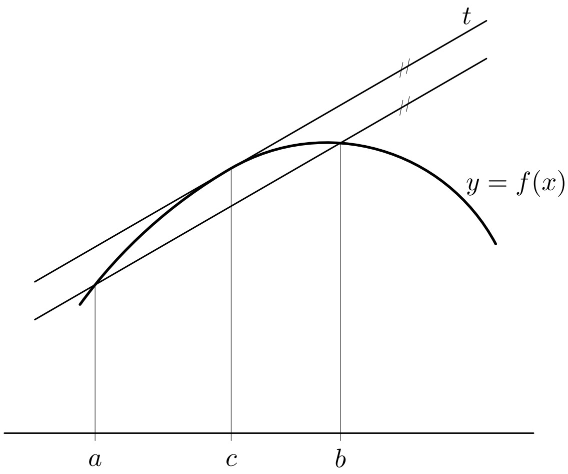
Důkaz: Důkaz vychází bezprostředně z předcházející věty pro $g(x) = x$.

Poznámka 1. Vztah (11.2) lze přepsat takto

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Levá strana tohoto vztahu vyjadřuje průměrný přírustek funkce $f(x)$ při přechodu z bodu a do bodu b.

Větu lze interpretovat takto. Existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[c, f(c)]$ je rovnoběžná se spojnicí bodů $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$. Věta je schematicky znázorněna na obr. 11.8.



Obrázek 11.8: Interpretace věty 11.6.

Jestliže známe konstantu M pro níž je $|f'(x)| \leq M$ pro $x \in \langle a, b \rangle$, potom podle (11.2) platí

$$|f(b) - f(a)| < M \cdot (b - a).$$

Věta umožňuje odhadnout $f(b) - f(a)$.

Poznámka 2. Věta 11.6 se nazývá též „Větou o střední hodnotě diferenciálního počtu“.

Příklad 11.2. Odhadněte

$$\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6}.$$

Řešení. Použijeme větu 11.6. Položme v ní $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{3}$. Potom je $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$. Pro $x \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \rangle$ je $|f'(x)| = |\cos x| \leq \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, takže $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Je tedy

$$\left| \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \right| \leq M \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right),$$

tj.

$$\left| \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}.$$

Pomocí kalkulačky zjistíme, že

$$\left| \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \right| = 0{,}36603 \quad \text{a} \quad \frac{\sqrt{3}\pi}{12} = 0{,}45345.$$

11.3. Funkce monotónní na intervalu a lokální extrémy

Připomeňme si, že funkce $f(x)$ se nazývá rostoucí (klesající) na intervalu I, jestliže má tuto vlastnost:

$$\text{Jestliže } x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2, \text{potom } f(x_1) < f(x_2)\ \Big(f(x_1) > f(x_2)\Big).$$

Funkce rostoucí a klesající se nazývají společným názvem funkce ryze monotónní.

Funkce $f(x)$ se nazývá neklesající (nerostoucí) na intervalu I, jestliže má tuto vlastnost:

$$\text{Jestliže } x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2, \text{potom } f(x_1) \le f(x_2)\ \Big(f(x_1) \ge f(x_2)\Big).$$

Funkce neklesající a nerostoucí se nazývají společným názvem funkce monotónní.

Je tedy každá funkce ryze monotónní též monotónní. Opak nemusí platit.

Určit intervaly, na nichž je vyšetřovaná funkce monotónní, nám často pomůže tato věta.

Věta 11.7. (Monotónnost funkce na intervalu)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I a nechť I_0 je množina všech vnitřních bodů intervalu I. Nechť funkce $f(x)$ má derivaci $f'(x)$ na I_0.

Jestliže $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) pro $x \in I_0$, potom $f(x)$ je rostoucí (klesající) na I.

Jestliže $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) pro $x \in I_0$, potom $f(x)$ je neklesající (nerostoucí) na intervalu I.

Ukažme nyní, jak určit intervaly monotónnosti funkce $f(x)$ definované na intervalu I v případě, že funkce $f(x)$ má dále uvedené vlastnosti.

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I. Označme I_0 množinu všech vnitřních bodů intervalu I. Předpokládejme, že $f'(x)$ je spojitá na intervalu I_0, a že má na něm konečný počet nulových bodů. Tyto nulové body rozdělí interval I na konečný počet částečných intervalů. Ve všech vnitřních bodech každého z těchto částečných intervalů je $f'(x) > 0$ nebo $f'(x) < 0$. Takže v něm je funkce $f(x)$ rostoucí nebo klesající. Při grafickém znázornění vyznačíme interval I na číselné ose a nulové body funkce $f'(x)$. Tyto nulové body rozdělí interval I na několik částečných intervalů. Nad každým z těchto intervalů vyznačíme „$+$“, je-li v jeho vnitřních bodech $f'(x) > 0$, a „$-$“, je-li v jeho vnitřních bodech $f'(x) < 0$. Pod interval, nad nímž je symbol „$+$“ („$-$“) dáme symbol „$\nearrow$“ („$\searrow$“) a tak vyznačíme, že funkce $f(x)$ je na tomto částečném intervalu rostoucí (klesající). Ilustrujme to na následujícím příkladě.

Příklad 11.3. Nalezněte intervaly monotónnosti funkce

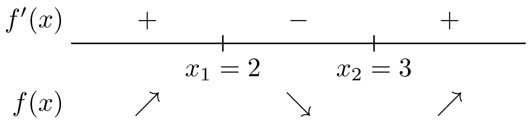
$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 5.$$

Řešení. Funkce $f(x)$ je spojitá a má i spojitou derivaci $f'(x)$, kde

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36.$$

Řešením rovnice $f'(x) = 0$ dostáváme $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Vyznačme číselnou osu. Interval I je celá tato číselná osa. Na ní vyznačíme body $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Tyto body rozdělí interval I na 3 částečné intervaly: $(-\infty, 2\rangle$, $\langle 2, 3\rangle$, $\langle 3, \infty)$. Znamení $f'(x)$ a monotónnost funkce $f(x)$ jsou patrny z obr. 11.9.



Obrázek 11.9: Monotónnost funkce $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 5$.

Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu $(-\infty, 2\rangle$ a na intervalu $\langle 3, \infty)$ a je klesající na intervalu $\langle 2, 3\rangle$.

Zabývejme se nyní podrobněji problémem nalezení lokálních extrémů.

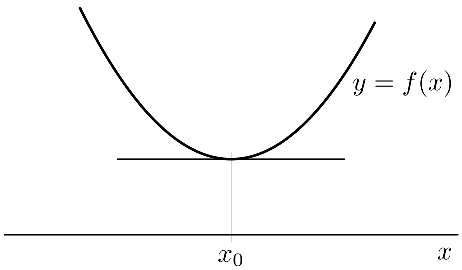
Věta 11.8. *Nechť funkce $f(x)$ má v bodě a lokální extrém a nechť existuje $f'(a)$. Potom $f'(a) = 0$.*

Důkaz: Věta je bezprostředním důsledkem věty 11.3 a definice 11.2.

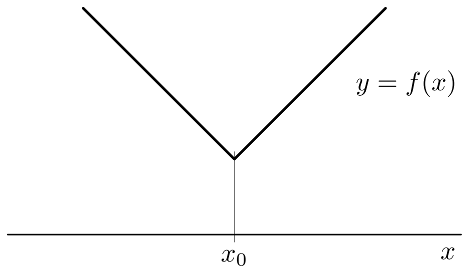
Z věty 11.8 vyplývá, že funkce $f(x)$ může mít lokální extrém pouze v bodech, v nichž nemá derivaci anebo v bodech, v nichž má derivaci rovnu nule.

Poznamenejme, že je-li $f'(a) = 0$, má graf funkce $f(x)$ v bodě a tečnu rovnoběžnou s osou x.

Na obr. 11.10 je znázorněna funkce, která má v bodě x_0 lokální minimum a má v něm derivaci; na obr. 11.11 je znázorněna funkce, která má v bodě x_0 lokální minimum, ale nemá v něm derivaci.



Obrázek 11.10: $f(x)$ má v x_0 derivaci.



Obrázek 11.11: $f(x)$ nemá v x_0 derivaci.

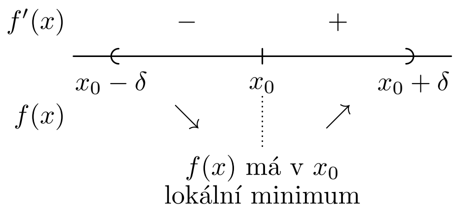
Zjistili jsme v kterých bodech může mít daná funkce $f(x)$ lokální extrémy. Dále si uvedeme několik vět, kterými lze alespoň v některých případech rozhodnout, zda funkce $f(x)$ má v nich skutečně lokální extrém.

Věta 11.9. (Existence lokálního extrému)

Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x)$ definována a platí $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) a pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x)$ definováné a platí $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$). Potom funkce $f(x)$ má v hodě x_0 lokální maximum (minimum). Jestliže $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) pro $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, fukce $f(x)$ nemá v x_0 lokální extrém.

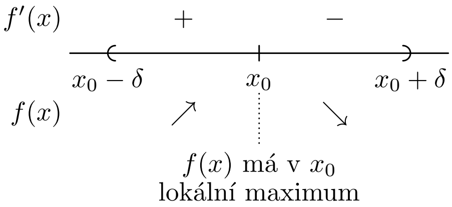
Znázorněme si graficky situaci uvedenou v této větě. Ukažme některé případy:

a) $f'(x_0) = 0$, $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}$

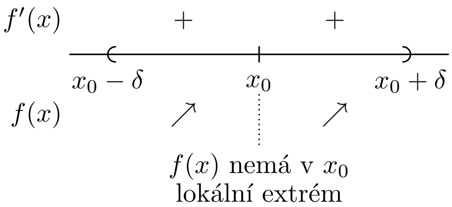


b) $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0\rangle$, $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, kde

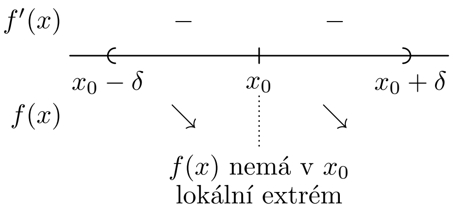
$\delta \in \mathbb{R}$



c) $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0\rangle$, $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}$



d) $f'(x_0) = 0$, $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0\rangle$, $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}$



Uveďme ještě další větu, která umožňuje určit v některých případech lokální extrémy funkce $f(x)$.

Věta 11.10. (Existence lokálního extrému) *Nechť $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ (< 0). Potom funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální minimum (maximum).*

Důkaz: Nechť $f''(x_0) > 0$. Potom existuje

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0.$$

Existuje tedy takové čislo $\delta > 0$, že pro $x \neq x_0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je podíl

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

definován a je kladný. Tedy $f'(x)$ a $x - x_0$ mají zde stejné znaménko. Je tedy $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Podle věty 11.9 má tedy funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum. Podobně se dokáže zbývající část věty.

Příklad 11.4. Určete lokální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Řešení. Funkce $f(x)$ má derivaci pro $x \in (-\infty, \infty)$. Podle poznámky uvedené výše může tedy nabývat lokální extrémy pouze v bodech, v nichž je $f'(x) = 0$. Dostáváme

$$f'(x) = 2x - 5.$$

Řešením rovnice $2x - 5 = 0$ dostáváme $x_0 = \frac{5}{2}$. Tedy funkce $f(x)$ může nabývat lokální extrém pouze v bodě $x_0 = \frac{5}{2}$. Dokážeme nyní dvěma způsoby, že zde daná funkce nabývá lokální minimum.

a) Zřejmě $f'(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, \frac{5}{2})$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in (\frac{5}{2}, \infty)$. Podle věty 11.9 má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum.
b) Poněvadž $f''(x) = 2$, je $f''(\frac{5}{2}) = 2 > 0$. Podle věty 11.10 má funkce $f(x)$ v bodě $\frac{5}{2}$ lokální minimum.

Příklad 11.5. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^4$.

Řešení. Podobnou úvahou jako v minulém příkladě zjistíme, že funkce $f(x)$ může mít lokální extrém pouze v bodě, v němž je $f'(x) = 0$. Zřejmě $f'(x) = 4x^3$. Rovnice $4x^3 = 0$ má jediné řešení $x = 0$. Zřejmě $f'(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$. Má tedy funkce $f(x)$ v bodě $x = 0$ podle věty 11.9 lokální minimum. Poněvadž $f''(0) = 0$, nelze o existenci lokálního extrému v bodě $x = 0$ rozhodnout podle věty 11.10.

Příklad 11.6. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3$.

Řešení. Funkce $f(x)$ má derivaci pro $x \in (-\infty, \infty)$. Může tedy mít podle výše uvedené poznámky lokální extrém pouze v bodě $x = 0$, neboť jenom v něm je $f'(x) = 0$. Poněvadž $f'(x) = 3x^2 > 0$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ nemá $f(x)$ podle věty 11.9 v bodě $x = 0$ lokální extrém. Daná funkce tedy nemá lokální extrémy. Poněvadž $f''(0) = 0$, nelze podle věty 11.10 rozhodnout, zda v bodě 0 má funkce $f(x) = x^3$ lokální extrém.

Na příkladě 11.5 jsme viděli, že věta 11.10 nám někdy neumožňuje určit, zda funkce $f(x)$ má v bodě x_0, v němž je $f'(x_0) = 0$, lokální extrém, nebo nemá. Uveďme si následující větu, která je obecnější než věta 11.10.

Věta 11.11. (Existence lokálního extrému)

Nechť $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$ *a nechť* $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. *Je-li* $n+1$ *sudé, má funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0 *lokální extrém. Jestliže* $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ *(*$f^{(n+1)}(x_0) < 0$*), potom funkce* $f(x)$ *má v bodě* x_0 *lokální minimum (maximum). Je-li* $n+1$ *liché, nemá funkce* $f(x)$ *v bodě a lokální extrém.*

Příklad 11.7. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^4$.

Řešení. Dostáváme

$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2, \quad f'''(x) = 24x, f^{(4)}(x) = 24.$$

Zřejmě $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Má tedy funkce $f(x) = x^4$ v bodě $x = 0$ lokální minimum podle věty 11.11.

Příklad 11.8. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3$.

Řešení. Dostáváme

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6.$$

Zřejmě $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 > 0$. Podle věty 11.11 nemá funkce $f(x) = x^3$ v bodě $x = 0$ lokální extrém.

11.4. Absolutní extrémy

V definici11.1.1 bylo zavedeno absolutní maximum a absolutní minimum funkce $f(x)$ na množině M. Absolutní maximum a absolutní minimum funkce $f(x)$ na množině M nazýváme společným názvem absolutní extrémy. Absolutní extrémy funkce nemusí ovšem na dané množině existovat. Tak např. funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$ v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nenabývá ani největší ani nejmenší hodnoty, neboť

$$lim_{x \to -\pi/2+} = -\infty, \quad lim_{x \to \pi/2+} = \infty$$

takže funkce $f(x)$ není na intervalu $, < -\pi/2, \pi/2 >$ ohraničena. Víme, že jestliže funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu, pak je existence absolutních extrémů zaručena větou Weierstrassovou. Pro nalezení absolutních extrémů je důležitá tato věta:

Věta 11.12. (Existence absolutního extrému)

Buď $f(x)$ funkce definovaná na intervalu J. Nechť má v čísle $a \in J$ absolutní extrém. Pak a je koncovým bodem intervalu J nebo v něm má funkce $f(x)$ relativní extrém.

Důkaz: Není-li a koncovým bodem intervalu J, dá se zvolit interval J' takový, že J' je částí J a bod a je vnitřním bodem v J'. Pak v J' je $f(x)$ definována a platí $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$ na intervalu J'. Potom funkce $f(x)$ má v čísle a relativní maximum (minimum).

Při hledání absolutních extrémů funkce spojité na uzavřeném intervalu $< a, b >$ postupujeme takto: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $< a, b >$. Podle Weierstrassovy věty má funkce $f(x)$ na intervalu $a, b >$ absolutní extrém. Tento absolutní extrém nabývá funkce $f(x)$ buďto v bodě, v němž nabývá lokální extrém, nebo v bodech a, b. Vyhledáme proto lokální extrémy a porovnáním hodnot vyšetřované funkce v těchto bodech a v bodech a, b určíme absolutní extrémy.

Na absolutní extrémy funkce vede řada aplikačních úloh. Uveďme příklad.

Příklad 11.9. Obdélníkový kus plechu má rozměry $60 \times 28\,\mathrm{cm}$. V rozích se odříznou čtverce a zbytek se ohne tak, že vznikne otevřená krabice. Jak veliká musí být strana odřízutých čtverců, aby objem krabice byl maximální?

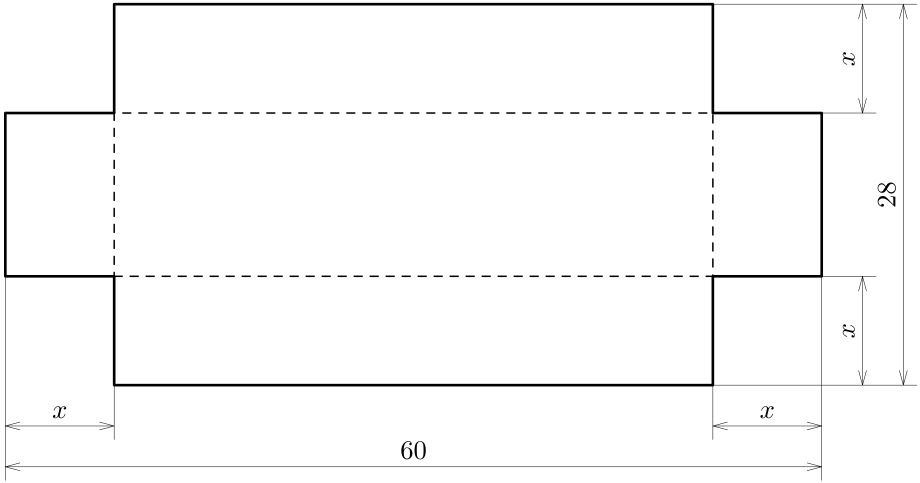
Řešení. Je-li x strana odříznutých čtverců (viz obr. 11.12), je objem krabice

$$f(x) = (60 - 2x)(28 - 2x)x = 4x(30 - x)(14 - x).$$

Platí, že $x \in \langle 0, 14 \rangle$ a $f(0) = f(14) = 0$, pro $x \in (0, 14)$ je $f(x) > O$. Absolutní maximum splyne tedy s maximem relativním. Dostáváme

$$f'(x) = 4(3x^2 - 88x + 420), \qquad f''(x) = 8(3x - 44).$$

Úloze vyhovující kořen rovnice $f'(x) = 0$ je $x = 6$. Poněvadž $f''(6) < 0$, má funkce $f(x)$ v bodě $x = 6$ lokální maximum. Platí $f(6) = 4608$. Objem krabice je maximální, odříznou-li se čtverce o straně $6\,\mathrm{cm}$. Objem krabice pak je $4{,}608\,\mathrm{dm}^3$.



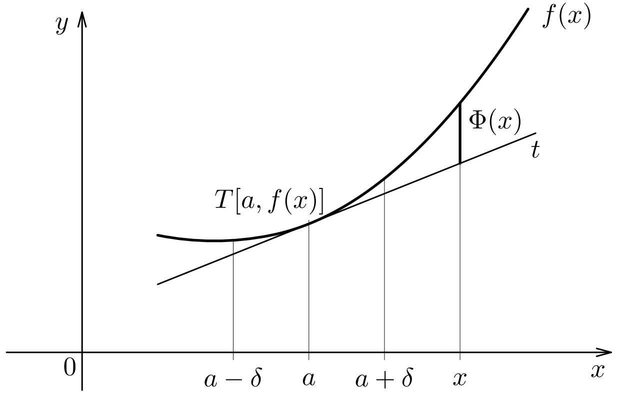
Obrázek 11.12: Tvar plechu na krabici.

11.5. Konvexita a konkávnost funkce

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a)$. Potom graf funkce $f(x)$ má v bodě $[a, f(a)]$ tečnu $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$. Označme

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a), \quad x \in D_f.$$

odchylku funkce $y = f(x)$ a funkce $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$, jejíž graf je tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a. (viz obr. 11.13)



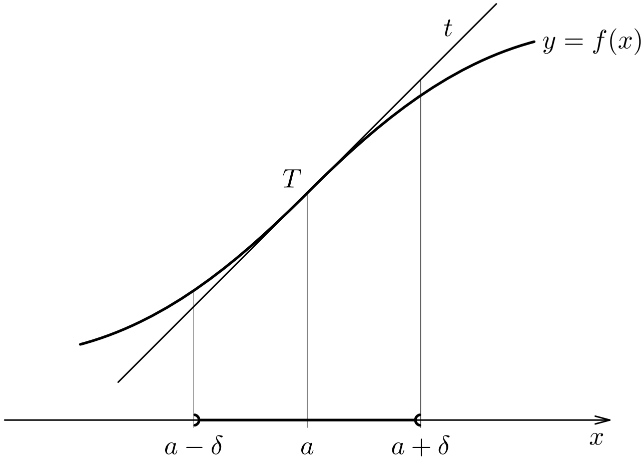
Obrázek 11.13: Zavedení funkce $\Phi(x)$.

Definice 11.3. (Inflexní bod)

Řekneme, že funkce $f(x)$ probíhá v bodě a *nad tečnou* (*pod tečnou*), existuje-li takové $\delta > 0$, že na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ je definována funkce

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \tag{11.3}$$

a $\Phi(x) > 0$ ($\Phi(x) < 0$), pro $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$. (Viz obr. 11.13.)
Řekneme, že bod a je *inflexním bodem* funkce $f(x)$, (viz obr. 11.14) jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že $\Phi(x)$ je definována na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ a platí $\Phi(x) > 0$ ($\Phi(x) < 0$) pro $x \in (a-\delta, a)$ a $\Phi(x) < 0$ ($\Phi(x) > 0$) pro $x \in (a, a+\delta)$. (Graf funkce přechází v bodě dotyku z jedné strany tečny na druhou.)



Obrázek 11.14: K definici inflexního bodu.

Věta 11.13. *Nechť $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$). Potom funkce $f(x)$ probíhá v bodě a nad tečnou (pod tečnou).*

Důkaz: Nechť $f''(a) > 0$. Pak podle definice derivace existuje takové okolí $U_\delta(a)$, že pro $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ je

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

definováno a je $\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} > 0$. Tedy v $U_\delta(a)$ je definována derivace $f'(x)$. Nechť x je libovolný bod z intervalu $U_\delta(a) - \{a\}$. Potom funkce $f(x)$ je v intervalu o koncových bodech a, x spojitá a uvnitř má derivaci. Totéž platí pro funkci $\Phi(x)$. Podle věty o přírustku funkce platí pro funkci Φ danou vztahem (11.3)

$$\Phi(x) = \Phi(x) - \Phi(a) = \Phi'(c)(x-a), \tag{11.4}$$

kde c leží mezi a, x. Úpravou (11.4) dostáváme

$$\Phi(x) = \Big(f'(c) - f'(a)\Big)(x-a) = \frac{f'(c) - f'(a)}{c-a}(x-a)(c-a).$$

Poněvadž c leží mezi a, x, je $(x-a)(c-a) > 0$. Je tedy znamení $\Phi(x)$ v $U_\delta(a) - \{a\}$ stejné jako je znamení $\frac{f'(c)-f'(a)}{c-a}$ a tedy stejné i jako je $f''(a)$. Je tedy $\Phi(x) > 0$ pro $x \in U_\delta(a) - \{a\}$. Podobně se dokáže věta v ostatních případech.

Z této věty bezprostředně vyplývá tato věta:

Věta 11.14. *Nechť a je inflexním bodem funkce $f(x)$. Existuje-li $f''(a)$, potom $f''(a) = 0$.*

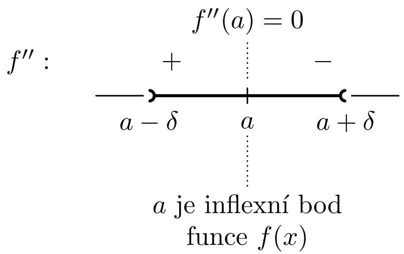
Funkce $f(x)$ může mít inflexní bod pouze v bodech, v nichž má první derivaci, ale nemá druhou derivaci nebo v těch bodech, v nichž tato druhá derivace existuje a je rovna 0.

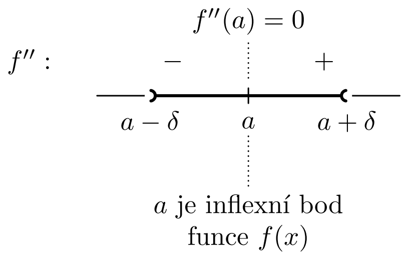
Ukažme si nyní větu, která nám umožní alespoň v některých případech zjistit inflexní body daná funkce.

Věta 11.15. (Existence inflexního bodu)

Nechť $f''(a) = 0$ a nechť existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (a-\delta, a)$ je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) a pro $x \in (a, a+\delta)$ je $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$). Potom funkce $f(x)$ má v bodě a inflexní bod.

Znázorněme si graficky situaci uvedenou ve větě 11.15.





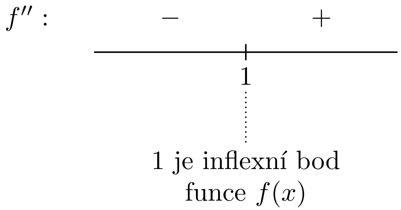
Příklad 11.10. Určete inflexní body funkce

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 4.$$

Řešení. Pro $x \in (-\infty, \infty)$ dostáváme

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5, \quad f''(x) = 6x - 6.$$

Určeme nulové body funkce $f''(x)$. Z rovnice $f''(x) = 0$, to jest z rovnice $6x - 6 = 0$ dostáváme $x = 1$. Funkce $f(x)$ má první a druhou derivaci pro $x \in (-\infty, \infty)$.



Má tedy funkce $f(x)$ v bodě $x = 1$ podle věty 11.15 inflexní bod.

Další větou, kterou lze v některých případech určit inflexní body, je následující věta.

Věta 11.16. (Existence inflexního bodu)
Nechť funkce $f(x)$ splňuje v bodě $x = a$ tyto vztahy $f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$, $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Je-li $n + 1$ liché, potom funkce $f(x)$ má v bodě a inflexní bod.

Příklad 11.11. Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 4$. (Viz příklad 11.10.)

Řešení. Dostáváme $$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5, \quad f''(x) = 6x - 6, \quad f'''(x) = 6$$

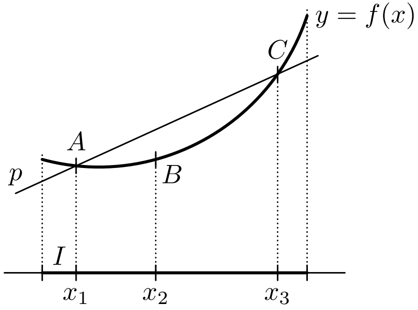
Poněvadž $f''(1) = 0$, $f'''(1) \neq 0$ má funkce $f(x)$ v bodě $x = 1$ inflexní bod.

Zaveďme si pojem ryze konvexní (ryze konkávní) funkce na intervalu.

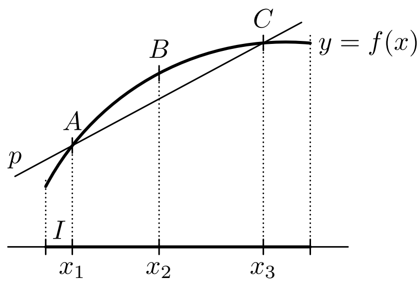
Definice 11.4. (Ryze konvexní a ryze konkávní funkce)

Řekneme, že funkce $f(x)$ je *ryze konvexní* (*ryze konkávní*) na intervalu I, jestliže má tuto vlastnost:
Jestliže $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ a jestliže p je přímka jdoucí body $A[x_1, f(x_1)]$, $C[x_3, f(x_3)]$, potom bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží pod (nad) přímkou p.

Na obr. 11.15 je znázorněna funkce ryze konvexní na intervalu I a na obr. 11.16 je znázorněna funkce ryze konkávní na intervalu I.



Obrázek 11.15: Funkce ryze konvexní na intervalu I.

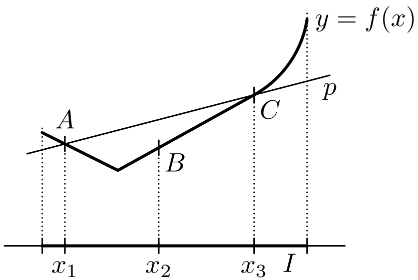


Obrázek 11.16: Funkce ryze konkávní na intervalu I.

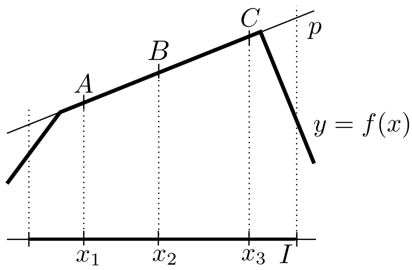
Podobným způsobem zavádíme pojem konvexnosti a pojem konkávnosti funkce na intervalu.

Definice 11.5. (Konvexní a konkávní funkce)
Řekneme, že funkce $f(x)$ je na intervalu I *konvexní* (*konkávní*), jestliže má tuto vlastnost:
Jestliže $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ a jestliže p je přímka jdoucí body $A[x_1, f(x_1)]$, $C[x_3, f(x_3)]$, potom bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží pod (nad) přímkou p nebo na ní.

Na obr. 11.17 je znázorněna funkce konvexní na intervalu I a na obr. 11.18 je znázorněna funkce konkávní na intervalu I.



Obrázek 11.17: Funkce konvexní na intervalu I.



Obrázek 11.18: Funkce konkávní na intervalu I.

Poznámka 1. Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na intervalu I. Nechť x_1, x_2, $x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Potom přímka p, jdoucí body $A[x_1, f(x_1)]$, $C[x_3, f(x_3)]$, má rovnici

$$p: \ y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží pod přímkou p, jestliže

$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Úpravou postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
&f(x_2)(x_3 - x_1) < f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1)\\
&f(x_2)(x_3 - x_2 + x_2 - x_1) < f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1)\\
&\Big[f(x_2) - f(x_1)\Big](x_3 - x_2) < \Big[f(x_3) - f(x_2)\Big](x_2 - x_1).
\end{aligned}$$

Tedy bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží pod přímkou p, jestliže platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{11.5}$$

Podobně se ukáže, že bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží pod přímkou p nebo na ni, jestliže platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{11.6}$$

Analogicky se odvodí, že bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží nad přímkou p, jestliže platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{11.7}$$

Podobně, bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží nad přímkou p nebo na ni, jestliže platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{11.8}$$

O vztahu mezi konvexností (konkávností) funkce $f(x)$ a znamením druhé derivace $f''(x)$ funkce $f(x)$ vypovídají následující věty.

Věta 11.17. (Vztah konvexnosti a druhé derivace funkce)

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I. Označme I_0 množinu všech vnitřních bodů intervalu I. Nechť funkce $f(x)$ má druhou derivaci $f''(x)$ na intervalu I_0. Potom platí:
Funkce $f(x)$ je konvexní (konkávní) na intervalu I, když a jenom když $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pro $x \in I_0$.

Důkaz: Důkaz rozdělíme do dvou částí.

a) Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu I a nechť existuje $f''(x)$ pro $x \in I_0$. Nechť $f(x)$ je konvexní na I. Dokažme, že potom je $f''(x) \geq 0$ pro $x \in I_0$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje bod $x_2 \in I_0$, tak, že $f''(x_2) < 0$. Existuje tedy $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$, $x \neq x_2$, existuje $\frac{f'(x) - f'(x_2)}{x - x_2}$ a platí

$$\frac{f'(x) - f'(x_2)}{x - x_2} < 0. \tag{11.9}$$

Zvolme $x_1 \in (x_2 - \delta, x_2)$, $x_3 \in (x_2, x_2 + \delta)$. Poněvadž dle předpokladu je funkce $f(x)$ konvexní na I, platí (11.6) i pro takto zvolené body x_1, x_2, x_3. Aplikujeme-li větu o přírustku funkce na (11.6), dostáváme, že existuje $c \in (x_2 - \delta, x_2)$ a $d \in (x_2, x_2 + \delta)$ tak, že

$$f'(c) \leq f'(d). \tag{11.10}$$

Avšak z (11.9) vyplývá, že

$$f'(c) > f'(x_2) > f'(d). \tag{11.11}$$

Poněvadž (11.10), (11.11) nemohou současně platit, dospěli jsme ke sporu. Je tedy $f''(x) \geq 0$ pro $x \in I$.

b) Nechť $f(x)$ je spojitá na I a nechť $f''(x) \geq 0$ pro $x \in I_0$. Dokažme, že potom je $f(x)$ konvexní na I.

Poněvadž $f''(x) \geq 0$ pro $x \in I_0$, je $f'(x)$ neklesající na I_0. Předpokládejme, že $f(x)$ není konvexní na I. Existují tedy body $x_1, x_2, x_3 \in I$ tak, že neplatí (11.6), tedy že je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \quad x_1 < x_2 < x_3. \tag{11.12}$$

Aplikujeme-li na (11.12) větu o přírustku funkce, dostáváme, že existuje $c \in (x_1, x_2)$ a $d \in (x_2, x_3)$ tak, že

$$f'(c) > f'(d). \tag{11.13}$$

Poněvadž $c, d \in I_0$, $c < d$ a $f'(x)$ je neklesající na I_0, nemůže (11.13) platit. Je tedy $f(x)$ konvexní na I.

Podobně se dokáže věta pro funkce konkávní.

Poznámka. K větě 11.17 lze vyslovit analogickou větu pro funkce ryze konvexní a pro funkce ryze konkávní.

Uveďme si ještě další větu, která je zobecněním tvrzení ve větě 11.17.

Věta 11.18. (Ryze konvexní funkce na intervalu)

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I. Označme I_0 množinu jeho vnitřních bodů. Nechť $f''(x) \geq 0$ pro $x \in I_0$, přičemž $f''(x) = 0$ jen v konečném počtu bodů z I_0. Potom funkce $f(x)$ je na intervalu I ryze konvexní.

Důkaz: Princip důkazu ukažme v následujícím případě. Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $I = \langle a, b \rangle$. Nechť $c \in (a, b)$, $f''(c) = 0$ a nechť $f''(x) > 0$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$.

Za těchto předpokladů je $f'(x)$ spojitá na (a, b). Jsou-li $x_1, x_2 \in (a, c\rangle$, $x_1 < x_2$, je podle věty o přírustku funkce

$$\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = f''(\xi), \quad \text{kde } \xi \in (x_1, x_2).$$

Je tedy $f'(x_2) - f'(x_1) > 0$. Je tedy $f'(x_1) < f'(x_2)$ pro $x_1, x_2 \in \langle a, c), x_1 < x_2$. Funkce $f'(x)$ je tedy rostoucí na $(a, c\rangle$. Podobně se dokáže, že $f'(x)$ je rostoucí na intervalu $\langle c, b)$. Tedy $f'(x)$ je rostoucí na intervalu (a, b). Předpokládejme, že funkce $f(x)$ není ryze konvexní na $\langle a, b\rangle$. Pak existují taková čísla $x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2 < x_3$, že pro ně neplatí (11.5), to jest, že platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{11.14}$$

Aplikujeme-li na každou stranu (11.14) větu o přírustku funkce, dostáváme

$$f'(\xi) \geq f'(\eta), \quad \text{kde } \xi \in (x_1, x_2), \; \eta \in (x_2, x_3). \tag{11.15}$$

Nelezli jsme tedy $\xi, \eta \in (a, b)$, $\xi < \eta$, pro něž platí (11.15). To však nemůže platit, neboť $f'(x)$ je rostoucí na (a, b). Je tedy $f(x)$ ryze konvexní na $\langle a, b\rangle$.

Věta 11.19. (Ryze konkávní funkce na intervalu)

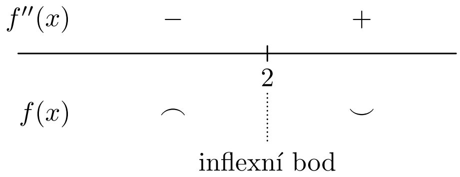
Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I. Označme I_0 množinu jeho vnitřních bodů. Nechť $f''(x) \leq 0$ pro $x \in I_0$, přičemž $f''(x) = 0$ jen v konečném počtu bodů z I_0. Potom funkce $f(x)$ je na intervalu I ryze konkávní.

Důkaz: Důkaz je analogický důkazu věty 11.18.

Při hledání intervalů konvexity a konkávnosti a inflexních bodů lze často použít následující postup. Nechť funkce $f(x)$ je na intervalu I spojitá. Nechť I_0 je množina jeho vnitřních bodů. Na číselné ose vyznačíme interval I. Nad číselnou osu napíšeme „$f''(x)$“, budeme totiž nad číselnou osou vyznačovat znamení funkce $f''(x)$. Pod číselnou osu napíšeme „$f(x)$“, budeme totiž pod číselnou osou vyznačovat symboly konvexnost, resp. konkávnost funkce $f(x)$. Nechť funkce $f(x)$ má na intervalu I_0 druhou derivaci $f''(x)$. Nechť $f''(x)$ má na I_0 konečný počet nulových bodů. Tyto nulové body rozdělí interval I na několik částečných intervalů. Je-li $c \in I_0$ takový bod, že $f''(c) = 0$, počítáme bod c k oběma sousedním intervalům s koncovým bodem c. Ve všech vnitřních bodech každého z těchto částečných intervalů je buďto $f''(x) > 0$ nebo $f''(x) < 0$. V případě, že je zde $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), napíšeme nad tento interval symbol „$+$“ (symbol „$-$“) a pod tento interval symbol „$\smile$“ („$\frown$“) vyjadřující, že je na něm funkce $f(x)$ ryze konvexní (ryze konkávní). Je-li $f(x)$ ryze konvexní (ryze konkávní) ve dvou sousedních intervalech, je ryze konvexní (ryze konkávní) i na jejich sjednocení. Ve společném bodě c těchto sousedních intervalů, v němž je $f''(c) = 0$, nemá funkce $f(x)$ inflexní bod. Je-li $f(x)$ ryze konvexní (ryze konkávní) v některém částečném intervalu a v sousedním intervalu je $f(x)$ ryze konkávní (ryze konvexní), má funkce $f(x)$ ve společném bodě c těchto intervalů inflexní bod.

Příklad 11.12. Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + x$ konvexní a intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ konkávní.

Řešení. Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $I = (-\infty, \infty)$. Výpočtem dostáváme $f''(x) = 6x - 12$, $x \in (-\infty, \infty)$. Řešme rovnici $f''(x) = 0$, tj. $6x - 12 = 0$. Tato rovnice má jediné řešení $x_1 = 2$. Tento nulový bod rozdělí interval I na dva částečné intervaly: $(-\infty, 2\rangle$, $\langle 2, \infty)$. Ve vnitřních bodech intervalu $(-\infty, 2\rangle$ je $f''(x) < 0$ a ve vnitřních bodech intervalu $\langle 2, \infty)$ je $f''(x) > 0$. Je tedy funkce $f(x)$ ryze konkávní na intervalu $(-\infty, 2\rangle$ a ryze konvexní na intervalu $\langle 2, \infty)$. V bodě $x = 2$ má funkce $f(x)$ inflexní bod. (Viz obr. 11.19)



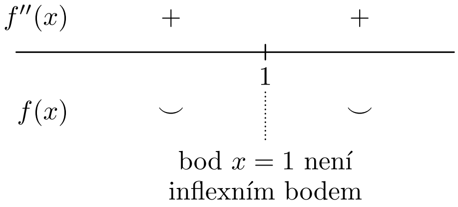
Obrázek 11.19: Konvexita funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + x$.

Příklad 11.13. Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x + 1$ konvexní, intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ konkávní a inflexní body.

Řešení. Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $I = (-\infty, \infty)$. Zřejmě $I_0 = (-\infty, \infty)$ je množina vnitřních bodů intervalu I. Výpočtem dostáváme

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12.$$

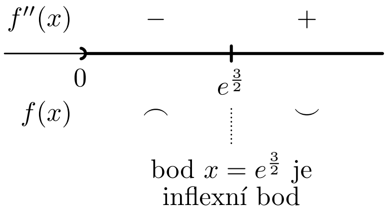
Řešením rovnice $f''(x) = 0$, tj. rovnice $x^2 - 2x + 1 = 0$, dostáváme $x_{1,2} = 1$. Body $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ rozdělí interval I na dva částečné intervaly $(-\infty, 1\rangle$, $\langle 1, \infty)$. Ve vnitřních bodech každého z nich je $f''(x) > 0$. Je tedy $f(x)$ ryze konvexní jak na intervalu $(-\infty, 1\rangle$, tak i na intervalu $\langle 1, \infty)$. Je tedy ryze konvexní i na jejich sjednocení, to jest na intervalu $(-\infty, \infty)$. Viz obr. 11.20. Tato funkce nemá inflexní bod.



Obrázek 11.20: Konvexita funkce $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x + 1$.

Příklad 11.14. Určete inflexní body funkce $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$.

Řešení. Funkce $f(x)$ je spojitá na svém definičním oboru $I = (0, \infty)$. Výpočtem dostáváme $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$, $f''(x) = \frac{1}{x^3}(2\ln x - 3)$. Řešením rovnice $f''(x) = 0$, tj. rovnice $\frac{1}{x^3}(2\ln x - 3)$, dostáváme $\ln x = \frac{3}{2}$, tj. $x = e^{\frac{3}{2}}$. Určením znamení $f''(x)$ dostáváme, že $f(x)$ je konkávní v intervalu $(0, e^{\frac{3}{2}}\rangle$, konvexní na intervalu $\langle e^{\frac{3}{2}}, \infty)$. V bodě $x = e^{\frac{3}{2}}$ má inflexní bod. Viz obr. 11.21.



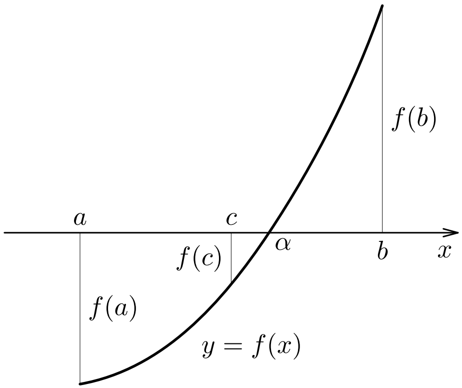
Obrázek 11.21: Konvexita funkce $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$.

11.6. Hledání kořenů rovnice $f(x) = 0$ „metodou půlení intervalu“.

Ukažme si nyní větu, která je velice prospěšná při hledání kořenů rovnic. Tuto větu jsme mohli vyslovit již dříve, ale na tomto místě můžeme využít v následujícím příkladě poznatky o hledání extrémů funkce.

Věta 11.20.

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje alespoň jedno takové číslo $\alpha \in (a, b)$, že $f(\alpha) = 0$. (Viz obr 11.22.)



Obrázek 11.22: Ilustrace významu věty 11.20.

Tato věta umožňuje nalézt kořen α rovnice $f(x) = 0$ s libovolnou přesností postupným dělením intervalu $\langle a, b\rangle$. Určíme bod $c = (a+b)/2$. Je-li $f(c) = 0$, je $\alpha = c$. V opačném případě, je-li $f(c) \cdot f(a) > 0$, položíme $a = c$; je-li $f(c) \cdot f(a) < 0$, položíme $b = c$. Tím se obdrží nový zúžený interval $\langle a, b\rangle$ v němž leží číslo α. Celý postup opakujeme tak dlouho, až obdržíme buďto číslo c, v němž je $f(c) = 0$ anebo interval $\langle a, b\rangle$, v němž leží kořen α a jehož délka $b - a$ je menší než zvolené číslo, udávající požadovanou přesnost.

Příklad 11.15. Nalezněme reálné kořeny polynomu $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

Řešení: Abychom určili reálné kořeny daného polynomu, určeme napřed jeho znamení.

Určeme lokální extrémy dané funkce. Výpočtem dostáváme

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1.$$

Polynom $f'(x)$ má kořeny $x_1 = 1 - 1/3\sqrt{6}$, $x_2 = 1 + 1/3\sqrt{6}$. Určeme znamení funkce $f'(x)$ a intervaly monotónnosti funkce $f(x)$. Dostáváme

$$\begin{array}{c|ccccc}
f'(x) & + & & - & & + \\
\hline
 & & x_1 & & x_2 & \\
f(x) & \nearrow & & \searrow & & \nearrow
\end{array}$$

Je tedy $f(x)$ rostoucí v intervalu $(-\infty, x_1\rangle$, klesající v intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$, rostoucí v intervalu $\langle x_2, \infty)$. Funkce f má tedy v bodě x_1 lokální minimum. Poněvadž výpočtem zjistíme, že

$$f(x_1) < 0, \quad f(x_2) < 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

má funkce $f(x)$ jenom jeden reálný kořen $\alpha \in (x_2, \infty)$. Funkce $f(x)$ je záporná pro $x \in (-\infty, \alpha)$ a kladná pro $x \in (\alpha, \infty)$.

Počítáním hodnot funkce $f(x)$ v bodech intervalu (x_2, ∞), zjistíme, že např. $f(2) = -3$, $f(3) = 2$.

Poněvadž $f(x)$ je funkce spojitá a rostoucí na intervalu $\langle 2, 3\rangle$ a $f(2) < 0$, $f(3) > 0$, má funkce $f(x)$ na intervalu $(2, 3)$ právě jeden kořen. Tento kořen můžeme hledat metodou půlení intervalu.

Položme $a := 2$, $b := 3$. Postupně dostáváme

$$
\begin{aligned}
&f(a) := -3,\ f(b) := 2;\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{5}{2},\ f(c) = -\frac{13}{8},\ a := c\\
&f(a) := -\frac{13}{8},\ f(b) := 2;\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{11}{4},\ f(c) = -\frac{9}{64},\ a := c\\
&f(a) := -\frac{9}{64},\ f(b) := 2;\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{23}{8},\ f(c) = \frac{431}{512},\ b := c\\
&f(a) := -\frac{9}{64},\ f(b) := \frac{431}{512};\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{89}{32},\ f(c) = \frac{1349}{4096},\ b := c\\
&f(a) := -\frac{9}{64},\ f(b) := \frac{1349}{4096};\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{5}{2},\ f(c) = \frac{2921}{32768},\ b := c\\
&f(a) := -\frac{9}{64},\ f(b) := \frac{2921}{32768};\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{177}{64},\ f(c) = -\frac{7087}{262144},\\
&\quad a := c\\
&f(a) := -\frac{7087}{262144},\ f(b) := \frac{2921}{32768};\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{355}{128},\\
&\quad f(c) = \frac{64443}{2097152},\ b := c
\end{aligned}
$$

Tedy $a \doteq 2{,}7656$, $b \doteq 2{,}7734$, takže

$$\alpha \doteq 2{,}7695.$$

Úkol. Načrtněte si graf funkce $f(x)$ a vyznačte body x_1, x_2, $a = 2$, $b = 3$ a kořen α.

11.7. Výpočet některých typů limit

Nechť $f(x)$, $g(x)$ *jsou dvě funkce a nechť* $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, *kde* $A, B \in \mathbb{R}^*$. *Symbol* $\lim$ *zde zastupuje kterýkoliv ze symbolů* $\lim\limits_{x\to a_+}$, $\lim\limits_{x\to a_-}$, $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$, *kde* $a \in \mathbb{R}$. *Zatím jsme uvažovali dva případy pro výpočet* $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$.

a) Ve větě 8.2 *jsme uvedli, že*

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B},$$

pokud $\frac{A}{B}$ *má význam v* $\mathbb{R}^*$. *Podíl* $\frac{A}{B}$ *nemá význam v případě, že* $B = 0$, *a v případě, že* $A = \pm\infty$, $B = \pm\infty$.

b) Ve větě 8.4 *jsme uvedli případ, kdy* $A \neq 0$, $B = 0$.

Doporučuji, abyste si obě tyto věty zopakovali. Přistoupíme nyní k další větě pro výpočet limity podílu dvou funkcí.

c) V další větě, zvané L'Hôspitalovo pravidlo, vyšetříme případy α*)* $A = B = 0$, β*)* $A = \pm\infty$, $B = \pm\infty$.

L'Hôspitalovo pravidlo

Věta 11.21. (L'Hôspitalovo pravidlo)

Nechť $f(x)$, $g(x)$ *jsou takové funkce, že*

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad \textit{nebo}$$
$$\lim f(x) = \pm\infty, \ \lim g(x) = \pm\infty.$$

Existuje-li vlastní nebo nevlastní limita

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha,$$

pak existuje $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha.$$

Symbol $\lim$ *zde může nabýt kteréhokoliv z pěti významů:*

$$\lim_{x\to a^+}, \ \lim_{x\to a^-}, \ \lim_{x\to a}, \ \lim_{x\to -\infty}, \ \lim_{x\to +\infty}.$$

Důkaz: Omezme se na případ, že $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ a pro určitost předpokládejme, že jde o limity zprava v čísle a a že α je reálné číslo. Položme $f(a) = g(a) = 0$. Pak funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou v čísle a zprava spojité. Poněvadž

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha,$$

existuje k libovolnému $\varepsilon > 0$ takové číslo $\delta > 0$, že funkce $f(x)$, $g(x)$ mají v intervalu $(a, a+\delta)$ derivaci a v něm platí

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha \right| < \varepsilon. \tag{11.16}$$

Odtud též vyplývá, že $g'(x) \neq 0$. Buď $\overline{x}$ libovolné číslo tohoto intervalu. Pak na intervalu $\langle a, \overline{x} \rangle$ splňují funkce f, g předpoklady věty o přírustku funkce. Podle ní tedy existuje $c \in (a, \overline{x})$ tak, že

$$[f(\overline{x}) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(\overline{x}) - g(a)] \cdot f'(c).$$

Poněvadž $f(a) = g(a) = 0$, dostáváme odtud

$$f(\overline{x}) \cdot g'(c) = g(\overline{x}) \cdot f'(c).$$

Poněvadž $g'(x) \neq 0$ pro $x \in (a, \overline{x})$, je též $g'(c) \neq 0$. Ukažme, že je $g(\overline{x}) \neq 0$. Předpokládejme, že $g(\overline{x}) = 0$. Pak by podle věty o přírustku funkce existovalo uvnitř $(a, \overline{x})$ číslo c_1 tak, že $g'(c_1)(\overline{x} - a) = g(\overline{x}) - g(a) = 0$. To by byl spor, neboť $g'(x) \neq 0$

na intervalu $(a, a+\delta)$, tedy i $g'(c_1) \neq 0$. Tedy $g(\overline{x}) \neq 0$. Je tedy

$$\frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Odtud a ze vztahu (11.16) pak dostáváme, že

$$\left| \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} - \alpha \right| < \varepsilon.$$

Proto platí:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

Podobně se důkaz provede i v ostatních případech.

Příklad 11.16. Vypočítejte

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}.$$

Řešení: Položme

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} - 1, \qquad g(x) = x.$$

Zřejmě $f(x)$ i $g(x)$ jsou funkce spojité v bodě 0. Je tedy

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0) = 0.$$

Podle L'Hôspitalova pravidla platí

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)_{x=0} = 0.$$

Poznámka. Užitím věty 11.21 lze počítat i limitu tzv. neurčitých výrazů. Jsme zvyklí je zapisovat takto

„$\frac{0}{0}$“, jestliže limita čitatele i jmenovatele je rovna 0,
„$\frac{\infty}{\infty}$“, jestliže čitatel i jmenovatel mají nevlastní limity,
„$0\cdot\infty,\ 0\cdot(-\infty)$“, pro případ výpočtu $\lim f(x)g(x)$, kdy $\lim f(x)=0$ a $\lim g(x)=\infty(-\infty)$,
„$\infty-\infty$“, kdy limita jednoho sčítance je $+\infty$ a druhého je rovna $-\infty$,
„0^0“, pro případ výpočtu $\lim f(x)^{g(x)}$, kdy $\lim f(x)=0$, $\lim g(x)=0$
„$0^{\pm\infty}$“, pro případ výpočtu $\lim f(x)^{g(x)}$, kdy $\lim f(x)=0$, $\lim g(x)=\pm\infty$.

Limity takovýchto výrazů počítáme převedením na výpočet podílu takových funkcí, abychom mohli použít L'Hôspitalovo pravidlo. Výpočet limity $f(x)^{g(x)}$ počítáme tak, že zapíšeme

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

a limitu počítáme výpočtem limity funkce $g(x)\ln f(x)$ a použijeme větu o výpočtu limity složené funkce.

Příklad 11.17. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)$.

Řešení. Zde menšenec i menšitel mají limitu rovnu $+\infty$. Jde o případ, který jsme označili „$\infty - \infty$“. Dostáváme

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x) = \lim_{y\to 0_+}\left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{|y|}-\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to 0_+}\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{y}.$$

Poněvadž

$$\lim_{y\to 0_+}\left(\sqrt{1-y^2}-1\right) = \left(\sqrt{1-y^2}-1\right)_{y=0} = 0, \qquad \lim_{y\to 0_+} y = 0$$

použijeme L'Hôspitalovo pravidlo. Dostáváme

$$\lim_{y\to 0_+}\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{y} = \lim_{y\to 0_+}\frac{\frac{1}{2}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2y)}{1} = \lim_{y\to 0_+}\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Příklad 11.18. Vypočítejte

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0_+} xe^{\frac{1}{x}}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0_-} xe^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení.

a) Zřejmě

$$\lim_{x\to 0_+} x = 0, \qquad \lim_{x\to 0_+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} e^y = \infty.$$

Jde tedy o výpočet limity typu „$0 \cdot \infty$“. Úpravou dostáváme

$$\lim_{x\to 0_+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}},$$

tedy jde o typ „$\frac{\infty}{\infty}$“. Použitím L'Hôspitalova pravidla dostáváme

$$\lim_{x\to 0_+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} e^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

b) Zřejmě

$$\lim_{x\to 0_-} x = 0, \qquad \lim_{x\to 0_-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} e^{y} = 0.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 0_-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$.

Příklad 11.19. Vypočítejte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Řešení. Jde o výpočet limity typu „$\frac{\infty}{\infty}$“. Užitím L'Hôspitalova pravidla dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Příklad 11.20. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 0_+} x^x.$$

Řešení. Jde o výpočet limity typu „0^0“. Funkce x^x je definovaná pro $x \in (0,\infty)$. Lze ji přepsat na tvar

$$x^x = e^{x\ln x}.$$

Jde o složenou funkci, její vnější složkou je funkce e^u, vnitřní složkou je funkce $x\ln x$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Užitím L'Hôspitalova pravidla obdržíme

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0_+} x = 0.$$

Poněvadž e^u je funkce spojitá, je

$$\lim_{x\to 0_+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0_+}(x\ln x)} = e^0 = 1.$$

11.8. Průběh funkce

Zavedeme nyní pojem asymptot funkce $f(x)$. Jde o přímky, které dále uvedeným způsobem charakterizují průběh funkce. Dělíme je na a) asymptoty bez směrnice a na b) asymptoty v nevlastních bodech $-\infty$, ∞.

Definice 11.6. (Asymptoty bez směrnice)
Přímku $x = a \in \mathbb{R}$ nazýváme *asymptotou bez směrnice* funkce $y = f(x)$, jestliže $\lim f(x) = \infty$ nebo $\lim f(x) = -\infty$, kde $\lim$ značí alespoň jeden ze symbolů

$$\lim_{x\to a^-}, \qquad \lim_{x\to a^+}, \qquad \lim_{x\to a}.$$

Poznámka. Otázkou je, jak určit a, pro nějž je

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = +\infty \quad (\text{nebo } \lim_{x\to a_+} f(x) = -\infty)$$

nebo

$$\lim_{x\to a_-} f(x) = +\infty \quad (\text{nebo } \lim_{x\to a_-} f(x) = -\infty).$$

Lehce nahlédneme, že a je buďto bodem, v němž funkce $f(x)$ není spojitá, nebo koncovým bodem intervalu $J \subseteq D_f$.

Příklad 11.21. Určeme asymptotu bez směrnice funkce

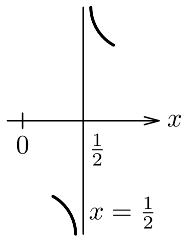
$$f(x) = \frac{3x^2+1}{2x-1}.$$

Řešení. Funkce $f(x)$ je spojitá pro $x \in (\infty, \infty) - \{\frac{1}{2}\}$. Výpočtem dostáváme

$$\lim_{x \to 1/2^+} \frac{3x^2+1}{2x-1} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1/2^-} \frac{3x^2+1}{2x-1} = -\infty.$$

Je tedy $x = \frac{1}{2}$ asymptotou bez směrnice funkce $f(x)$.

Při vyšetřování průběhu funkce $\frac{3x^2+1}{2x-1}$ vyznačíme asymptotu bez smernice takto



Obrázek 11.23: Asymptoty bez směrnice – $x = \frac{1}{2}$.

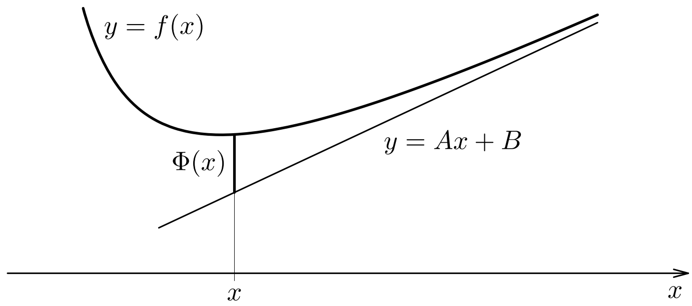
Definice 11.7. (Asymptota v nevlastním bodě)

Přímku $y = Ax+B$ (A, B jsou reálná čísla) nazýváme *asymptotou* funkce $y = f(x)$ v nevlastním bodě ∞ ($-\infty$), jestliže (viz obr. 11.24)

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0 \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0\right),$$

kde

$$\Phi(x) = f(x) - Ax - B.$$



Obrázek 11.24: Asymptotou v bodě ∞.

K určení asymptot se směrnicí používáme následující věty.

Věta 11.22. (Určení asymptoty v nevlastním bodě)

Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou grafu $y = f(x)$ v nevlastním bodě ∞ $(-\infty)$, když a jen když

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad B = \lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax)$$
$$\left(A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad B = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - Ax) \right).$$

Poznámka. Místo „asymptota bez směrnice" se používá též termín „*asymptota rovnoběžná s osou* y". Název vychází z toho, že přímka rovnoběžná s osou y svírá s osou x úhel 90° a tato přímka nemá směrnici ($\operatorname{tg} 90^\circ$ není definováno).

Místo „asymptota v nevlastním bodě" lze použít i termínu „*asymptota se směrnicí*".

Příklad 11.22. Určete asymptoty se směrnicí funkce

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x - 1}.$$

Řešení. Výpočtem dostáváme

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x^2 - x} = \lim_{y\to0^+} \frac{\frac{3}{y^2} - 1}{\frac{2}{y^2} - \frac{1}{y}} = \lim_{y\to0^+} \frac{3 - y^2}{2 - y} = \frac{3}{2}.$$

Dále dostáváme:

$$B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{2x-1} - \frac{3}{2}x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-2-6x^2+3x}{2(2x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{2(2x-1)} = \frac{3}{4}.$$

Je tedy $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ asymptotou grafu funkce $y = \frac{3x^2-1}{2x-1}$ v nevlastním bodě ∞. Lehce se přesvedčíme, že tato přímka je i asymptotou dané funkce v nevlastním bodě $-\infty$.

Příklad 11.23. Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+1}.$$

Řešení.

a) Asymptoty bez směrnice.

Definičním oborem je množina $(-\infty, \infty) - \{-1\}$. Tedy $f(x)$ není spojitá jen v bodě -1. Abychom určili $\lim\limits_{x\to-1_+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to-1_-} f(x)$ určíme znamení funkce $f(x)$.

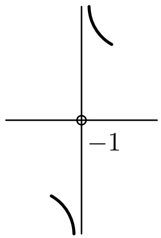
Dostáváme

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

-1

Poněvadž $\lim\limits_{x\to -1_+} (2x^2 + 1) = 3 \neq 0$, $\lim\limits_{x\to -1_+} (x + 1) = 0$, použijeme k výpočtu $\lim\limits_{x\to -1_+} f(x)$ větu 8.4.

Poněvadž existuje $U^+(-1)$ tak, že pro $x \in U^+(-1) - \{-1\}$ je $f(x) > 0$, je $\lim\limits_{x\to -1_+} f(x) = \infty$. Podobně zjistíme, že $\lim\limits_{x\to -1_-} f(x) = -\infty$. Je tedy $x = -1$ asymptotou bez směrnice funkce $f(x)$. (Viz následující náčrtek.)



b) Asymptoty se směrnicí.

Hledejme asymptotu v nevlastním bodě ∞. Asymptotou je přímka $Ax + B$ kde

A, B, se určí podle věty 11.22. Dostáváme

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 2$$

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x+1} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1-2x^2-2x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -2. \end{aligned}$$

Je tedy

$$y = 2x - 2$$

asymptotou v nevlastním bodě ∞. Tato přímka je zároveň asymptotou v nevlastním bodě $-\infty$.

Poznámka. Lze ukázat, že u racionálních lomených funkcí je asymptota v nevlastním bodě $+\infty$ totožná s asymptotou v nevlastním bodě $-\infty$.

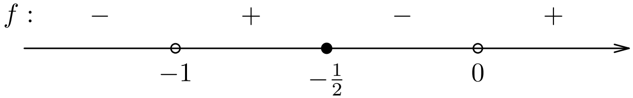
Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme:

1. *Kde je funkce definovaná, kde má nulové body, kde je nad osou x a kde je pod osou x (znamení funkce). Zda je funkce sudá, lichá, periodická.*
2. *Kde funkce roste, kde klesá, kde má extrémy.*
3. *Kde je funkce konvexní, kde je konkávní a kde má inflexní body.*
4. *Jaké má asymptoty.*
5. *Graf.*

Příklad 11.24. Vyšetřeme průběh funkce

$$y = \frac{2x+1}{x(x+1)}.$$

1. Jde o reálnou racionální lomenou funkci. Čitatel $2x+1$ má kořen $x = -\frac{1}{2}$, jmenovatel $x(x+1)$ má dva kořeny, a to $x = 0$ a $x = -1$. Poněvadž čitatel a jmenovatel funkce nemají stejné kořeny a každý kořen čitatele a jmenovatele je jednoduchý (liché násobnosti), rozdělí tyto kořeny interval $(-\infty, \infty)$ na 4 částečné intervaly. V sousedních intervalech má funkce opačné znaménko (viz náčrtek).



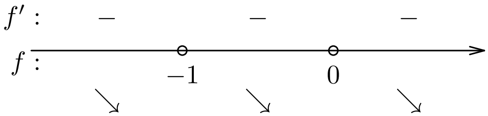
   Funkce není definovaná v bodech $x = 0$, $x = -1$. Graf funkce protíná osu x v bodě $x = -\frac{1}{2}$.

Funkce není ani sudá ani lichá, není periodická.

2. Vypočítejme $f'(x)$. Dostáváme:

$$f'(x) = -\frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2(x+1)^2}.$$

Čitatel nemá reálné kořeny, jmenovatel má čísla -1, 0 za dvojnásobné kořeny. Znamení $f'(x)$a monotónnost funkce $f(x)$ jsou patrny z následujícího náčrtku:

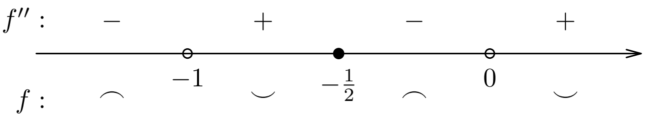


Podle věty 11.7 funkce $f(x)$ klesá v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, \infty)$. Poněvadž $f'(x)$ existuje v D_f a je zde $f'(x) \neq 0$, nemá $f(x)$ lokální extrémy.

3. Výpočítejme $f''(x)$. Dostáváme

$$f''(x) = 2\frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3(x+1)^3}.$$

Zřejmě $f''(-\frac{1}{2}) = 0$. Funkce $f''(x)$ nemá jiné reálné kořeny. Znamení $f''(x)$ a konvexita funkce $f(x)$ jsou patrny z náčrtku:



Je tedy $f(x)$ konkávní v intervalech $(-\infty, -1)$, $\langle -\frac{1}{2}, 0)$ a konvexní v intervalech $(-1, -\frac{1}{2}\rangle$, $(0, \infty)$. Bod $x = -\frac{1}{2}$ je inflexním bodem.

4. Přímka $x = a$ může být asymptotou bez směrnice grafu $y = f(x)$ pouze tehdy, není-li funkce f v bodě a spojitá zprava nebo zleva. V našem případě se jedná o body $x = 0$, $x = -1$. Výpočtem dostáváme (podívejte se na znamení funkce $f(x)$):

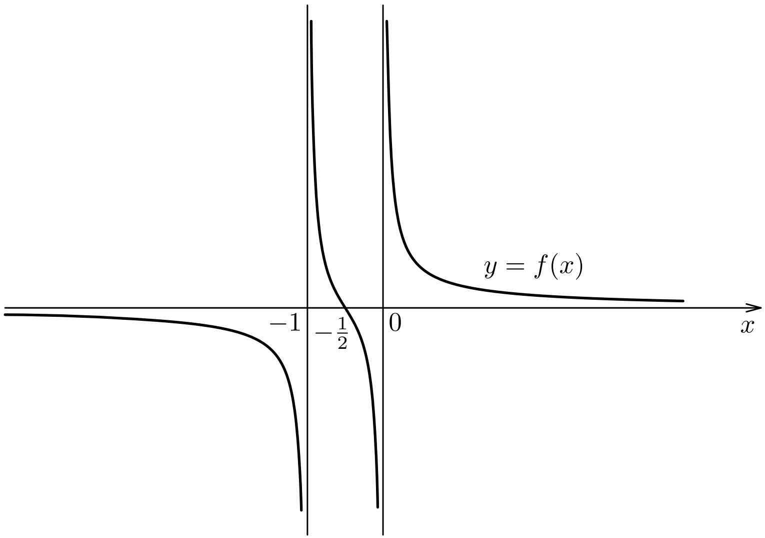
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty.$$

Tedy přímky $x = -1$, $x = 0$ jsou asymptoty bez směrnice. K určení asymptot se směrnicí vypočítáme:

$$A = \lim_{x\to\pm\infty} = \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad B = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Tedy $y = 0$ je asymptotou se směrnicí v bodech ∞, $-\infty$.

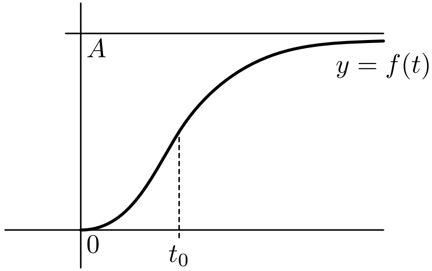
5. Náčrtek grafu:



Obrázek 11.25: Náčrtek grafu funkce $\frac{2x+1}{x(x+1)}$.

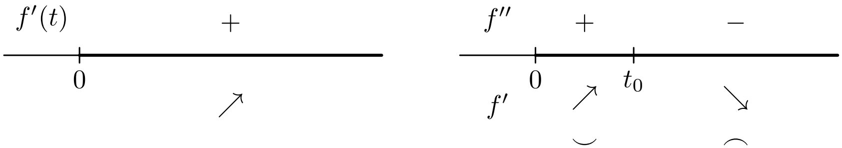
Příklad 11.25. Na obr. 11.26 je znázorněna funkce $y = f(t)$, $t \in \langle 0, \infty)$ popisující množství y prodeje nějakého zboží jako funkci času t.

Na následujících náčrtcích je znázorněno znamení $f'(t)$, $f''(t)$. Z nich lze vyvodit tyto



Obrázek 11.26: Prodej zboží.

závěry



Funkci $f'(t)$ lze chápat jako funkci „rychlosti“ prodeje. Rychlost prodeje se zvyšuje až do časového okamžiku t_0, potom rychlost prodeje klesá.

11.9. Diferenciál a Taylorova věta

V této části se budeme zabývat přibližným vyjádřením funkce. Řešme tuto úlohu. Je dána funkce $f(x)$; nahraďme ji pro x v blízkosti bodu a polynomem.

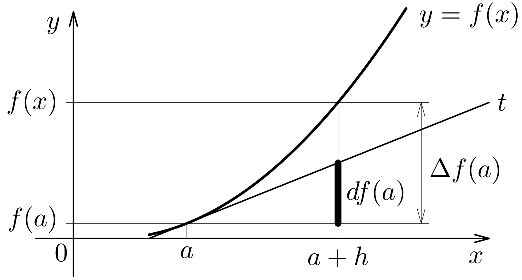
Úloha je nejjednodušeji rešena, nahradíme-li ji polynomem prvního stupně – tečnou, za předpokladu, že existuje $f'(a)$.

Zvolme h. Položme $x = a + h$. Výraz

$$\Delta f(a) = f(a + h) - f(a)$$

nazveme diferencí – jde o přírustek funkce, při přechodu z bodu a do bodu $a + h$.

Přírustek na tečně t funkce $y = f(x)$ v jejím bodě $T[a, f(a)]$ při přechodu z bodu a do bodu $a + h$ je roven $f'(a)h$. (Viz obr. 11.27)



Obrázek 11.27: Význam diferenciálu.

Zaveďme si nyní pojem diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě a touto definicí.

Definice 11.8. (Diferenciál funkce $y = f(x)$)

Nechť funkce $y = f(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a)$. Potom

$$df(a) = f'(a)h, \quad h \in \mathbb{R} \text{ je proměnná}$$

nazýváme *diferenciálem funkce $f(x)$ v bodě a*.

Poznámka. Poněvadž pro $y = x$ je $dx = h$, píšeme často dx místo h. Potom

$$df(a) = f'(a)dx.$$

Má-li funkce $y = f(x)$ derivaci na intervalu I, potom píšeme

$$df = f'(x)dx, \quad \text{resp.} \quad dy = f'(x)dx, \; x \in I. \tag{11.17}$$

Potom diferenciál dy je funkcí dvou proměnných: x, dx.

Vztah (11.17) lze přepsat jako podíl

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad x \in I. \tag{11.18}$$

Zde dx je diferenciál neodvisle proměnné x a dy je diferenciál odvisle proměnné y.

Na derivaci $f'(x)$ se můžeme dívat jako na podíl diferenciálu odvisle proměnné a neodvisle proměnné.

Ukažme, že pro dostatečně malé h je $\Delta f(a)$ rovno přibližně $df(a)$. Zaveďme $\tau(h)$ jako chybu aproximace $\Delta f(a)$ diferenciálem $df(a)$

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \tau(h).$$

Dělíme-li tento výraz číslem h, dostáváme

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{\tau(h)}{h}.$$

Výpočtem limity levé i pravé strany v bodě $h = 0$ dostáváme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0.$$

Tedy

> *Pro malé h je $\Delta f(a)$ rovno přibližně $df(a)$:*
>
> $$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h.$$

Příklad 11.26. Určete diferenciál funkce $f(x) = \sin 2x$ v bodě $x = \frac{\pi}{8}$.

Řešení. V obecném bodě x je

$$df(x) = (\sin 2x)' \cdot dx.$$

Tedy $df(x) = 2\cos 2x \cdot dx$. V bodě $a = \frac{\pi}{8}$ pak platí

$$df\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right) dx = \sqrt{2}dx.$$

Příklad 11.27. Určete přibližně $\sin(31^\circ)$, víte-li, že $\sin(30^\circ) = 0{,}5$, $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Řešení. Úhel 31° vyjádřený v obloukové míře je roven $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}$. Položme $a = \frac{\pi}{6}$, $dx = \frac{\pi}{180}$. Potom

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right) \doteq \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{180} = 0{,}5 + \frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zabývejme se nyní aproximací funkce $f(x)$ polynomem stupně $n \geq 1$.

Taylorova věta

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě $x = a$ derivace až do řádu n včetně. Potom polynom v proměnné h

$$T_n(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n \tag{11.19}$$

se nazývá *Taylorovým polynomem stupně* n příslušným k funkci $f(x)$ v bodě a.
Lehce se přesvědčíme, že polynom $T_n(x)$ a funkce $f(x)$ mají v bodě a stejnou funkční hodnotu a derivace až do řádu n včetně. Označíme-li $h = x - a$, dostáváme z (11.19)

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{11.20}$$

Příklad 11.28. Určete Taylorův polynom příslušný k funkci $f(x) = \sin x$ v bodě $a = 0$ pro $n = 5$.

Řešení. Zřejmě $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$, $(\sin x)^{(4)} = \sin x$, $(\sin x)^{(5)} = \cos x$. Je tedy

$$T_5(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Lze tedy pro x blízká číslu $a = 0$ psát přibližný vztah

$$\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Zabývejme se nyní otázkou, jaké chyby se dopouštíme, nahradíme-li funkci $f(x)$ polynomem $T_n(x)$. Odpověď dává tato věta.

Věta 11.23. (Taylorova věta)
Nechť funkce $f(x)$ má na otevřeném intervalu I derivace až do řádu $n+1$ včetně. Nechť $a \in I$. Potom pro každé $x \in I$ platí

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}, \tag{11.21}$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom určený vztahem (11.20) a R_{n+1} je chyba aproximace, určená např. vztahem

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{11.22}$$

kde θ leží mezi body a, x.

Důkaz: Důkaz používá Rolleovu větu. Není obtížný, ale nebudeme jej však provádět.

Poznámka 1. R_{n+1} představuje chybu, které se dopustíme, aproximujeme-li hodnotu funkce f v bodě x hodnotou polynomu T_n v bodě x. Číslo θ, které zde vystupuje, není větou určeno. Pouze je uvedeno, že leží mezi body a, x. Jestliže platí odhad

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M$$

pro všechna t z intervalu o koncových bodech a, x, lze psát

$$|R_{n+1}| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Poznámka. Specielně pro $a = 0$ dostáváme z (11.20)

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

a z (11.22)

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{kde } \theta \text{ leží mezi } 0 \text{ a } x.$$

Poněvadž případ $a = 0$ se často vyskytuje, uvádí se někdy pro $a = 0$ místo „Taylorova věta" název „Maclaurinova věta".

Taylorova a Maclaurinova řada

Předpokládejme, že a, x jsou dvě navzájem různá čísla a že funkce $f(x)$ má v uzavřeném intervalu I o koncových bodech a, x derivace všech řádů. Na intervalu I uvažujme řadu

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots. \tag{11.23}$$

Potom řada (11.23) je konvergentní a její součet je $f(x)$ na intervalu I, když a jenom když

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in I,$$

kde R_{n+1} je dáno vztahem (11.22).

Je-li tedy (11.23) konvergentní, lže psát

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots . \tag{11.24}$$

Řada (11.24) se nazývá Taylorova řada, resp. pro $a = 0$ se nazývá Maclaurinova řada.

Příklad 11.29. Napište Maclaurinovu řadu pro funkci $f(x) = e^x$.

Řešení. Pro každé n je $(e^x)^{(n)} = e^x$. Je tedy $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = e^0 = 1$. Dosadíme-li tyto hodnoty do (11.23), obdržíme řadu

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots . \tag{11.25}$$

Tato řada je absolutně konvergentní pro každé x. Skutečně, pro každé x jde o číselnou řadu. Aplikací limitního podílového kriteria obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Je tedy řada (11.25) absolutně konvergentní pro každé x. Tedy konverguje na intervalu $(-\infty, \infty)$. Lze tedy psát

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots .$$

Jde o mocninnou řadu se středem konvergence $x_0 = 0$ a poloměrem konvergence $r = \infty$.

11.10. Shrnutí a úlohy

Souhrn

V kapitole je zaveden pojem lokálního extrému funkce $f(x)$ a absolutního extrému funkce (Definice ??, Definice 11.1.1). V kapitole se pojednává o jejich existenci a způsobu jejich nalezení.

V kapitole se uvádí důležitá věta „Věta o přírustku funkce“.

Ukazuje se též postup při hledání intervalů, na nichž je vyšetřovaná funkce monotónní. Dále se vyšetřuje konvexita a konkávnost funkcí. Zavádí se též pojem inflexního bodu funkce. Je uveden postup, jak je v jistých případech možno určit intervaly, na nichž je daná funkce konvexní, resp. konkávní. Je prezentovaná metodika hledání inflexních bodů dané funkce.

V kapitole se též pojednává o numerické metodě hledání kořene rovnice $f(x) = 0$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a je-li $f(a)f(b) < 0$.

V kapitole je pojednáno o zatím neřešeném případě výpočtu limity $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, resp. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ (L'Hôspitalovo pravidlo).

Jedna podkapitola je pak věnována vyšetřování průběhu funkce.

Poslední podkapitola pak pojednává o diferenciálu funkce $f(x)$ a o Taylorově větě.

Úlohy

1. Vysvětlete pojem lokálního extrému funkce $f(x)$ a popište způsob jeho hledání.
2. Vysvětlete pojem absolutního extrému funkce $f(x)$ na intervalu a způsob jeho hledání.
3. Vyslovte větu o přírustku funkce (neboli větu o střední hodnotě funkce).
4. Jak hledáme intervaly, na nichž je vyšetřovaná funkce monotónní?
5. Vysvětlete pojmy: funkce konvexní na intervalu, funkce konkávní na intervalu a pojem inflexního bodu. Jak se hledají intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní? Jak se hledají inflexní body funkce?
6. Popište metodu hledání kořenů rovnice $y = f(x)$ metodou půlení intervalu.
7. Vyslovte L'Hôspitalovo pravidlo.
8. Co je to diferenciál funkce? Uveďte definici a vysvětlete tento pojem na obrázku.
9. Vyslovte Taylorovu větu.

10. Určete body, v nichž má funkce $f(x) = 3x - |x-2| + |x+1|$ lokální extrémy. Danou funkci načrtněte.

11. Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkcí:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

[klesá $(-\infty, \frac{5}{2}\rangle$, roste $\langle\frac{5}{2}, \infty)$, lok. min. v bodě $x = \frac{5}{2}$]

b) $f(x) = x \ln x$ [klesá $(0, \frac{1}{e}\rangle$, roste $\langle\frac{1}{e}, \infty)$, lok. min. $x = \frac{1}{e}$]

c) $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$

[roste $(-\infty, -3\rangle$, $\langle 1, \infty)$, klesá $\langle -3, -1)$, $(-1, 1\rangle$, lok. max. $x = -3$, lok. min. $x = 1$]

d) $f(x) = \frac{1}{x+3}$ [klesá $(-\infty, -3)$, $(-3, \infty)$]

e) $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$ [roste $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$, klesá $\langle\frac{1}{3}, \infty)$, lok. max. $x = \frac{1}{3}$]

f) $f(x) = \sin 2x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

[roste $\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle$, klesá $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\rangle$, $\langle\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, lok. min. v bodě $x = -\frac{\pi}{4}$, lok. max. v bodě $x = \frac{\pi}{4}$]

g) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ [roste $(0, e^2\rangle$, klesá $\langle e^2, \infty)$, lok. max. v bodě $x = e^2$]

h) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ [roste $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$, lok. extrémy nemá]

i) $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$

[roste $\langle 0, \frac{2}{\ln 2}\rangle$, klesá $(-\infty, 0\rangle$, $\langle\frac{2}{\ln 2}, \infty)$, lok. max. v bodě $x = \frac{2}{\ln 2}$, lok. min. v bodě $x = 0$]

j) $f(x) = x^2 + |x| - 1$

[Návod: $f(x) = x^2 + x - 1$ pro $x \geq 0$, $f(x) = x^2 - x - 1$ pro $x < 0$; roste $\langle 0, \infty)$, klesá $(-\infty, 0\rangle$, lok. min. pro $x = 0$]

12. Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ konvexní, intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ konkávní, a určete inflexní body.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$

[konv. $\langle \frac{5}{3}, \infty)$, konk. $(-\infty, \frac{5}{3}\rangle$, infl. bod $x = \frac{5}{3}$]

b) $f(x) = (x+1)^4 + e^x$ [konv. $(-\infty, \infty)$, nemá infl. body]

c) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ [konv. $\langle -1, 1\rangle$, konk. $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, \infty)$]

d) $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ [konv. $\langle e^{\frac{3}{2}}, \infty)$, konk. $(0, e^{\frac{3}{2}}\rangle$, infl. bod $x = e^{\frac{3}{2}}$]

e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

[konk. $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, konv. $\langle -\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \infty)$, infl. bod. $x = -\frac{1}{2}$]

13. Určete absolutní extrémy funkce $f(x)$ na daném intervalu.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6,\ x \in \langle 0, 10\rangle$

[abs. min. v bodě $x = \frac{5}{2}$, abs. max. v bodě $x = 10$]

b) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2},\ x \in (-1, 1)$ [abs. max. v bodě $x = 0$, abs. min. není]

c) $f(x) = \sin \frac{1}{x},\ x \in (0, \infty)$

[abs. max. pro $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k2\pi}$, $k \in \mathbb{N}_0$, abs. min. pro $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{N}_0$]

14. Určete asymptoty funkce.

a) $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ [bez směrnice $x = -1$, v bodech $\pm\infty$: $y = 2x - 2$]

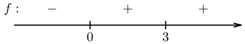
b) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ [bez směrnice $x = 2$, v bodech $\pm\infty$: $y = 3$]

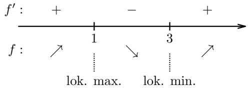
c) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

[asymptoty bez směrnice nemá, $y = x$ v bodě ∞, $y = -x$ v bodě $-\infty$]

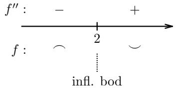
15. Vyšetřete průběh funkce.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

[$D_f = (-\infty, \infty)$, znamení 

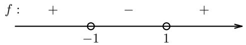
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, 

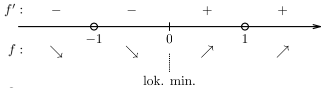
$f(1) = 4$, $f(3) = 0$,

$f''(x) = 6x - 12$, 

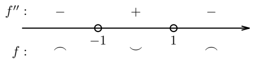
$f(x)$ nemá asymptoty]

b) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

[$D_f = (-\infty, \infty) - \{-1, 1\}$, 

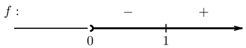
$f'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$, 

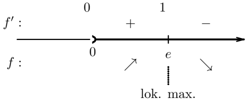
$f(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$, 

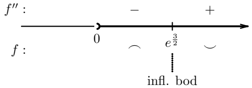
asymptoty: $x = 1$, $x = -1$, $y = -1$]

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

[$D_f = (0, \infty)$, 

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, 

$f(e) = \frac{1}{e}$

$f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$, 

$\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, asymptoty: $x = 0$, $y = 0$]

16. Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2+1}$ [∞]

b) $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x^2}$ [∞]

c) $\lim\limits_{x\to 0_+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1})$ [$\frac{1}{2}$]

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ [0]

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}$ [∞]

f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ [1]

17. Nalezněte diferenciál funkce

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ v bodě $x = 2$ [$df = (3x^2 - 3)dx$, $df(2) = 9dx$]

b) $y = \sin 2x$ [$dy = 2\cos 2x dx$]

c) $y = \sqrt{x-1}$ [$dy = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$]

18. Vypočítejte přibližně podle Taylorovy věty $\ln e^{2,1}$ pro $n = 1, 2, 3$. Odhadněte chybu.

19. Napište MacLaurinovu řadu funkce

a) $f(x) = \sin x$ [$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$, $x \in (-\infty, \infty)$]

b) $f(x) = \cos x$ $\quad$ $[\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,\ x \in (-\infty, \infty)]$

c) $f(x) = \ln(1 + x)$ $\quad$ $[\ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,\ -1 < x \leq 1]$

20. Vytvořte tabulku, v níž vyznačíte funkční hodnoty funkcí $\sin x$, $T_5(x)$ v bodech $x \in \{\pm 0{,}1,\ \pm 0{,}2,\ \pm 0{,}3,\ \pm 0{,}4,\ \pm 0{,}5,\ \pm 0{,}6,\ \pm 0{,}7,\ \pm 0{,}8,\ \pm 0{,}9\}$.

Kapitola 12

Funkce více proměnných

Před zahájením vlastního výkladu objasníme některé pojmy, které budeme v dalším výkladu potřebovat

Poznámky k funkcím více proměnných. Označme $\mathbb{R}^n$ množinu uspořádaných skupin n-reálných čísel. Obecný bod množiny $\mathbb{R}^n$ označme $X = [x_1, \ldots, x_n]$. Zaveďme nyní vzdálenost dvou bodů v $\mathbb{R}^n$ takto:Jestliže $A = [a_1, \ldots, a_n], B = [b_1, \ldots, b_n] \in \mathbb{R}^n$, potom jejich vzdálenost budeme označovat $\rho(A, B)$ a definovat vztahem

$$\rho(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}, \tag{12.1}$$

Množinu $\mathbb{R}^n$ s takto definovanou vzdálenosti ρ budeme značit E_n.

Ve zvláštním případě $n = 1$ je E_1 množina reálných čísel se vzdálenosti $\rho(A, B)$ bodů

$A = a_1, B = b_1$, určenou vztahem $\rho(A,B) = |b_1 - a_1|$.

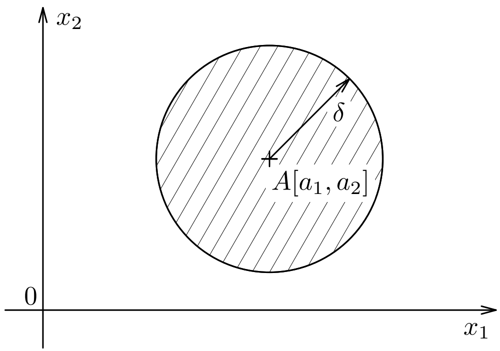
Okolí bodu v $\mathbb{E}_n$

Zaveďme si pojem okolí bodu $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$.

Nechť $A \in \mathbb{E}_n$. Potom množinu

$$U_\delta = \{X \in \mathbb{E}_n : \ \rho(A,X) < \delta\}$$

nazveme δ–okolím bodu A. Na obrázku 12.1 je znázorněno δ–okolí bodu $A \in \mathbb{E}_2$.



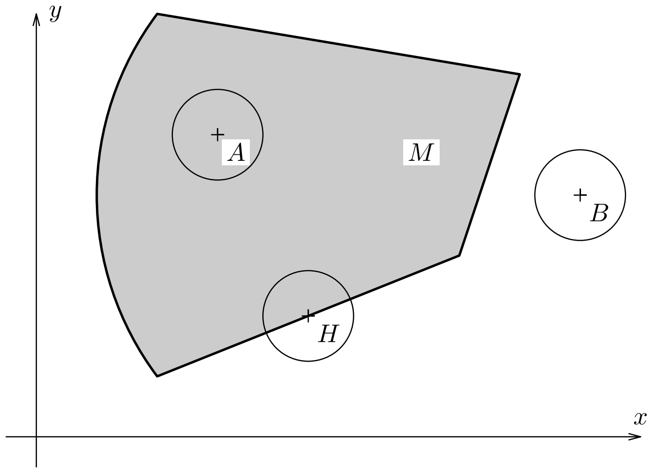
Obrázek 12.1: Okolí $U_\delta(A) = \{X \in \mathbb{E}_2 : \ \rho_2(A,X) < \delta\}$.

Nechť $M \subseteq \mathbb{E}_n$. Bod $A \in \mathbb{E}_n$ nazveme vnitřním bodem množiny M, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že $U_\delta(A) \subset M$.
Bod $B \in \mathbb{E}_n$ nazveme vnějším bodem množiny M, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že $U_\delta(B) \cap M = \emptyset$, to jest, jestliže žádný bod tohoto okolí nepatří do množiny M.
Nechť $M \subseteq E_n$. Bod H se nazývá hraničním bodem množiny M, jestliže v každém jeho okolí leží body, které patří do množiny M a body které nepatří do M. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme hranicí *množiny M.*
Množinu $M \subseteq \mathbb{E}_n$ nazýváme otevřenou, *jestliže všechny její body jsou jejími vnitřními body. Obsahuje-li množina $M \subseteq \mathbb{E}_n$ všechny své hraniční body, nazývá se* uzavřenou. *Viz obr.* *12.2**.*

Množinu M nazveme oblastí, jestliže je otevřená a jestliže ke každým dvěma bodům $A, B \in M$ existují body $P_1, P_2, \dots, P_m$ tak, že $P_1 = A$, $P_m = B$ a každá z úseček $\overline{P_i P_{i+1}}$ leží v M. Příkladem oblasti je množina $\{X \in \mathbb{E}_n : \varrho(A, X) < \varepsilon\}$, kde A je daný bod a ε je dané kladné číslo.

Uveďme si tyto příklady.(Dále uvedené množiny si graficky znázorněte.) Nechť $A \in E_n$ a nechť $\delta > 0$ je libovolné řislo. Potom

1. Množina $M = \{X \in \mathbb{E}_2 : \rho(A, X) < \delta\}$. je otevřená množina.
2. Množina $h = \{X \in \mathbb{E}_2 : \rho(A, X) = \delta\}$ je hranicí množiny M. Každý její bod je hraničním bodem množiny M.
3. Množina $M = \{X \in \mathbb{E}_2 : \rho(A, X) \leq \delta\}$ je uzavřenou oblastí.



Obrázek 12.2: Vnitřní, vnější a hraniční bod množiny.

Pojem funkce více proměnných.

Před započetím studia této podkapitoly si zopakujte pojmy spojitost funkce jedné proměnné v daném bodě, věty o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí jedné proměnné a o spojitosti funkce složené ze spojitých funkcí.

Definice 12.1.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{E}_n$. Potom zobrazení f množiny D do $\mathbb{E}_1$ nazýváme reálnou funkcí n-proměnných*. Označíme-li $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, lze tuto funkci zapsat jako*

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \textit{resp.} \quad z = f(X).$$

Nemůže-li dojít k omylu, budeme často v další části textu místo termínu „reálné funkce n-proměnných" používat jednoduše termín „funkce".

Poznámka. Proměnné funkcí n-proměnných budeme většinou označovat $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Je-li těchto proměnných jen několik, bývá zvykem je označovat též x, y, z, u, t nebo použít označení obvyklé příslušné aplikaci.

Je-li f funkce n-proměnných zadaná předpisem bez uvedení definičního oboru, rozumíme jejím definičním oborem množinu všech bodů $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, pro něž má uvedený předpis význam.

Příklad 12.1. Určete definiční obor funkce

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(1 - x - y). \tag{12.2}$$

Řešení. Poněvadž definiční obor funkce (12.2) není uveden, rozumí se jím množina všech bodů $[x, y]$, pro něž lze výraz na pravé straně (12.2) vypočítat. Zřejmě jsou to ty body $[x, y]$, pro něž platí

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \wedge \quad 1 - x - y > 0. \tag{12.3}$$

Odtud dostáváme

$$x^2 + y^2 \leq 4 \quad \wedge \quad x + y < 1. \tag{12.4}$$

Rovnicí $x^2 + y^2 = 4$ je definovaná kružnice k se středem v počátku o poloměru 2. Označme $A_1 \subset \mathbb{E}_2$ množinu těch bodů $[x, y]$, které leží uvnitř kružnice k a $A_2 \subset \mathbb{E}_2$ množinu těch bodů, které leží vně kružnice k. Poněvadž bod $[0, 0] \in A_1$ vyhovuje nerovnici

$$x^2 + y^2 < 4, \tag{12.5}$$

vyhovují této nerovnici i všechny body z A_1, všechny body $[x, y] \in A_2$ vyhovují nerovnici

$$x^2 + y^2 > 4. \tag{12.6}$$

Nerovnici

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

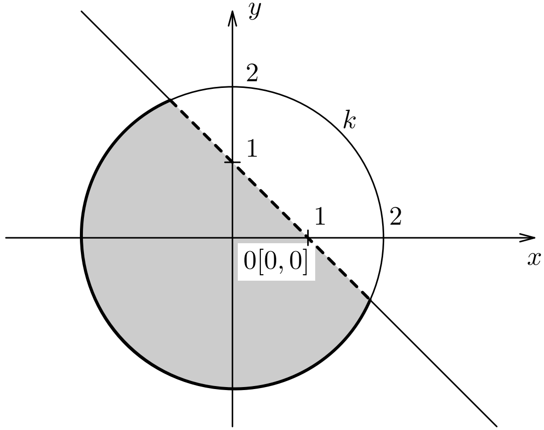
vyhovují tedy všechny body $[x, y] \in \mathbb{E}_2$, které leží uvnitř a na kružnici k.

Rovnicí $x + y = 1$ je definovaná přímka, která protíná osu x v bodě $[1, 0]$ a osu y v bodě $[0, 1]$. Tato přímka rozděluje rovinu $(0xy)$ na dvě poloroviny B_1, B_2. Označení volme tak, že počátek $0 = [0, 0] \in B_1$. Poněvadž bod $[0, 0]$ vyhovuje nerovnici

$$x + y < 1, \tag{12.7}$$

vyhovují nerovnici (12.7) všechny body $[x, y] \in B_1$ a pro body $[x, y] \in B_2$ platí $x + y > 1$.

Je tedy definičním oborem funkce (12.2) množina všech bodů $[x, y] \in B_1$, které leží uvnitř a na obvodu kružnice k. Viz obr. 12.3.



Obrázek 12.3: Definiční obor funkce (12.2)

Definice 12.2. (Spojitost funkce v oblasti D)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a D je oblast, resp. uzavřená oblast v E_n, v níž je definovaná funkce

$$z = f(x_1, \dots, x_n).$$

Nechť $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0] \in D$. Řekneme, že funkce $f(X)$ je v bodě $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0] \in D$ spojitá, jestliže

- *Je v něm definovaná*
- *Ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové kladné číslo δ , že hodnota funkce $f(X)$ v každém bodě $X \in D$ vzdáleném od bodu X^0 o méně než δ se liší od hodnoty funkce f v bodě X^0 o méně než ε, tj.*

$$\varrho(f(X), f(X^0) \leq \varepsilon.$$

Poznámka. Jestliže funkce je spojitá v každém bodě množiny D, budeme říkat, že je spojitá na D.

Zjištění, zda daná funkce je spojitá v uvažovaném bodě by bylo podle této definice velice obtížné. Spojitost řady funkcí odvodíme ze znalosti spojitosti funkcí jedné proměnné podle následujících vět.

Poznámka. Uvažujme funkci jedné proměnné

$$z = 3x_1 + 1. \tag{12.8}$$

Tuto funkci lze přepsat na tvar, obsahující více proměnných, např. na funkci

$$z = 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1. \tag{12.9}$$

Potom (12.9) a tedy i (12.8) lze chápat jako funkci tří proměnných x_1, x_2, x_3. Budeme říkat, že funkce (12.8) vznikla z (12.9) vypuštěním nevýznamných proměnných x_2, x_3, resp. že funkce (12.9) vznikla z (12.8) přidáním nevýznamných proměnných x_2, x_3. Poněvadž funkce (12.8) je spojitá v každém bodě x_1, je v každém bodě $[x_1, x_2, x_3]$ spojitá i funkce (12.9).

Každou funkci f jedné proměnné x_1 lze chápat zároveň jako funkci $F(x) = f(x_1) + 0.x_2 + \ldots + 0.x_n$ $n-$ proměnných. Místo F budeme opět psát f. Je-li funkce f jedné proměnné spojitá v bodě $x_1 = a$, potom i funkce f, chápaná jako funkce n proměnných $x_1, \ldots, x_n$, je spojitá v bodě $[a, x_2^0, \ldots, x_n^0]$, kde $x_2^0, \ldots, x_n^0$ jsou libovolná čísla. Poznamenejme, že elementární funkce jedné proměnné jsou spojité ve svém definičním oboru.

Věta 12.3. Spojitost součtu, součinu a podílu funkcí

Nechť $n \in \mathbb{N}$ *a nechť* D *je oblast (resp. uzavřená oblast) v* $\mathbb{E}_n$. *Nechť funkce* $f(X), g(X)$ *jsou dané funkce spojité v bodě* $X^0 \in D$. *Potom i funkce*

$$f(X) \pm g(X), f(X).g(X)$$

jsou spojité v bodě X^0. *Je-li navíc* $g(X^0) \neq 0$, *je i funkce* $\frac{f(X)}{g(X)}$ *spojitá v bodě* X^0.

Složená funkce a její spojitost

Dříve, než přistoupíme ke studiu této části textu, zopakujte si pojem složené funkce jedné proměnné a větu o spojitosti složené funkce jedné proměnné.

Definice 12.4. (Složená funkce n-proměnných)
Nechť Ω je oblast (resp. uzavřená oblast) v prostoru $\mathbb{E}_m$ a nechť D je oblast (resp. uzavřená oblast) v $\mathbb{E}_n$. Nechť

$$z = f(y_1, \dots, y_m)$$

je funkce definovaná na Ω. Nechť funkce

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$$

jsou definované na množině D. Nechť pro každý bod $X = [x_1, \dots, x_n] \in D$ je $[\varphi_1(X), \dots, \varphi_m(X)] \in \Omega$. Potom funkce

$$F(X) = f(\varphi_1(X), \dots, \varphi_m(X)), \qquad X \in D$$

se nazývá složenou funkcí. *Funkce $z = f(y_1, \dots, y_m)$ se nazývá její* vnější složkou *a funkce $\varphi_1(X), \dots, \varphi_m(X)$ se nazývají jejími* vnitřními složkami.

Uveďme si následující větu o spojitosti složených funkcí.

Věta 12.5. (Věta o spojitosti složené funkce)

Nechť funkce

$$y_i = \varphi_i(X),\ i = 1, 2, \ldots, m, \quad X = [x_1, \ldots, x_n] \in D \subseteq \mathbb{E}_n,$$

jsou spojité v bodě $X^0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0] \in D$. *Označme*

$$Y^0 = [y_1^0, \ldots, y_m^0], \quad \textit{kde} \quad y_i^0 = \varphi_i(X^0), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Nechť na $\Omega \subseteq \mathbb{E}_n$ *je dána funkce*

$$z = f(Y), \quad Y \in \Omega \subseteq \mathbb{E}_m.$$

Nechť pro všechna $X \in D$ *je* $[\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X)] \in \Omega$. *Jestliže funkce* $f(Y)$ *je spojitá v bodě* Y^0 *, je i složená funkce*

$$F(X) = f(\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X))$$

spojitá v bodě X^0.

Příklad 12.2. Funkce $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ je spojitá v bodě $[0, 0]$.

Skutečně. Položme

$$y = \varphi(x_1, x_2), \qquad \text{kde } \varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Funkce φ je definovaná na množině $D = \mathbb{E}_2$ a je spojitá v bodě $[0,0]$. Označme $y^0 = \varphi(0,0)$. Platí $\varphi(0,0) = 0$. Položme $z = f(y)$, kde $f(y) = \sqrt{y}$. Funkce $f(y)$ je na intervalu $\Omega = \langle 0, \infty)$ spojitá. Pro každý bod $[x_1, x_2] \in D$ je $\varphi(x_1, x_2) \in \Omega$. Funkce $f(y)$ je spojitá v bodě y^0. Podle věty 12.5 je tedy funkce $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ spojitá v bodě $[0,0]$.

Příklad 12.3. Funkce

$$z = \frac{\ln x}{x^2 + y^2}$$

je spojitá v každém bodě $[x,y] \in D$, kde

$$D = \{[x,y] : 0 < x \ \wedge \ y \in (-\infty, \infty)\}.$$

Skutečně. Funkci $\ln x$ lze považovat za funkci dvou proměnných x, y. Je definovaná a spojitá v D. Funkce x^2+y^2 je definovaná a spojitá v každém bodě $[x,y] \in \mathbb{E}_2$. V každém bodě $[x,y]$, $[x,y] \neq [0,0]$, je $x^2 + y^2 \neq 0$. Podle věty 12.3 je funkce $z = \frac{\ln x}{x^2+y^2}$, jakožto podíl dvou spojitých funkcí, funkce spojitá v každém bodě $[x,y] \in D$, $[x,y] \neq [0,0]$.

12.1. Parciální derivace

Zavedení parciálních derivací 1. řádu funkce dvou proměnných

Uvažujme funkci

$$z = f(x, y), \quad [x, y] \in \Omega \subseteq \mathbb{E}_2. \tag{12.10}$$

Dosaďme do (12.10) za y pevnou hodnotu $y = y_0$. Předpokládejme, že dostaneme funkci jedné proměnné x, totiž funkci

$$g(x) = f(x, y_0), \quad x \in I \subseteq \mathbb{E}_1, \tag{12.11}$$

kde I je takový interval, že $[x, y_0] \in \Omega$ pro $x \in I$.

Jako příklad uveďme funkci

$$z = x^3 y^2, \quad [x, y] \in \mathbb{E}_2. \tag{12.12}$$

Zvolme $y = 5$ a dosaďme tuto hodnotu do (12.12). Dostáváme

$$z = x^3 \cdot 5^2, \quad \text{to jest } z = 25x^3, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{12.13}$$

to jest funkci jedné proměnné.

Uvažujme funkci $g(x)$ určenou vztahem (12.11). Předpokládejme, že tato funkce má v bodě $x_0 \in I$ derivaci $g'(x_0)$, potom

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}, \quad \text{tj.} \quad g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}. \tag{12.14}$$

Tuto derivaci nazýváme parciální (částečnou) derivací funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$. Jestliže bod x_0 je levým (pravým) koncovým bodem intervalu I, nahradíme limitu v (12.14) limitou zprava (zleva) v bodě $h = 0$. Bod $[x_0, y_0]$ může být libovolný z Ω. Místo x_0, y_0 pišme x, y. Parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ budeme značit jako

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \text{nebo} \quad f'_x(x, y) \quad \text{nebo} \quad f_x(x, y).$$

Poněvadž v (12.10) jsme označili funkci $f(x, y)$ jako z, můžeme též psát

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad z_x.$$

Chceme-li vyznačit, že se jedná o parciální derivaci v bodě $[x_0, y_0]$, můžeme použít např. tyto zápisy

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[x_0, y_0]}, \quad f'_x(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), \quad z'_x(x_0, y_0), \quad z_x(x_0, y_0). \tag{12.15}$$

V označení parciální derivace je použit symbol ∂. *Tento symbol ∂ není písmenem žádné abecedy*. Srovnejte si označení derivace (11.18) funkce jedné proměnné s označením $\frac{\partial f}{\partial x}$ pro parciální derivaci.

Parciální derivaci funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ podle proměnné x lze tedy definovat jako

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \tag{12.16}$$

pokud tato limita existuje.

Analogicky zavádíme parciální derivaci funkce $z = f(x, y)$ podle y v bodě $[x_0, y_0]$. Dosaďme do (12.10) za x pevnou hodnotu $x = x_0$. Předpokládejme, že dostaneme funkci jedné proměnné y, totiž funkci

$$h(y) = f(x_0, y), \quad y \in J, \tag{12.17}$$

kde J je takový interval, že $[x_0, y] \in \Omega$, $y \in J$.

Uvažujme funkci $h(y)$ určenou vztahem (12.17). Může se stát, že tato funkce má v bodě $y_0 \in J$ derivaci, to jest, že existuje

$$\lim_{k \to 0} \frac{h(y_0 + k) - h(y_0)}{k}, \quad \text{tj.} \quad \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}. \tag{12.18}$$

Tuto derivaci nazýváme parciální (částečnou) derivací funkce $f(x, y)$ podle y v bodě $[x_0, y_0]$. Jestliže bod y_0 je levým (pravým) koncovým bodem intervalu J, nahradíme limitu v (12.18) limitou zprava (zleva) v bodě $h = 0$. Bod $[x_0, y_0]$ může být libovolný bod z Ω. Místo x_0, y_0 pišme x, y. Parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ podle y budeme značit jako

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad \text{nebo} \quad f'_y(x, y) \quad \text{nebo} \quad f_y(x, y).$$

Zápisy

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad z_y$$

lze rovněž použít pro parciální derivaci funkce $z = f(x, y)$ podle y. Je tedy

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k},$$

pokud tato limita existuje.

Jestliže $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ $(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})$ existuje pro $[x, y] \in \Omega_1 \subseteq \Omega$, je ke každému bodu $[x, y] \in \Omega_1$ přiřazeno číslo $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ $(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y.})$ Je tedy $\frac{\partial f}{\partial x}$ $(\frac{\partial f}{\partial y})$ funkce proměnných x, y na Ω_1. Symbolem $(\frac{\partial z}{\partial x})_{[x_0,y_0]}$ $((\frac{\partial z}{\partial y})_{[x_0,y_0]})$ budeme značit též $\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}$ $(\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y})$.

Příklad 12.4. Nechť

$$z = 2x^3y^4 - 3xy^5 + 2x - 3y + 1. \tag{12.19}$$

Abychom vypočítali $\frac{\partial z}{\partial x}$, považujeme v (12.19) y za konstantu a derivujeme (12.19) podle x. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 3x^2y^4 - 3y^5 + 2, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y^4 - 3y^5 + 2. \tag{12.20}$$

Abychom vypočítali $\frac{\partial z}{\partial y}$, považujeme v (12.19) x za konstantu a derivujeme (12.19) podle y. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 8x^3y^3 - 15xy^4 - 3. \tag{12.21}$$

Funkce (12.20), (12.21) jsou definované v každém bodě $[x, y] \in \Omega$. Např.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{[2,3]} = [6x^2y^4 - 3y^5 + 2]_{[2,3]} = 6 \cdot 2^2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 3^5 + 2,$$

to jest

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{[2,3]} = 1944 - 729 + 2 = 1217.$$

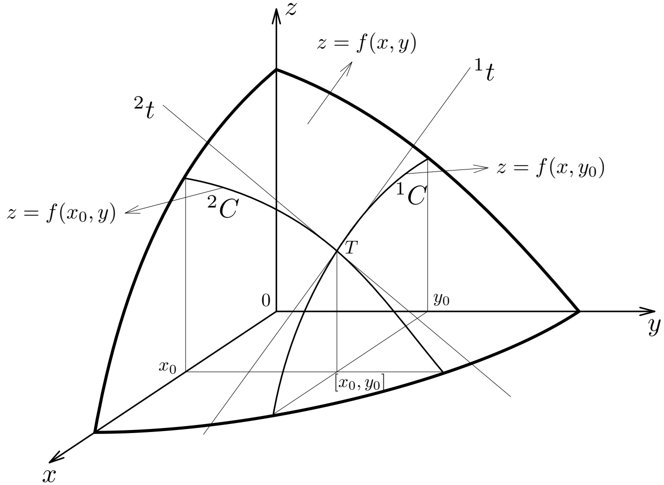
Podobně např.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{[0,2]} = [8x^3y^3 - 15xy^4 - 3]_{[0,2]} = -3.$$

Podívejme se nyní na geometrický význam parciálních derivací

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{[x_0,y_0]}, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{[x_0,y_0]}.$$

Sledujme obr. 12.4.



Obrázek 12.4: Geometrický význam parciálních derivací.

Označili jsme

$$g(x) = f(x, y_0)$$

a položili jsme $(\frac{\partial f}{\partial x})_{[x_0,y_0]} = g'(x_0)$. Rovnicí

$$z = g(x), \quad \text{tj.} \quad z = f(x, y_0)$$

je definována křivka, označená na obrázku 12.4 jako ${}^1C$. Rovnicí

$$z = h(y), \quad \text{tj.} \quad z = f(x_0, y)$$

je definována křivka, označená na obrázku 12.4 jako ${}^2C$. Je tedy

$$g'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[x_0,y_0]} \qquad \left(h'(y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[x_0,y_0]}\right)$$

směrnice tečny ${}^1t$ (${}^2t$) ke křivce ${}^1C$ (${}^2C$) v jejím bodě T.

Zavedení parciálních derivací funkcí n–proměnných

Uvažujme nyní funkci n-proměnných

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad X = [x_1, \dots, x_n] \in \Omega \subseteq \mathbb{E}_n. \tag{12.22}$$

Zvolme $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dosaďme za každou proměnnou x_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $j \neq i$, v (12.22) pevnou hodnotu x_j^0. Dostali jsme tak funkci jedné proměnné x_i, označme ji ${}^i g(x_i)$. Dostáváme

$${}^i g(x_i) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0). \tag{12.23}$$

Jestli tato funkce má v čísle x_i^0 derivaci ${}^i g'(x_i^0)$, nazveme ji parciální derivací funkce (12.22) podle x_i v bodě $X^0 = [x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0] \in \Omega$. Značíme ji jedním ze symbolů

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i}, \ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{X_0}, \ \frac{\partial z(X_0)}{\partial x_i}, \ \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)_{X_0}, \ \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_0), \ z'_{x_i}(X^0), \ z_{x_i}(X^0). \tag{12.24}$$

Bod $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$ může být libovolný bod z Ω. Místo parciálních derivací v bodě X^0 je můžeme uvažovat v bodě $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Parciální derivace

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

nazýváme *parciálními derivacemi prvního řádu.*

Příklad 12.5. Uvažujme funkci

$$z = \frac{x_1 \sin \frac{x_2}{x_3}}{x_2^2 + x_3^2 + 1}. \tag{12.25}$$

Tato funkce je definovaná v každém bodě $X = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{E}_3$, $X \neq [x_1, x_2, 0]$. Určeme $\frac{\partial z}{\partial x_2}$. Derivujme (12.25) podle proměnné x_2. Proměnné x_1, x_3 uvažujeme jako konstanty. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{x_1 \frac{1}{x_3} \cos \frac{x_2}{x_3} \cdot (x_2^2 + x_3^2 + 1) - x_1 \sin \frac{x_2}{x_3} \cdot 2x_2}{(x_2^2 + x_3^2 + 1)^2}.$$

Úpravu přenechávám čtenáři.

Zavedení parciálních derivací vyšších řádů.

Předpokládejme, že funkce

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \quad X = [x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n] \in \Omega \subseteq \mathbb{E}_n \tag{12.26}$$

je definovaná na $\Omega \subseteq \mathbb{E}_n$ a má parciální derivace

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{12.27}$$

v každém bodě $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \Omega_1 \subseteq \Omega$. Můžeme se na ně tedy dívat jako na funkce n-proměnných na Ω_1. Jestliže parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ má parciální derivaci podle x_j v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$, označíme ji $\frac{\partial^2 z(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$. Uveďme si několik dalších užívaných označení

$$\left[\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{X_0}, \ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}, \ z''_{x_i x_j}(X_0), \ z_{x_i x_j}(X_0), \ f''_{x_i x_j}(X_0), \ f_{x_i x_j}(X_0). \tag{12.28}$$

Nazýváme ji druhou parciální derivací funkce f podle x_i, x_j (v tomto pořadí) v bodě X^0. Jestliže $i = j$, píšeme většinou $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}$ místo $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_i}$, resp. $z''_{x_i^2}$ místo $z''_{x_i x_i}$. Jestliže $i \neq j$, nazýváme parciální derivaci $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ smíšenou.

Příklad 12.6. Nechť

$$z = 3x_1^2 x_2^4 x_3^3.$$

Vypočítejte všechny její parciální derivace 2. řádu. Napřed vypočítáme parciální derivace 1. řádu. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 6x_1 x_2^4 x_3^3, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = 12x_1^2 x_2^3 x_3^3, \quad \frac{\partial z}{\partial x_3} = 9x_1^2 x_2^4 x_3^2.$$

Přikročme k výpočtu všech parciálních derivací 2. řádu. Dostáváme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 6x_2^4x_3^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = 24x_1x_2^3x_3^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} = 18x_1x_2^4x_3^2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = 24x_1x_2^3x_3^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 36x_1^2x_2^2x_3^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 36x_1^2x_2^3x_3^2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} = 18x_1x_2^4x_3^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} = 36x_1^2x_2^3x_3^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} = 18x_1^2x_2^4x_3.$$

Poznámka. Všimněme si, že v tomto příkladě je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j.$$

Jinými slovy, v tomto případě nezáleží na pořadí derivivání.

Podobně se definují parciální derivace vyšších řádů. Je-li dána např. funkce

$$z = f(X), \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad X \in \Omega \subseteq \mathbb{E}_n, \tag{12.29}$$

potom např. parciální derivace 3. řádu $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}$ obdržíme takto. Vypočítáme $\frac{\partial f}{\partial x_2}$. to znamená, že $x_1, x_3 \dots, x_n$ považujeme za pevné hodnoty a derivujeme (12.29) podle x_2. Předpokládáme, že tato derivace existuje na jisté podmmnožině $\Omega_1 \subseteq \Omega$. V dalším kroku derivujeme funkci $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ opět podle proměnné x_2, tj. počítejme $\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_2})$. To znamená, že $x_1, x_3 \dots, x_n$ ve funkci $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ považujeme za pevné hodnoty a derivujeme ji podle x_2. Předpokládáme, že tato derivace existuje na jisté podmmnožině $\Omega_2 \subseteq \Omega$. Dostaneme tak na Ω_2 funkci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$. V dalším kroku derivujeme funkci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$, definovanou na Ω_2, podle proměnné x_1. To znamená, že $x_2, x_3 \dots, x_n$ považujeme za pevné hodnoty a derivujeme funkci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$, definovanou na Ω_2, podle x_1. Jestliže tato parciální derivace existuje na $\Omega_3 \subseteq \Omega_2$, máme v každém bodě množiny Ω_3 definovanou parciální derivaci $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}$.

Je otázkou, co lze říci o vzájemném vztahu mazi parciálními derivacemi $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}$. Tyto parciální derivace se liší pořadím proměnných, podle nichž jsme prováděli derivování. Platí tato věta.

Věta 12.6.

Nechť funkce n-proměnných

$$z = f(X), \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad X \in \Omega$$

má v jistém okolí $U_\delta(X^0)$, $X^0 \in \Omega$, spojité všechny parciální derivace řádu k, potom nezáleží na pořadí proměnných, podle nichž derivujeme.

Tedy např. má-li funkce $f(x_1, x_2)$ v okolí bodu $X^0 = [x_1^0, x_2^0]$ spojité všechny parciální derivace 2. řádu, potom $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$.

Poznámka. Věta 12.6 je vyslovena za poněkud silnějších předpokladů, než je nutno.

Příklad 12.7. Nechť

$$z = x^3 y^2 t^4.$$

Potom platí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 t^4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y t^4, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial t} = 24x^2 y t^3.$$

Podobně

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 4x^3 y^2 t^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} = 8x^3 y t^3, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial t \partial y \partial x} = 24x^2 y t^3.$$

Vidíme, že $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial t} = \frac{\partial^3 z}{\partial t \partial y \partial x}$. K tomuto závěru bychom přišli přímo užitím věty 12.6, neboť všechny parciální derivace funkce $z = x^3 y^2 t^4$ jsou spojité ve $\mathbb{E}_3$.

Parciální derivace složené funkce

Před započetím studia této problematiky si zopakujte výpočet derivace složené funkce jedné proměnné.

Věta 12.7. (Derivace složené funkce)

Nechť funkce $\varphi_i(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, $i = 1, 2, \dots, m$, *mají všechny parciální derivace v bodě* $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$. *Nechť funkce* $z = f(Y)$, $Y = [y_1, \dots, y_m]$, *má spojité všechny parciální derivace 1. řádu v bodě* $Y^0 = [y_1^0, \dots, y_m^0]$, *kde* $y_i^0 = \varphi_i(X^0)$, $i = 1, 2, \dots, m$. *Potom složená funkce*

$$z = F(X) = f([\varphi_1(X), \dots, \varphi_m(X)])$$

má v bodě X^0 *všechny parciální derivace 1. řádu a platí*

$$\frac{\partial F(X^0)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(Y^0)}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_j(X_0)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Příklad 12.8. Nechť

$$z = \sqrt{1 + (x + y)^2}, \quad [x, y] \in \mathbb{E}_2. \tag{12.30}$$

Vypočítejte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Řešení. Funkce (12.30) je složená funkce. Funkce $z = f(u)$, kde $f(u) = \sqrt{u}$, je její vnější složkou a $u = \varphi(x, y)$, kde $\varphi(x, y) = 1 + (x + y)^2$, je její vnitřní složkou. Podle věty 12.7 dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + (x + y)^2}}2(x + y).$$

Po úpravě dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x + y}{\sqrt{1 + (x + y)^2}}. \tag{12.31}$$

Parciální derivací funkce $\frac{\partial z}{\partial x}$ podle y dostáváme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1 \cdot \sqrt{1 + (x + y)^2} - (x + y)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}2(x + y)}{\left(\sqrt{1 + (x + y)^2}\right)^2}.$$

Úpravou dostaneme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\left(1 + (x + y)^2\right)\sqrt{1 + (x + y)^2}}.$$

Tečna k prostorové křivce a tečná rovina k ploše.

Začneme se zavedením pojmu tečny ke křivce.

Tečna ke křivce. Nechť

$$x_i = \varphi_i(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{E}_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12.32}$$

jsou spojité funkce na intervalu I. Rovnicemi (12.32) je vyjádřena křivka, označme ji c, v tak zvaném parametrickém vyjádření. Nechť $t_0 \in I$. Položme

$$x_i^0 = \varphi_i(t_0), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Označme

$$T = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0].$$

Nechť M je bod na křivce c odpovídající parametru $t_0 + h \in I$, kde $h \in \mathbb{E}_1$. Tedy

$$M = [\varphi_1(t_0 + h), \varphi_2(t_0 + h), \ldots, \varphi_n(t_0 + h)].$$

Směrovým vektorem přímky určené body T, M je vektor

$$\boldsymbol{s} = (s_1(h), s_2(h), \ldots, s_n(h)),$$

kde

$$s_i(h) = \frac{\varphi_i(t_0 + h) - \varphi_i(t_0)}{h}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Jestliže existují

$$s_i^0 = \lim_{h \to 0} s_i(h), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

to jest, jestliže funkce

$$\varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

mají v bodě t_0 derivace

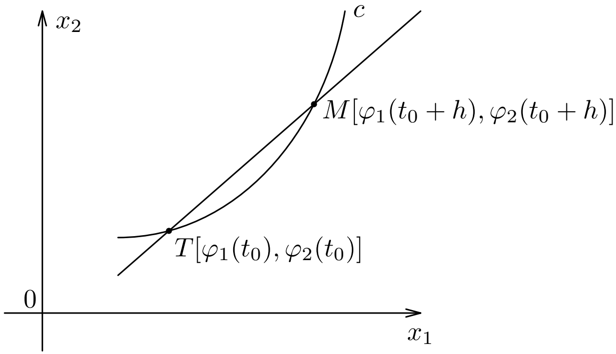
$$s_i^0 = \varphi_i'(t_0), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

potom přímku

$$x_i = x_i^0 + s_i^0 \cdot t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

nazýváme tečnou ke křivce c v bodě T. Na obr. 12.5 je znázorněno zavedení tečny ke křivce pro $n = 2$.

Dospěli jsme k tomuto závěru.



Obrázek 12.5: Zavedení tečny ke křivce.

Nechť

$$x_i = \varphi_i(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{E}_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

jsou spojité funkce na intervalu I. Nechť $t_0 \in I$ a nechť funkce $\varphi_i(t)$ mají v bodě t_0 derivace $\varphi_i'(t_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom přímka

$$x_i = \varphi_i(t_0) + \lambda\varphi_i'(t_0), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda \in (-\infty, \infty)$$

je tečnou ke křivce

$$x_i = \varphi_i(t), \quad t \in I, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

v bodě $T[\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)]$.

Příklad 12.9. Ke křivce

$$x_1 = 2\cos t,\ x_2 = 2\sin t,\ x_3 = 3t, \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{12.33}$$

napište rovnici tečny v jejím bodě T daném parametrem $t = \frac{\pi}{4}$.

Řešení. Dosazením $t = \frac{\pi}{4}$ do (12.33) dostáváme bod

$$T = [\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\frac{\pi}{4}].$$

Poněvadž

$$(2\cos t)' = -2\sin t, \quad (2\sin t)' = 2\cos t, \quad (3t)' = 3,$$

je směrový vektor $\boldsymbol{s}$ tečny v bodě T roven

$$\boldsymbol{s} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3).$$

Tedy tečna k zadané křivce v jějím bodě T má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda, \\ x_2 &= \sqrt{2} + \sqrt{2}\lambda, \\ x_3 &= 3\frac{\pi}{4} + 3\lambda, \end{aligned}$$

kde $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Tečná rovina k ploše. Nechť

$$z = F(X), \quad X = [x_1, \dots, x_n] \in D \subseteq \mathbb{E}_n$$

má v D spojité všechny parciální derivace 1. řádu. Nechť $T_0 = [x_1^0, \dots, x_n^0] \in D$ a $T = [x_1^0, \dots, x_n^0, z^0]$, kde $z^0 = F(x_1^0, \dots, x_n^0)$ je bod na ploše $z = F(X)$. Nechť funkce

$$x_i = \varphi(t), \quad t \in I, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

mají derivace 1. řádu v bodě $t_0 \in I$ a nechť

$$x_i^0 = \varphi_i(t_0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Označme c křivku v $\mathbb{E}_{n+1}$ danou v parametrickém vyjádření rovnicemi

$$x_1 = \varphi_1(t),\ \dots,\ x_n = \varphi_n(t),\ z = F(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \tag{12.34}$$

ležící na ploše $z = F(x_1, \dots, x_n)$. Směrový vektor tečny křivky c v jejím bodě T je

$$\boldsymbol{s} = \left(\varphi_1'(t_0), \dots, \varphi_n'(t_0), \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{T_0} \varphi_1'(t_0) + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_{T_0} \varphi_n'(t_0)\right).$$

Vektor $\boldsymbol{s}$ je kolmý na vektor

$$\boldsymbol{n} = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{T_0}, \dots, \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_{T_0}, -1\right).$$

(Skalární součin těchto vektorů je roven nule.) Označme τ rovinu

$$\tau \equiv z - F(T_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{T_0} (x_1 - x_1^0) + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_{T_0} (x_n - x_n^0).$$

Tečna ke křivce (12.34) v bodě T leží v rovině τ. Tato rovina závisí pouze na rovnici plochy $z = F(X)$ a na bodě T. Nazýváme ji tečnou rovinou plochy $z = F(X)$ v bodě T.

Nechť funkce $z = F(x_1, \dots, x_n)$ má spojité všechny parciální derivace 1. řádu v bodě $T_0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$. Označme $z^0 = F(x_1^0, \dots, x_n^0)$, $T = [x_1^0, \dots, x_n^0, z^0]$ bod na ploše $z = F(x_1, \dots, x_n)$. Potom rovina

$$z - z^0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{T_0} (x_1 - x_1^0) + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_{T_0} (x_n - x_n^0)$$

je tečnou rovinou k ploše $z = F(x_1, \dots, x_n)$ v bodě T.

Příklad 12.10. Napište rovnici tečné roviny k ploše $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $T = [4, 3, ?]$ na dané ploše.

Řešení. Napřed určíme z. Dostáváme

$$z_0 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Určíme parciální derivace 1. řádu funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $T_0 = [4, 3]$. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{[4,3]} = \frac{4}{5}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{[4,3]} = \frac{3}{5}.$$

Tedy hledanou tečnou rovinou je rovina

$$\tau \equiv z - 5 = \frac{4}{5}(x - 4) + \frac{3}{5}(y - 3).$$

12.1.1. Totální diferenciál

Totální diferenciál funkce dvou proměnných

Před započetím studia této podkapitoly si zopakujte diferenciál funkce jedné proměnné.

Definice 12.1. (Totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$)

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$. Nechť funkce $f(x, y)$ má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Potom funkci df v proměnných h, k, danou vztahem

$$df(a, b, h, k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]} h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]} k, \tag{12.35}$$

nazýváme *totálním diferenciálem* funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Pro takto zavedený totální diferenciál platí tato věta.

Věta 12.8. *Nechť funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace 1. řádu. Potom existují $\delta > 0$ a funkce $\eta(h, k)$ tak, že pro $h,\ k,$ pro něž $[a+h, b+k] \in {}^3U_\delta([a, b])$* [1] *platí*

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]} h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]} k + \eta(h, k), \tag{12.36}$$

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\eta(h,k)}{|h|+|k|} = 0. \tag{12.37}$$

Poznámka. V diferenciálu (12.35) se často místo h, k píše dx, dy. Diferenciál df funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$ se pak zapisuje takto

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]} dy.$$

Příklad 12.11. Napište diferenciál funkce $z = x^3y^4$ v bodě $[2, 3]$.

Řešení. Funkce $z = x^3y^4$ má spojité parciální derivace v každém bodě $[x, y]$, tedy i v bodě $[2, 3]$. Podle (12.35) dostáváme

$$dz = (3x^2y^4)_{[2,3]}dx + (4x^3y^3)_{[2,3]}dy,$$

[1] ${}^3U_\delta([a, b])$ je okolí bodu $[a, b]$ určené metrikou ϱ_3.

tj.

$$dz = 972\,dx + 864\,dy.$$

Analogicky lze zavést diferenciál funkce n-proměnných.

Definice 12.2.

Nechť funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$, má v oblasti Ω spojité parciální derivace 1. řádu. Potom

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_X dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_X dx_n \tag{12.38}$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $z = f(X)$ v bodě $X = [x_1, \dots, x_n] \in \Omega$. Je tedy df v bodě X funkcí proměnných $dx_1, \dots, dx_n$.

Věta 12.9. *Nechť funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$ má v bodě $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ spojité parciální derivace 1. řádu. Potom existuje $\delta > 0$ a funkce $\eta(dx_1, \dots, dx_n)$ tak, že pro $dx_1, \dots, dx_n$, pro něž $[x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n] \in U_\delta(X^0)$ platí*

$$f(x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{X^0} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{X^0} + \eta(dx_1, \dots, dx_n),$$

při čemž limita $\frac{\eta(dx_1,\dots,dx_n)}{|dx_1|+\dots+|dx_n|}$ *v bodě* $[0,\dots,0]$ *má hodnotu* 0*.*

Důkaz: Důkaz je analogický jako důkaz speciálního případu $n = 2$ uvedeném ve větě 12.8.

Z této věty vyplývá, že

$$f(x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{X^0} dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{X^0} dx_n.$$

Totální diferenciál vyjadřuje přírustek na tečné rovině, přejdeme-li z bodu $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ do bodu $X = [x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n]$.

12.2. Extrémy funkcí více proměnných

Lokální extrémy

Lokální extrémy funkcí n-proměnných zavádíme analogicky jeko u funkcí jedné proměnné.

Definice 12.3.
Nechť $f(X)$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, je funkce n-proměnných definovaná na oblasti Ω. Nechť $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0] \in \Omega$. Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že $U_\delta(X^0) \subset \Omega$ a že pro všechna $X \in U_\delta(X^0)$ platí

$$f(X) \leq f(X^0) \qquad (f(X) \geq f(X^0)).$$

Potom říkáme, že funkce f má v bodě X^0 *lokální maximum* (*lokální minimum*). Lokální maxima a lokální minima nazýváme společným názvem *lokální extrémy*.

Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že $U_\delta(X^0) \subset \Omega$ a že pro všechna $X \in U_\delta(X^0)$, $X \neq X^0$ platí

$$f(X) < f(X^0) \qquad (f(X) > f(X^0)).$$

Potom říkáme, že funkce f má v bodě X^0 *vlastní lokální maximum* (*vlastní lokální minimum*). Vlastní lokální maxima a vlastní lokální minima nazýváme společným názvem *vlastní lokální extrémy*.

Z této definice je patrno, že jestliže funkce $f(X)$ má v bodě X^0 lokální maximum (minimum), potom mají i všechny funkce

$$F_i(t) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

v bodě x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, lokální maximum (minimum).

Má-li tedy funkce $F_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, v bodě x_i^0 derivaci, je rovna 0. Podle definice parciální derivace funkce f je však derivace funkce $F_i(t)$ v bodě x_i^0 rovna parciální derivaci funkce $f(X)$ podle x_i v bodě X^0, takže

$$F_i'(x_i^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X^0) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Funkce $f(X)$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$, definovaná na oblasti Ω, může nabývat lokální extrém pouze v těch bodech, v nichž má všechny parciální derivace 1. řádu rovny 0, nebo v těch bodech, v nichž nemá některou parciální derivaci. Bod $X^0 \in \Omega$, v němž má funkce f všechny parciální derivace 1. řádu rovny nule, se nazývá stacionárním bodem *funkce f.*

Příklad 12.12. Určete stacionární body funkce

$$z = x^3 + y^3 - 3xy. \tag{12.39}$$

Řešení. Vypočítejme parciální derivace 1. řádu. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Stacionární body jsou ty body $[x, y]$, pro něž platí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Z těchto podmínek dostáváme systém rovnic

$$3x^2 - 3y = 0, \tag{12.40}$$
$$3y^2 - 3x = 0. \tag{12.41}$$

Je to systém nelineárních rovnic o dvou neznámých. Z (12.48) vypočítáme y. Dostáváme

$$y = x^2. \tag{12.42}$$

Dosazením (12.50) do (12.49) dostáváme

$$x^4 - x = 0.$$

Tuto rovnici lze přepsat na tvar

$$x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0. \tag{12.43}$$

Z (12.51) dostáváme $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Další dva kořeny dostáváme řešením rovnice $x^2 + x + 1 = 0$. Tyto kořeny jsou komplexně sdružené. Poněvadž uvažujeme jenom reálné body, nebudeme je uvažovat. Dosadíme-li $x = 0$ do (12.50), dostáváme $y = 0$.

Dosadíme-li $x = 1$ do (12.50), dostváme $y = 1$. Má tedy funkce (12.47) dva stacionární body

$$A[0, 0], \qquad B[1, 1].$$

Funkce $y = x^3 + y^3 - 3xy$ má parciální derivace ve všech bodech. Na základě dosavadních úvah vyplývá, že vyšetřovaná funkce může mít lokální extrémy pouze v bodech A, B.

Uvažujme nyní opět funkci $z = f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$ n-proměnných, definovanou na oblasti Ω. Budeme vyšetřovat, zda funkce $f(X)$ má ve stacionárních bodech extrém.

Začneme s případem $n = 2$, tedy s funkcemi $z = f(x, y)$ dvou proměnných na oblasti Ω. Nechť bod $[a, b] \in \Omega$ je stacionárním bodem funkce $f(x, y)$. Podle Taylorovy věty pro $k = 1$ dostáváme

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]} h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]} k\right] + R_2, \tag{12.44}$$

kde

$$R_2 = \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{[\xi,\eta]} h^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{[\xi,\eta]} hk + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{[\xi,\eta]} k^2\right]. \tag{12.45}$$

Bod $[\xi, \eta]$ je na úsečce o koncových bodech $[a, b]$, $[a+h, b+k]$.

Poněvadž $[a, b]$ je stacionárním bodem funkce f, je $(\frac{\partial f}{\partial x})_{[a,b]} = 0$, $(\frac{\partial f}{\partial y})_{[a,b]} = 0$. Proto (12.44) lze zapsat jako

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = R_2. \tag{12.46}$$

Je-li tedy $R_2 > 0$ ($R_2 < 0$) pro všechna dostatečně malá h, k,má funkce f v bodě $[a, b]$ lokální minimum (maximum).

Rozborem R_2 se dokáže následující věta.

Věta 12.10.
Nechť funkce $f(x,y)$ má v jistém okolí $U_\delta([a,b])$ bodu $[a,b]$ spojité všechny parciální derivace 2. řádu. Nechť

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]} = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]} = 0.$$

Pro body $[x,y] \in U_\delta([a,b])$ položme

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Je-li $\Delta(a,b) > 0$, má funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ lokální extrém. Je-li $\Delta(a,b) < 0$, nemá funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ lokální extrém. V případě, že $\Delta(a,b) > 0$ a $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_{[a,b]} > 0$ (< 0) má funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ vlastní lokální minimum (maximum).

Příklad 12.13. Zjistili jsme, že funkce $z = x^3 + y^3 - 3xy$ má dva stacionární body $A[0,0]$, $B[1,1]$. Rozhodněte, zda tato funkce má v těchto bodech lokální extrémy.

Řešení. Funkce $z = x^3 + y^3 - 3xy$ má spojité parciální derivace 2. řádu ve všech bodech. Výpočtem dostáváme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Tedy

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$$

Poněvadž $\Delta(0,0) = -9 < 0$, nemá vyšetřovaná funkce ve stacionárlním bodě $[0,0]$ lokální extrém. Poněvadž $\Delta(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0$, má vyšetřovaná funkce ve stacionárním bodě $[1,1]$ lokální extrém. Poněvadž

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{[1,1]} = (6x)_{[1,1]} = 6 > 0,$$

má vyšetřovaná funkce v bodě $[1,1]$ lokální minimum.

Pro funkce n-proměnných platí analogická věta.

Věta 12.11.

Nechť funkce $f(X)$, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *je definovaná na oblasti* Ω. *Nechť* $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ *je jejím stacionárním bodem, tj. nechť*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{X^0} = 0, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{X^0} = 0.$$

Nechť v jistém okolí $U_\delta(X^0)$ *má funkce* $f(X)$ *spojité všechny parciální derivace 2. řádu. Označme*

$$D_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Je-li

$$D_1(X^0) > 0,\ D_2(X^0) > 0, \ldots,\ D_n(X^0) > 0$$

$$(D_1(X^0) < 0,\ D_2(X^0) > 0, \ldots,\ (-1)^n D_n(X^0) > 0),$$

má funkce f *v bodě* X^0 *lokální minimum (maximum).*

Příklad 12.14. Určete lokální extrémy funkce

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz.$$

Řešení. Položme parciální derivace

$$\begin{aligned} u'_x &= 2x + y - z, \\ u'_y &= 2y + x, \\ u'_z &= 2z - x \end{aligned}$$

rovny nule. Řešením vzniklého systému rovnic určíme jediný stacionární bod $[0, 0, 0]$. Pomocí matice

$$\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

určíme

$$D_1 = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Protože $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, má vyšetřovaná funkce v bodě $[0, 0, 0]$ ostré lokální minimum.

Globální etxrémy

Nechť funkce $f(X)$ je definovaná na uzavřené oblasti Ω (tj. na sjednocení oblasti s její hranicí).

Řekneme, že funkce $f(X)$ n–proměnných má globální (absolutní) maximum v bodě $X^0 \in \Omega$, jestliže pro všechny body $X \in \Omega$ platí $f(X) \leq f(X^0)$. Podobně řekneme, že funkce $f(X)$ n–proměnných má globální (absolutní) minimum v bodě $X^0 \in \Omega$, jestliže pro všechny $X \in \Omega$ platí $f(X) \geq f(X^0)$.

Globální maxima a globální minima se nazývají společným názvem *globální extrémy*.

Platí tato věta.

Věta 12.12. *Nechť funkce n–proměných $f(X)$ je spojitá na uzavřené oblasti Ω. Potom má na Ω globální maximum a globální minimum. Je-li X^0 bod, v němž funkce f nabývá na Ω globální maximum (minimum), potom X^0 je buď hraničním bodem Ω, anebo funkce f má v něm lokální maximum (minimum).*

Jako příklad nalezení globálního minima funkce $f(X)$ n–proměnných uveďme následující příklad.

Lokální extrémy funkcí n-proměnných zavádíme analogicky jako u funkcí jedné proměnné.

Definice 12.13.
Nechť $f(X)$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, *je funkce* n*-proměnných definovaná na oblasti* Ω. *Nechť* $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0] \in \Omega$. *Nechť existuje* $\delta > 0$ *tak, že* $U_\delta(X^0) \subset \Omega$ *a že pro všechna* $X \in U_\delta(X^0)$ *platí*

$$f(X) \le f(X^0) \qquad (f(X) \ge f(X^0)).$$

Potom říkáme, že funkce f *má v bodě* X^0 **lokální maximum** *(***lokální minimum***). Lokální maxima a lokální minima nazýváme společným názvem* **lokální extrémy**.

Nechť existuje $\delta > 0$ *tak, že* $U_\delta(X^0) \subset \Omega$ *a že pro všechna* $X \in U_\delta(X^0)$, $X \neq X^0$ *platí*

$$f(X) < f(X^0) \qquad (f(X) > f(X^0)).$$

Potom říkáme, že funkce f má v bodě X^0 **ostré lokální maximum** (**ostré lokální minimum**). Ostrá lokální maxima a ostrá lokální minima nazýváme společným názvem **ostré lokální extrémy**.

Uveďme si jak lze určit body, v nichž funkce $n-$proměnných má lokální extrémy. Z dřívějšího studia víme, že funkce jedné proměnné $y = f(x)$ může mít lokální extrém pouze v těch bodech, v nichž nemá derivaci, nebo má derivaci rovnu 0. Podobně je tomu u funkcí více proměnných.

Funkce $f(X)$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$, definovaná na oblasti Ω, může nabývat lokální extrém pouze v těch bodech, v nichž má všechny parciální derivace 1. řádu rovny 0, nebo v těch bodech, v nichž nemá některou z těchto parciálních derivací. Bod $X^0 \in \Omega$, v němž má funkce f všechny parciální derivace 1. řádu rovny nule, se nazývá **stacionárním bodem funkce** f.

Příklad 12.15. Určete stacionární body funkce

$$z = x^3 + y^3 - 3xy. \tag{12.47}$$

Řešení. Vypočítejme parciální derivace 1. řádu. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Stacionární body jsou ty body $[x, y]$, pro něž platí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Z těchto podmínek dostáváme systém rovnic

$$3x^2 - 3y = 0, \tag{12.48}$$
$$3y^2 - 3x = 0. \tag{12.49}$$

Je to systém nelineárních rovnic o dvou neznámých. Z (12.48) vypočítáme y. Dostáváme

$$y = x^2. \tag{12.50}$$

Dosazením (12.50) do (12.49) dostáváme

$$x^4 - x = 0.$$

Tuto rovnici lze přepsat na tvar

$$x(x-1)(x^2+x+1) = 0. \tag{12.51}$$

Z (12.51) dostáváme $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Další dva kořeny dostáváme řešením rovnice $x^2 + x + 1 = 0$. Tyto kořeny jsou komplexně sdružené. Poněvadž uvažujeme jenom reálné body, nebudeme je uvažovat. Dosadíme-li $x = 0$ do (12.50), dostáváme $y = 0$. Dosadíme-li $x = 1$ do (12.50), dostváme $y = 1$. Má tedy funkce (12.47) dva stacionární body

$$A[0,0], \quad B[1,1].$$

Funkce $y = x^3+y^3-3xy$ má parciální derivace ve všech bodech. Na základě dosavadních úvah vyplývá, že vyšetřovaná funkce může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech A, B.

Uveďme si nyní větu, kterou můžeme v řadě případů použít na zjištění, zda funkce nabývá ve stacionárním bodě lokální extrém, nebo ne.

Věta 12.14.
Nechť funkce $f(x,y)$ má v jistém okolí $U_\delta([a,b])$ bodu $[a,b]$ spojité všechny parciální derivace 2. řádu. Nechť

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]} = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]} = 0.$$

Pro body $[x,y] \in U_\delta([a,b])$ položme

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Je-li $\Delta(a,b) > 0$, má funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ lokální extrém. Je-li $\Delta(a,b) < 0$, nemá funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ lokální extrém. V případě, že $\Delta(a,b) > 0$ a $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_{[a,b]} > 0$ (< 0), má funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ vlastní lokální minimum (maximum).

Příklad 12.16. Zjistili jsme, že funkce $z = x^3 + y^3 - 3xy$ má dva stacionární body $A[0,0]$, $B[1,1]$. Rozhodněte, zda tato funkce má v těchto bodech lokální extrémy.

Řešení. Funkce $z = x^3 + y^3 - 3xy$ má spojité parciální derivace 2. řádu ve všech bodech. Výpočtem dostáváme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Tedy

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$$

Poněvadž $\Delta(0, 0) = -9 < 0$, nemá vyšetřovaná funkce ve stacionárlním bodě $[0, 0]$ lokální extrém. Poněvadž $\Delta(1, 1) = 36 - 9 = 27 > 0$, má vyšetřovaná funkce ve stacionárním bodě $[1, 1]$ lokální extrém. Poněvadž navíc

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{[1,1]} = (6x)_{[1,1]} = 6 > 0,$$

má vyšetřovaná funkce v bodě $[1, 1]$ lokální minimum.

Příklad 12.17. Nalezněte lokální extrémy funkce $z = f(x; y)$, kde $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$.

Řešení. Daná funkce je definovaná na $\mathbb{E}_2$. Má obě parciální derivace f_x, f_y na svém definičním oboru. Může mít tedy lokální extrémy pouze v těch bodech , v nichž jsou tyto parciální derivace rovny 0, tj. ve stacionárních bodech, t.j. v bodech, které vyhovují rovnicím

$$(\frac{\partial f}{\partial x} =)2x + y - 6 \;=\; 0 \tag{12.52}$$
$$(\frac{\partial f}{\partial y} =)2y + x - 9 \;=\; 0. \tag{12.53}$$

Jejich řešením dostáváme jeden stacionární bod $A = [1, 4]$. Vypočítejme druhé parciální derivace vyšetřované funkce $f(x, y)$. Dostáváme

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 1.$$

Tyto parciální derivace jsou spojité v $\mathbb{E}_2$. Je tedy

$$\Delta(x, y) = 2.2 - 1, \quad \text{tj.} \quad \Delta(x, y) = 3.$$

Odtud $\Delta(1, 4) = 3 > 0$. Tedy vyšetřovaná funkce má v bodě $A = [1, 4]$ lokální extrém. Poněvadž $f_{xx}(1, 4) = 2 > 0$, jde o lokální minimum.

Příklad 12.18. Zjistěte lokálni extrémy funkce

$$z = x^2 - y^2$$

Daná funkce má parciální derivace prvního řádu v každém bodě z $\mathbb{E}_2$. Může mít tedy lokální extrém pouze v těch bodech z $\mathbb{E}_2$, v nichž obě parciální derivace prvního řádu uvažované funkce jsou rovny 0. Tyto body musí tedy vyhovovat rovnicím

$$2x = 0, \quad -2y = 0.$$

Odtud dostáváme, že uvažovaná funkce má jediný stacionární bod $A[0,0]$. Abychom rozhodli, zda v tomto stacionárním bodě má daná funkce lokální extrém, vypočítejme $\Delta(x,y)$. Dostáváme

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 0, \quad \Delta(x,y) = -4.$$

Tyto parcíální derivace jsou spojité. Ve stacionárním bodě je $\Delta(0,0) = -4$. Poněvadž $\Delta(0,0) < 0$, nemá funkce $z = x^2 - y^2$ lokální extrém.

Příklad 12.19. Určete lokální extrémy funkce

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tato funkce má tyto parciální derivace prvního řádu

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Vyšetřovaná funkce může mít lokální extrémy pouze v bodech, v nichž má parciální derivace prvního řádu rovny 0, nebo v bodech v nichž neexistuje alespoň jedna z nich. Funkce nemá parciální derivace prvního řádu v bodě $[0,0]$. Obě parciální derivace prvního řádu jsou v definičním oboru různé od 0. V bodě $[0,0]$ je $z(0,0) = 0$ a v každém bodě $[x,y] \neq [0,0]$ je $z(x,y) > 0$. Má tedy daná funkce v bodě $[0,0]$ lokální minimum.

Příklad. Nalezněte lokální extrémy funkce

$$z = x^3 + y^2 - 12xy.$$

Řešení. Funkce dvou proměnných může mít lokální extrém pouze v bodech, v nichž má obě parciální derivce prvního řádu rovny nule, nebo v bodech, v nichž nemá alespoň jednu parcální derivaci prvního řádu.Daná funkce má obě parciální derivace prvního řádu ve všech bodech. Budeme proto hledat pouze body – stacionární body, v nichž jsou její obě parciální derivace prvního řádu rovny 0. Vypočítejme tedy parciální derivace prvního řádu. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 12y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 12x.$$

Tyto parciální derivace položíme rovny 0. Dostaneme systém rovnic

$$3x^2 - 12y = 0, \quad 2y - 12x = 0.$$

Z druhé z těchto rovnic vypočítáme y. Dostáváme $y = 6x$. Dosazením do první z těchto rovnic obdržíme

$$3x^2 - 72x = 0, \quad \text{tj.} \quad x^2 - 24x = 0 \quad \text{tj.} \quad x(x - 24) = 0$$

Je tedy buď

1. $x_1 = 0$, a tedy $y_1 = 0$, nebo
2. $x_2 = 24$ a tedy $y_2 = 144$.

Dostali jsme tedy dva stacionární body: $A = [0, 0]$, $B = [24, 144]$.

Rozhodněmě, zda daná funkce má v některém z těchto stacionárních bodů lokální extrém. Vypočítejme tedy

$$\triangle(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Výpočtem dostáváme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12$$

Je tedy

$$\triangle(x,y) = 6.x.2 - (-12)^2.$$

1. V bodě $[0,0]$ je $\triangle(0,0) < 0$, takže v tomto bodě funkce nemá lokální exterém
2. V bodě $[24,144]$ je $\triangle(24,144) > 0$, Vyšetřovaná funkce má tedy v bodě [24, 144] lokální extrém.

O jaký extrém se jedná, rozhoduje znaménko hodnoty druhé derivace $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ v bodě $[24,144]$. Poněvadž $(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})_{[24,144]} > 0$, má vyšetřovaná funkce v bodě $[24,144]$ lokální minimum.

Kapitola 13

V.Mikulik: Vícerozměrné integrály

13.1. Určitý integrál funkce jedné proměnné - zopakování pojmů

Dříve než přikročíme k zavedení vícerozměrných integrálů, zopakujme si pojem určitého integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Dělení intervalu, norma dělení

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ jsou takové zvolené body z intervalu $\langle a, b\rangle$, že

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Těmito body je určeno n intervalů

$$\langle x_1, x_2\rangle, \langle x_2, x_3\rangle, \dots, \langle x_i, x_{i+1}\rangle, \dots, \langle x_n, x_{n+1}\rangle.$$

Budeme říkat, že tyto intervaly tvoří *dělení intervalu* $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů. Toto dělení označíme D_n. Body x_i nazveme *dělícími body*. Číslo

$$\|D_n\| = \max_i |x_{i+1} - x_i|$$

nazveme *normou dělení* D_n.

Příklad 13.1. Ukažme si příklad takovéhoto dělení. Uvažujme interval $\langle 1, 2\rangle$. Zvolme $n = 4$ a dělicí body $x_1 = 1$; $x_2 = 1{,}2$; $x_3 = 1{,}3$; $x_4 = 1{,}35$; $x_5 = 2$. Těmito body je určeno dělení D_4 intervalu $\langle 1, 2\rangle$ na 4 částečné intervaly

$$D_4 : \langle 1; 1{,}2\rangle,\ \langle 1{,}2; 1{,}3\rangle,\ \langle 1{,}3; 1{,}35\rangle,\ \langle 1{,}35; 2\rangle.$$

Normou tohoto dělení je $\|D_4\| = \max{(0,2; 0,1; 0,05; 0,65)} = 0{,}65$.

Vytvářející součet určitého integrálu.

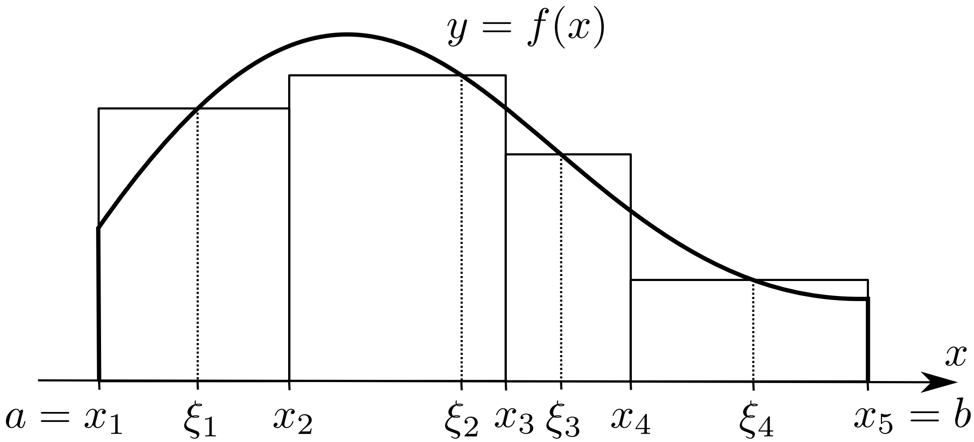
Nechť $f(x)$ je omezená funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť n je přirozené číslo. Zvolme dělení D_n intervalu $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů s dělicími body

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n < x_{n+1} = b.$$

V každém částečném intervalu $< x_i, x_{i+1} >$ tohoto dělení D_n zvolme bod ${}^n\xi_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.. Označme dále ${}^n\boldsymbol{\xi} = \{{}^n\xi_1, {}^n\xi_2, \dots, {}^n\xi_n\}$ uspořádanou skupinu těchto n čísel . Potom číslo

$$\sigma(f, D_n, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} f({}^n\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{13.1}$$

nazýváme *Riemanovým integrálním součtem (vytvářejícím součtem)* funkce f příslušným k dělení D_n a skupině čísel ${}^n\boldsymbol{\xi}$. Na obr. 13.1 je znázorněn Riemanův integrální součet (vytvářející součet) pro zvolené dělení D_4 a zvolená čísla ${}^4\boldsymbol{\xi}$. Na obr. 13.1 je funkce $f(x) > 0$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Číslo $\sigma(f, D_4, {}^4\boldsymbol{\xi})$ aproximuje *intuitivně chápaný plošný obsah* rovinného obrazce vytvořeného osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a křivkou $y = f(x)$.



Obrázek 13.1: Riemanův integrální součet.

Zvolme nyní posloupnost dělení

$$D_1, D_2, \dots, D_n, \dots \tag{13.2}$$

Normy těchto dělení tvoří posloupnost

$$\|D_1\|, \|D_2\|, \dots, |D_n| \ \dots \tag{13.3}$$

Posloupnost (13.2) se nazývá nulovou posloupností dělení, jestliže posloupnost příslušných norem (13.3) má limitu rovnu 0. Ke každému dělení D_n přiřaďme nahoře uvedeným způsobem číslo

$$\sigma(f, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} f({}^n\xi_i)(x_{i+1} - x_i). \tag{13.4}$$

Obdržíme tak posloupnost

$$\sigma(f, D_1, {}^1\boldsymbol{\xi})_1,\ \sigma(f, D_2, {}^2\boldsymbol{\xi}_2), \ldots, \sigma(f, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi})_n, \ldots \tag{13.5}$$

Jestliže posloupnost vytvářejících součtů (13.5) má pro všechny nulové posloupnosti dělení limitu a tato limita je rovna vždy témuž číslu S, nezávislou na volbě bodů ${}^n\boldsymbol{\xi}$, potom toto číslo S nazýváme určitým Riemanovým integrálem z funkce $f(x)$ od a do b. Píšeme pak

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Platí nyní tato věta.

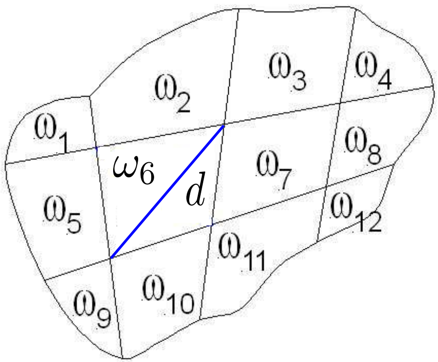
Věta 13.1.
Nechť funkce $y = f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $< a, b >$. Potom určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$. Za tohoto předpokladu existuje též primitivní funk na $< a, b >$ (t.j. funkce $F(x)$, pro niž platí $F' = f(x)$ pro $x \in (a, b)$, $F'^{+}(a)$ $F'^{-}(b) = f(b)$.) a platí $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

13.2. Zavedení dvojného integrálu

Dříve, než se seznámíte se zavedením pojmu dvojný integrál, prostudujte si pečlivě zavedení Riemanova určitého integrálu funkce jedné proměnné. Zavedení dvojného integrálu je analogické jako zavedení určitého integrálu funkce jedné proměnné. Nechť Ω je uzavřená oblast v rovině (Oxy). Nechť n je přirozené číslo. Řekneme, že uzavřené oblasti

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

tvoří dělení množiny Ω, jestliže ω_i, ω_j kde $i, j = 1, 2, \ldots, n, i \neq j$, mají společné nejvýše hraniční body a jestli $\bigcup_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega$. Nechť D_n je rozdělení oblasti Ω na n oblastí $\omega_i, i = 1, 2, \ldots, n$. (viz.obr.13.2).



Obrázek 13.2: Dělení oblasti Ω

Zaveďme si pojem „norma dělení D_n" takto: Označme d_i nejdelší úsečku spojující dva hraniční body oblasti ω_i.

Normu dělení D_n budeme značit $\|D_n\|$ a definovat vztahem

$$\|D_n\| = \max_i |d_i|.$$

Dále označme $|\omega_i|$ plošný obsah oblasti ω_i. Na obr.13.2 je vyznačeno rozdělení uzavřené oblasti na „12" uzavřených oblastí $\omega_1, \omega_2, \ldots .\omega_{12}$ a dále je vyznačena úsečka d, jejíž délka je normou nakresleného dělení D_{12}.

Nechť na uzavřené oblasti Ω je definovaná spojitá funkce $z = f(x, y)$. Zvolme dále body $P_i \in \omega_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Označme ${}^n\boldsymbol{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$. Utvořme součet

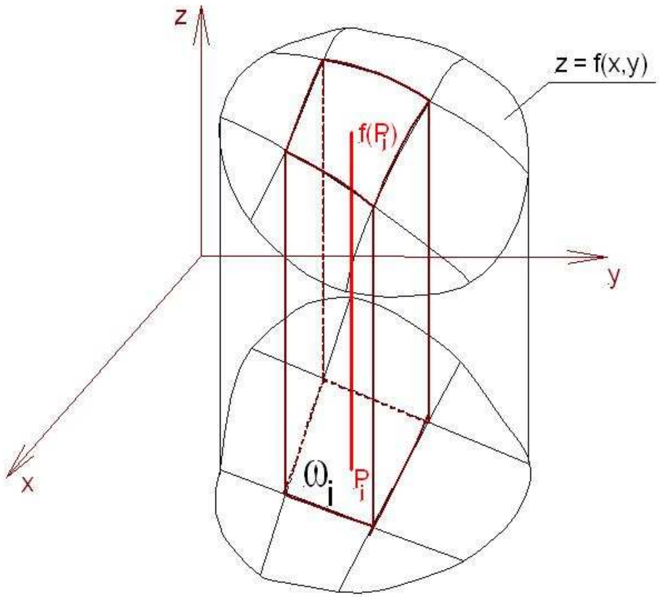
$$\sigma(f, D_n, {}^n\boldsymbol{P}) = \Sigma_{i=1}^n f(P_i)|\omega_i|. \tag{13.6}$$

Budeme jej nazývat vytvářejícím součtem.

Na obr.13.3 je grafické znázornění funkce $f(x, y)$ a jeden člen výrazu (13.6), tj.

$$f(P_i)|\omega_i|.$$

V případě, že $f(P_i) > 0$, potom $f(P_i)|\omega_i|$ je objem tělesa, jehož podstavou je ω_i, povrchovými přímkami jsou přímky rovnoběžné s osou z jdoucí hraničními body oblasti ω_i a je omezeno rovinou $z = f(P_i)$. Jestliže tedy $f(x, y) \geq 0$ pro $(x, y) \in \Omega$, potom (13.6) aproximuje objem tělesa, jehož podstavou je Ω, povrchovými přímkami jsou přímky rovnoběžné s osou z jdoucí hraničními body oblasti Ω a je omezeno plochou $z = f(x, y)$, kde $(x, y) \in \Omega$.



Obrázek 13.3: Vytvářející součet dvojného integrálu

Utvořme nyní posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ Řekneme, že tato posloupnost dělení je nulová, jestliže posloupnost

$$\|D_1\|, \|D_2\|, \ldots, \|D_n\|, \ldots$$

příslušných norem má nulovou limitu.

Jestliže posloupnost nahoře zavedených vytvářejících součtů (13.6),tj. posloupnost

$$\{\Sigma_{i=1}^{n} f(P_i)|\omega_i|\}_{n=1}^{\infty} \tag{13.7}$$

má pro všechny nulové posloupnosti dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu a tato limita je rovna vždy témuž číslu S, nezávislou na volbě bodů ${}^{n}\boldsymbol{P}$,potom toto číslo S nazýváme dvojným integrálem z funkce $f(x,y)$ přes obor Ω. Zapisujeme jej takto

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy. \tag{13.8}$$

Jestliže funkce $f(x,y)$ je spojitá na uzavřené oblasti Ω, potom existuje integrál $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$.

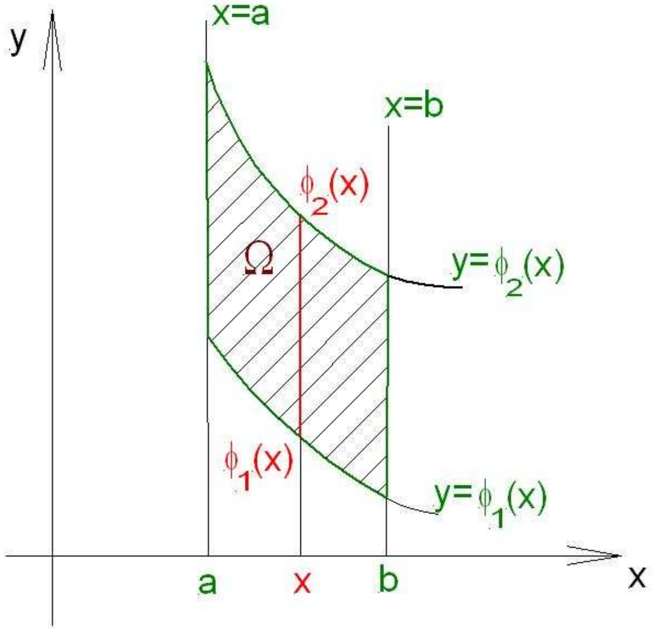
Geometrický význam $S = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$. je tedy rozdíl mezi objemem části tělesa nad rovinou (Oxy) a objemem tělesa pod rovinou (Oxy).

Dvojný integral má uplatnění v řadě fyzikálních i jiných aplikací.

Podívejme se nyní na způsob vyčíslení dvojného integrálu přes speciální oblasti Ω.

Vyčíslení dvojného integrálu.

Normální oblast vzhledem k ose x*(viz. obrázek 13.4) Nechť oblast* Ω *v rovině* (Oxy) *je omezena přímkami* $x = a, x = b$, *kde* $a < b$ *a křivkami* $y = \phi_1(x), y = \phi_2(x)$, *kde* $\phi_1(x), \phi_2(x)$ *jsou funkce spojité na intervalu* $< a, b >$ *pro něž platí* $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$, *pro* $x \in < a, b >$. *Potom oblast* Ω *nazveme normální vzhledem k ose* x.



Obrázek 13.4: Normální oblast

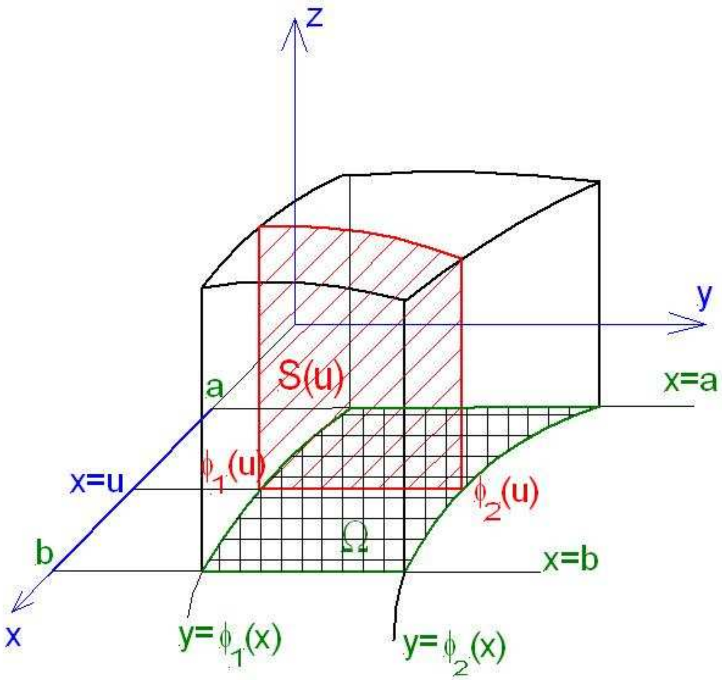
Podobně s normální oblast vzhledem k ose y.

Nastíníme si nyní odvození výpočtu dvojného integrálu přes normální oblast. Nechť oblast Ω v rovině (Oxy) je normální vzhledem k ose x. Nechť je omezena přímkami $x = a, x = b$, kde $a < b$ a křivkami $y = \phi_1(x), y = \phi_2(x)$, kde $\phi_1(x), \phi_2(x)$ jsou funkce spojité na intervalu $< a, b >$ a nechť $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$, pro $x \in < a, b >$. Nechť $z = f(x, y)$ je spojitá funkce na Ω. Ukažme si výpočet $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy$.

V dalším bude Φ značit těleso omezené rovinou $z = 0$, plochou $z = f(x, y)$, jehož povrchové přímky jsou rovnoběžné s osou z a procházejí hraničními body oboru Ω.

Zvolme $u \in < a, b >$. Rovina $x = u$ protíná útvar Φ v roviném útvaru, jehož plošný obsah, označme jej $S(u)$, je roven (viz obr.13.5)

$$S(u) = \int_{\phi_1(u)}^{\phi_2(u)} f(u, y)dy$$



Obrázek 13.5: Vysvětlení výpočtu dvojného integrálu přes normální oblast

Rozdělme nyní interval $< a, b >$ na n částečných intervalů $< x_i, x_{i+1} >, i = 1, 2, \ldots n$. Zvolme dále $u_i \in < x_i, x_{i+1} >, i = 1, 2, \ldots, n$. Utvořme součet

$$\Gamma_n = \Sigma_{i=1}^{n} S(u_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Lehce lze nahlédnout, že $S(u_i)(x_{i+1} - x_i)$ je přibližně objem části tělesa Φ, mezi rovinami $x = x_i,\ x = x_{i+1}$.

Číslo Γ_n je vytvářejícím součtem integrálu

$$\int_a^b S(x)dx. \tag{13.9}$$

Dosadíme-li do (13.9) $S(u) = \int_{\phi_1(u)}^{\phi_2(u)} f(u,y)dy$, dostáváme

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \{\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\}dx.$$

Integrál $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$ se vyčísluje tak, že integrace se provádí podle proměnné y, na x se pohlíží jako na konstantu. Výsledkem této integrace je funkce proměnné x. Tato funkce se pak integruje podle x od a do b. Výsledky shrneme do této věty.

Věta 13.2.

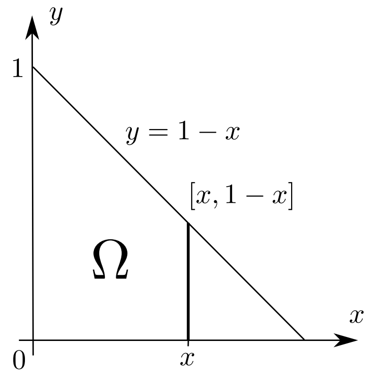
Nechť uzavřená oblast Ω je ohraničena přímkami $x = a, x = b$, kde $a < b$ a křivkami $y = \phi_1(x), y = \phi_2(x)$, kde funkce $\phi_1(x), y = \phi_2(x)$ jsou spojité na $< a, b >$ a vyhovují nerovnosti $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ pro $x \in< a, b >$. Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na Ω. Potom existuje $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy$ a platí

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy = \int_a^b \{\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy\}dx \tag{13.10}$$

Poznámka. Na vzorec (13.10) můžeme pohlížet takto. Oblast Ω se ortogonálně promítá do osy x do intervalu $< a, b >$. Zvolíme-li $x \in< a, b >$, potom úsečka o koncových bodech $[x, \Phi_1(x)], [x, \Phi_2(x)]$ patří do Ω.. Vnitřní integrace je podle y v mezích $\Phi_1(x)$ do $\Phi_2(x)$ a vnější integrace je podle x v mezích od a do b.

Příklad 13.2. Vypočítejte integrál $\iint\limits_{\Omega} x^2ydxdy$, jestliže Ω je oblast omezená souřadnými osami.

x, y a přímkou $x + y - 1 = 0$.(viz. obrázek)



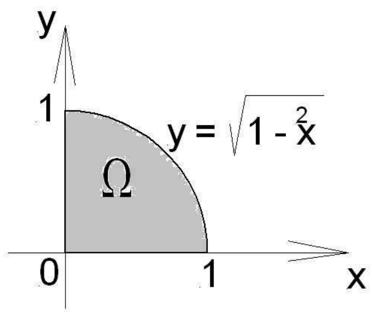
Obrázek 13.6: Oblast Ω z příkladu 13.2

Řešení. Podle (13.10) dostáváme $\iint\limits_{\Omega} x^2 y dx dy = \int_0^1 \{\int_0^{1-x} x^2 y dy\} dx = \int_0^1 [x^2 \frac{y^2}{2}]_0^{1-x} dx = 0.5 \int_0^1 (x^2(1 - x)^2 dx = 0.5 \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{1}{60}$

Příklad 13.3. Vypočítejte hodnotu dvojného integrálu

$$I = \iint\limits_{\Omega} (x + y) dx\ dy$$

kde Ω je uzavřená oblast v rovině (Oxy) v prvním kvartálu ohraničenou souřadnými osami x, y a křivkou $y = \sqrt{1 - x^2}$.(viz.obr.13.7).



Obrázek 13.7: Oblast Ω z příkladu 13.3

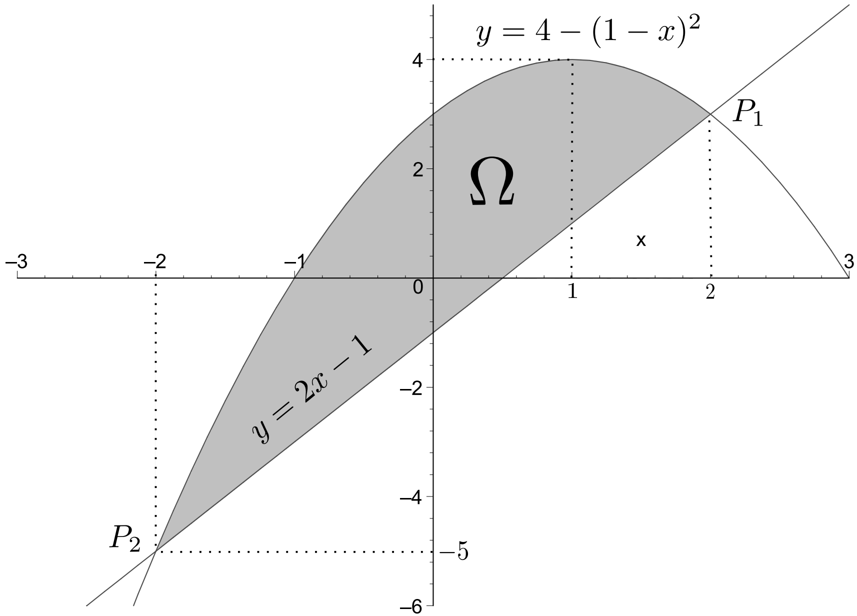
Řešení. Na obr.13.7 je znázorněna zadaná uzavřená oblast Ω, která je normální jak vzhledem k ose x, tak i vzhledem k ose y. Integrál budeme provádět s využitím toho, že Ω je normální vzhledem k ose x. V tomto případě je $a = 0, b = 1, \phi_1(x) = 0, \phi_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Integrandem je funkce spojitá na Ω. Podle věty 13.2 dostáváme

$$I = \int_0^1 \{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x + y)dy\}dx = \int_0^1 [xy + \frac{y^2}{2}]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \int_0^1 (x\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}(1 - x^2))dx$$
$$= \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{2}{3}$$

Poznámka. $\int x\sqrt{1 - x^2}dx$ lze řešit substitucí $t = 1 - x^2$.

Příklad 13.4. Vypočítejte hodnotu dvojného integrálu $\iint\limits_{\Omega} x dx dy$, kde oblast Ω je omezena křivkami $y = 2x - 1$ a $y = 4 - (1 - x)^2$.(viz.obr.13.10)

Řešení: Oblast Ω (viz.13.10) je ohraničená parabolou $y = 4-(1-x)^2$ shora a přímkou $y = 2x-1$ zdola. Vypočítejme průsečíky obou křivek. Dostáváme : $P_1 = [2,3], P_2 = [-2,-5]$. Daná oblast je normální vzhledem k ose x. Tedy $a = -2, b = 2, \phi_1(x) = 2x-1, \phi_2(x) = 4-(1-x)^2$.

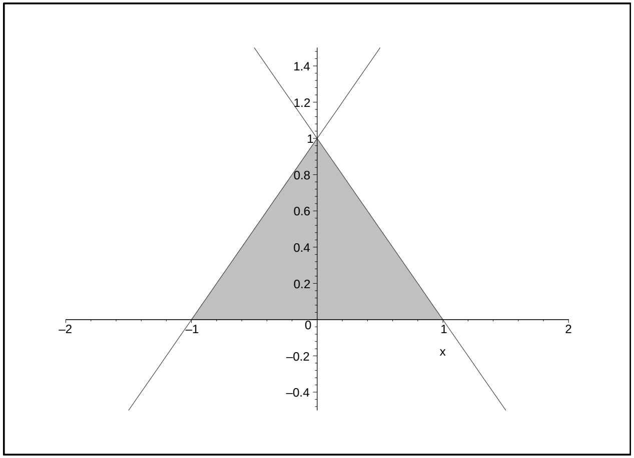


Obrázek 13.8: Oblast Ω z příkladu 13.3

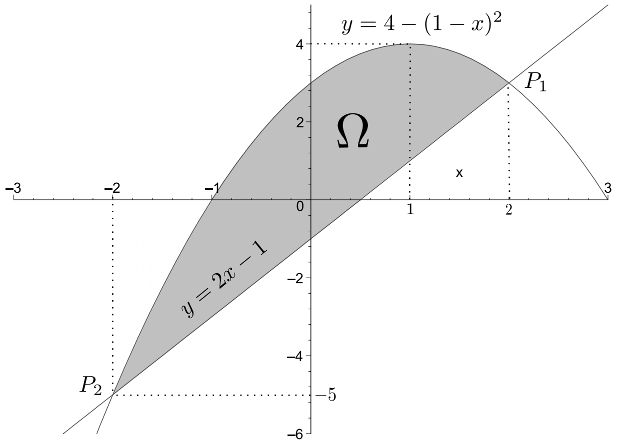
$$\iint\limits_{\Omega} x dx dy = \int_{-2}^{2} \{ \int_{2x-1}^{4-(1-x)^2} x dy \} dx = \int_{-2}^{2} x[y]_{y=2x-1}^{4-(1-x)^2} = \int_{-2}^{2} x(4-x)^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

Příklad 13.5. Vypočítejte dvojný integrál $\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2) dx dy$, kde oblast Ω je omezena přímkami $y=0$, $y=1-x$ a $y=1+x$

Řešení. Oblast Ω je tvaru trojúhelníku. Je sjednocenním oblastí Ω_1, Ω_2 ve tvaru trojúhelníků. Obor Ω_1 je ohraničen přímkami $x=0, y=0, y=1+x$, obor Ω_2 je ohraničen přímkami $x=0, y=0, y=1-x$.



Obrázek 13.9: Integrační obor z příkladu



Obrázek 13.10: Oblast Ω z příkladu 13.3

Je tedy

$$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2)dxdy + \iint\limits_{\Omega_2}(x^2+y^2)dxdy.$$

Výpočtem postupně dostáváme

$$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy = \int_{-1}^{0}\{\int_{0}^{1+x}(x^2+y^2)dy\}dx + \int_{0}^{1}\{\int_{0}^{1-x}(x^2+y^2)dy\}dx.$$

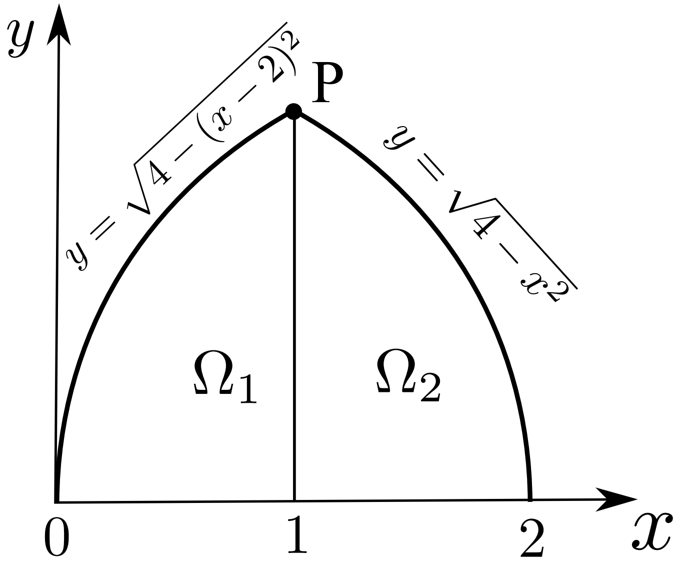
Integrací podle y dostaneme

$$\int_{-1}^{1-x} [x^2y + 1/3y^3\,]_{y=0}^{1-x} dx + \int_{0}^{1+x} [x^2y + 1/3y^3\,]_{y=0}^{1+x} dx =$$

$$\int_{-1}^{0} (x^2 + x^3 + \frac{(1+x)^3}{3})\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x^2 - x^3 + \frac{(1-x)^3}{3})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

.

Příklad 13.6. Vypočítejte $\iint\limits_{\Omega} 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je uzavřená oblast vyznačená na následujícím obrázku.



Obrázek 13.11: Obrázek k příkladu

Řešení. Obor $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$. Je tedy

$$\iint\limits_{\Omega} 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\omega_1} 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\omega_2} 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dostáváme

$$\iint\limits_{\Omega} 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \{ \int_0^{\sqrt{4-(x-2)^2}} 2xy\mathrm{d}y\}\mathrm{d}x + \int_1^2 \{ \int_0^{\sqrt{4-x^2}} 2xy\mathrm{d}y\}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x[y^2]_0^{\sqrt{4-(x-2)^2}}\mathrm{d}x + \int_1^2 x[y^2]_0^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x(4-(x-2)^2)\mathrm{d}x + \int_1^2 x(4-x^2)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 (-x^3+4x^2)\mathrm{d}x + \int_1^2 (4x-x^3)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{13}{12} + \frac{9}{4} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}.$$

Proveďte si jako cvičení výpočet tohoto příkladu i s využitím okolnosti, že Ω je normální oblast vzhledem k ose y.

13.3. Trojný integrál

Zavedení trojného integrálu je obdobné jako zavedení dvojného integrálu. Budeme tedy postupovat ve výkladu rychleji.

Nechť Ω je uzavřená oblast v Euklidovském prostoru E_3. Nechť $u = f(x, y, z)$ je funkce definovaná na Ω.

Řekneme, že uzavřené oblasti

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

tvoří rozdělení Ω na n uzavřených oblastí, jestliže

1. $\bigcup_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega$
2. oblasti $\omega_i, \omega_j, i \neq j$ mají společné nejvýše hraniční body.

Nechť d_i je maximální délka úsečky, jejíž koncové body jsou hraničními body oblasti ω_i; nazveme ji průměrem oblasti ω_i.

Nechť tedy $\{\omega_i\}_{i=1}^{n}\}$ je rozdělení Ω na n uzavřených oblastí $\{\omega_i\}_{i=1}^{n}$. Toto dělení označme D_n. Normu tohoto dělení $\|D_n\|$ definujme vztahem $\|D_n\| = max_i(|d_i|)$.

Označme $|\omega_i|$ objem oblasti ω_i.

Zvolme body $P_i \in \omega_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Označme ${}^{n}\boldsymbol{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

Utvořme součet

$$\Sigma_{i=1}^{n} f(P_i)|\omega_i| \tag{13.11}$$

Tento součet nazveme vytvářejícím součtem. Význam tohoto součtu záleží na významu funkce $f(x, y, z)$. Jestliže např. $f(x, y, z)$ je hustotou hmoty rozprostřené v Ω a jedná se o spojitou funkci v Ω, potom $f(P_i)|\omega_i|$ je přibližně hmotnost ω_i.

Nechť

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$$

je taková posloupnost dělení oblasti Ω, že posloupnost příslušných norem

$$\{\|D_i\|\}_{n=1}^{\infty} \tag{13.12}$$

má limitu rovnu nule. Budeme říkat, že posloupnost (13.12) je nulová.

Nechť pro každou nulovou posloupnost dělení

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$$

je posloupnost vytvářejících součtů $\Sigma_{i=1}^{n} f(P_i)|\omega_i|$ konvergentní při každé volbě bodů ${}^{n}\boldsymbol{P}$ a má tutéž limitu S. Potom ji nazýváme hodnotou trojného integrálu přes obor Ω z funkce $f(x,y,z)$. Píšeme

$$S = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Zavedeme si pojem normální oblasti vzhledem k (Oxy) (viz obrázek 13.12). Nechť Ω_1 je uzavřená oblast v rovině (Oxy). Nechť $z = \Phi_1(x,y)$, $z = \Phi_2(x,y)$ jsou spojité funkce v Ω_1 a nechť

$$\Phi_1(x,y) \leq \Phi_2(x,y) \text{ pro } [x,y] \in \Omega_1.$$

Nechť

$$\Omega = \{[x,y,z] : [x,y] \in \Omega_1 \wedge \Phi_1(x,y) \leq z \leq \Phi_2(x,y)\},$$

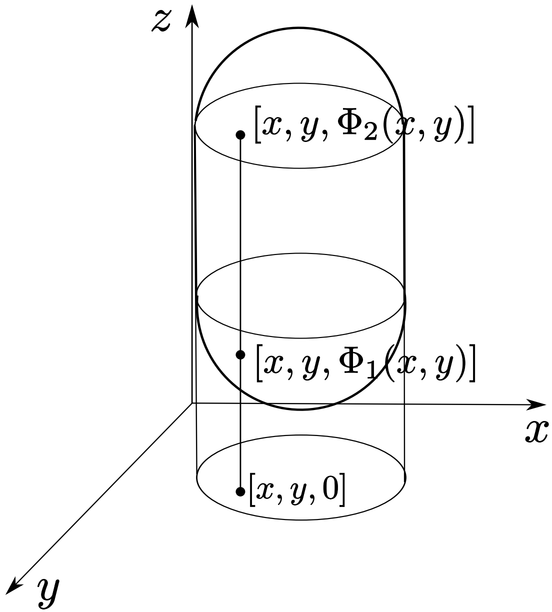
potom oblast Ω nazýváme normální vzhledem k rovině (Oxy). Jestliže f(x,y,z) je funkce spojitá v Ω, potom existuje

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)$$

a platí

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Omega_1} \{ \int\limits_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Podobně se zavádí pojem normálního oboru vzhledem k rovině (Oxz) a k rovině (Oyz). Platí analogické tvrzení o existenci a výpočtu trojného integrálu $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde Ω je normální obor vzhledem k rovině Oxy, resp. k rovině Oyz.



Obrázek 13.12: Normální oblast $\Omega \subset E_3$

Příklad 13.7. Vypočítejte hodnotu trojného integrálu I

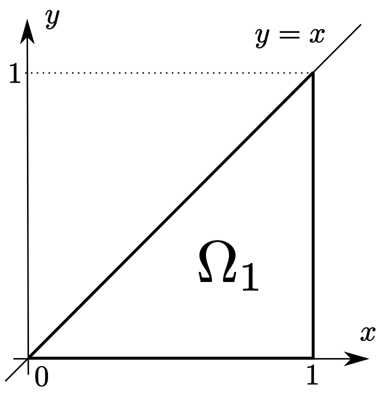
$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 y z^3) y dx\, dy\, dz$$

kde

$$\Omega \equiv \{[x, y, z] : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq z \leq xy\}.$$

Řešení. Označme Ω_1 množinu bodů

$$\Omega_1 = \{[x,y] : x \in < 0, 1 >, 0 \le y \le x.\}. \, (viz. obr. 13.13)$$



Obrázek 13.13: Integrační obor příkladu 13.7

Podle předchozího rámečku dostáváme

$$I = \iint\limits_{\Omega_1} \{ \int_0^{xy} (x^2 y z^3) dz \} dx\, dy = \iint\limits_{\Omega_1} [\frac{1}{4} x^2 y z^4]_0^{xy} dx\, dy = \iint\limits_{\Omega_1} (\frac{1}{4} x^6 y^5) dx\, dy$$

$$= \int_0^1 (\int_0^x \frac{1}{4} x^6 y^5 dy) dx = \int_0^1 [\frac{1}{24} x^6 y^6]_0^x dx = \frac{1}{24} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{312} [x^{13}]_0^1 = \frac{1}{312}$$

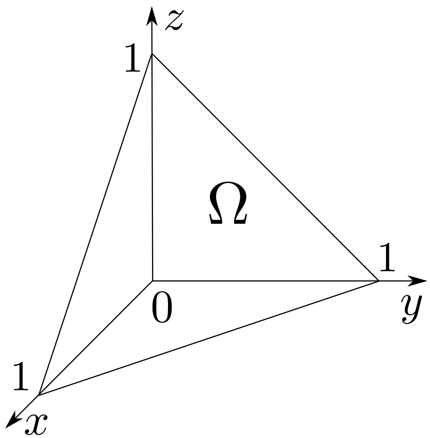
Příklad 13.8. Vypočítejte hodnotu trojného integrálu

$$I = \iiint\limits_{\Omega} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

kde

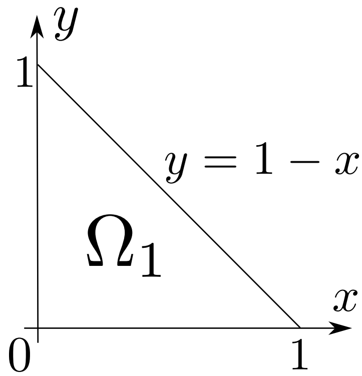
$$\Omega_1 = \{[x, y] : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 - x\}$$
$$\Omega = \{[x, y, z] : [x, y] \in \Omega_1 \wedge 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Řešení.: Na obrázku 13.14 je vyznačen obor Ω. (Je ohraničen rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z = 1$.)



Obrázek 13.14: Obor Ω

a na obrázku 13.15 je vyznačen obor Ω_1-ortogonální průmět oboru Ω do roviny Oxy.



Obrázek 13.15: Obor Ω_1

Je tedy

$$I = \iint\limits_{\Omega_1} \{ \int\limits_0^{1-x-y} 1 \mathrm{d}z \} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_1} [z]_0^{1-x-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

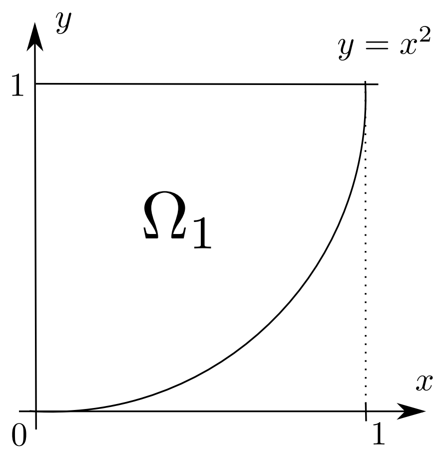
$$= \iint\limits_{\Omega_1} (1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \{ \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)\mathrm{d}y \} \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 (1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2})\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

Příklad 13.9. Vypočítejte $I = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde

$$\Omega = \{[x, y, z] : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{y},\ 0 \leq z \leq x + y^2\}$$

Řešení. Určíme ortogonální průmět Ω do roviny (Oxy). Označíme jej Ω_1. Zakreslíme jej do obrázku 13.16.



Obrázek 13.16: Obrázek k příkladu

Obor Ω je ohraničen rovinou $z = 0$ a plochou $z = x + y^2$. Potom

$$I = \iint\limits_{\Omega_1} \{ \int\limits_0^{x+y^2} \mathrm{d}z \} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_1} [z]_0^{x+y^2} \mathrm{d}z =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_1} (x + y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \{ \int\limits_0^{\sqrt{y}} (x + y^2) \mathrm{d}x \} \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^1 [\frac{x^2}{2} + y^2 x]_0^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (\frac{y}{2} + y^2 \sqrt{y}) \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^1 (\frac{y}{2} + y^{\frac{5}{2}}) \mathrm{d}y = [\frac{1}{4} y^2 + \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}}]_0^1 = \frac{15}{28}$$

13.4. Úlohy

1. Určete definiční obor funkce

$$z = \frac{x + y}{\sqrt{-x^2 + x - 1}}.$$

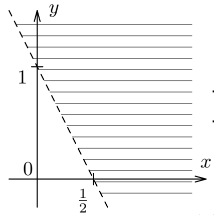
$[D_f = \emptyset]$

2. Určete definiční obor funkcí

a) $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ $[\mathbb{E}_2 - \{[0,0]\}]$

b) $z = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2-4}}$ [Vnějšek kruhu se středem $S = [1,0]$ o poloměru 2.]

c) $z = \ln(2x + y - 1)$

[Množina bodů $[x, y]$, pro něž je $2x + y - 1 > 0$. 

]

d) $z = \frac{2x-y}{(x+y)(x^2-4y^2)}$ $[\{[x, y] : \ x \neq -y, x \neq \pm 2y\}]$

e) $z = \frac{x+y}{\sqrt{-x^2+x-1}}$. $[D_f = \emptyset]$

3. Zjistěte množiny, na nichž jsou následující funkce spojité.

a) $z = 2^{\frac{\sqrt{x}}{x+y-1}}$ [Množina bodů $[x, y]$, pro něž je $x \geq 0 \wedge x + y - 1 > 0$.

b) $z = \frac{\ln(x^2-y)}{x+y+1}$ [Množina bodů $[x, y]$, pro něž je $x^2 - y > 0 \wedge x + y + 1 \neq 0$.

4. Vypočítejte $\lim\limits_{[x,y]\to[2,3]} \frac{3x+y}{x^2+y^2}$ $[\frac{9}{13}]$

5. Vypočítejte dvojné integrály

a) $\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{3+y^2} dxdy$, kde $\Omega =< 0, 3 > \times < 0, 1 >$ $[\frac{\pi\sqrt{3}}{2}]$

b) $\iint\limits_{\Omega} x\, ydx\, dy$, kde Ω je množina ohraničena křivkami $y = -x \wedge y = x - x^2$ $[-\frac{16}{15}]$

c) $\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} dx\, dy$, kde Ω je množina ohraničena křivkami $y = x, y = \frac{1}{x}, x = 3$ [16]

d) $\iint\limits_{\Omega} x^2 y dx\, dy$, kde Ω je množina ohraničena křivkami $y^2 = x, x = -2$ [0]

6. Vypočítejte hodnotu trojného integrálu

a) $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{1+x+y} dx\, dy\, dz$, kde Ω je množina ohraničena plochami
$x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ [3/2-2 ln 2]

b) $\iiint\limits_{\Omega} z\, dx\, dy\, dz$, kde Ω je množina ohraničena plochami $x = 2, y = 0, z = 0, y = 2x, z = x^2$
[$\frac{32}{3}$]

c) $\iiint\limits_{\Omega} z\, y\, z\, dx\, dy\, dz$, kde Ω je množina ohraničena plochami $y = x^2, x = y^2, z = 0, z = xy$ [$\frac{1}{96}$]