Kapitola 4.: Úlohy o dvou nezávislých náhodných výběrech z normálních rozložení

Cíl kapitoly

Po prostudování této kapitoly budete

- znát vlastnosti pivotových statistik odvozených ze dvou nezávislých náhodných výběrů z normálních rozložení a budete je umět použít pro řešení konkrétních úloh
- umět sestrojit intervaly spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot a podíl rozptylů dvou normálních rozložení
- provádět testy hypotéz o rozdílu středních hodnot a podílu rozptylů dvou normálních rozložení

Časová zátěž

Na prostudování této kapitoly a splnění úkolů s ní spojených budete potřebovat asi 9 hodin studia.

4.1. Motivace

V tomto případě je naším úkolem porovnat střední hodnoty či rozptyly dvou normálních rozložení na základě znalosti dvou nezávislých náhodných výběrů pořízených z těchto rozložení. Zpravidla konstruujeme intervaly spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot nebo podíl rozptylů respektive hodnotíme shodu středních hodnot pomocí dvouvýběrového t-testu či dvouvýběrového z-testu a shodu rozptylů pomocí F-testu.

4.2. Rozložení statistik odvozených z výběrových průměru a výběrových rozptylů

Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry a S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly. Pak platí:

a) Statistiky $M_1 - M_2$ a $S_*^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ jsou stochasticky nezávislé.

b) $M_1 - M_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$, tedy $U = \dfrac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$.

(Pivotová statistika U slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2 známe.)

c) Jestliže $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$, pak $K = \dfrac{(n_1+n_2-2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$.

(Pivotová statistika K slouží k řešení úloh o neznámém společném rozptylu σ^2.)

d) Jestliže $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$, pak $T = \dfrac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_*\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.

(Pivotová statistika T slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné.)

e) $F = \dfrac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

(Pivotová statistika F slouží k řešení úloh o σ_1^2 / σ_2^2.)

4.2.1. Příklad

Nechť jsou dány dva nezávislé náhodné výběry, první pochází z rozložení N(2, 3/2) a má rozsah 10, druhý pochází z rozložení N(3, 4) a má rozsah 5. Jaká je pravděpodobnost, že výběrový průměr 1. výběru bude menší než výběrový průměr 2. výběru?

Řešení:

Statistika $M_1 - M_2$ se podle 4.2. (b) řídí rozložením $N(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$,

kde $\mu_1 - \mu_2 = 2 - 3 = -1$, $\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2} = \dfrac{1{,}5}{10} + \dfrac{4}{5} = 0{,}95$, tj. $M_1 - M_2 \sim N(-1;0{,}95)$

Tedy statistika $U = \dfrac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \dfrac{M_1 - M_2 + 1}{\sqrt{0{,}95}}$

Dostáváme $P(M_1 < M_2) = P(M_1 - M_2 < 0) = P\left(U < \dfrac{0+1}{\sqrt{0{,}95}}\right) = \Phi(1{,}026) = 0{,}8475$.

S pravděpodobností přibližně 84,8% je výběrový průměr 1. výběru menší než výběrový průměr 2. výběru.

Řešení pomocí systému STATISTICA:
Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Dvakrát klikneme na název proměnné Prom1. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme
= INormal(0;-1;sqrt(0,95)).
V proměnné Prom1 se objeví hodnota 0,847549.

4.3. Intervaly spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2 / σ_2^2

Budeme zabývat speciálními případy, kdy za parametrickou funkci $h(\vartheta)$ považujeme rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ nebo podíl rozptylů σ_1^2 / σ_2^2 dvou normálních rozložení. Při konstrukci intervalu spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot buď rozptyly známe nebo neznáme a víme, že jsou shodné či nikoliv. Shodu rozptylů ověřujeme pomocí F-testu. Uvedeme jen přehled vzorců pro meze 100(1-α)% empirických intervalů spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2 / σ_2^2.

4.3.1. Přehled vzorců

a) Interval spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2, σ_2^2 známe

(využití pivotové statistiky $U = \dfrac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$)

Oboustranný: $(d, h) = \left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2},\ m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2}\right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha},\ \infty\right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ u_{1-\alpha}\right)$

b) Interval spolehlivosti pro μ_1 - μ_2, když σ_1^2, σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné

(využití pivotové statistiky $T = \dfrac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$)

Oboustranný:

$(d, h) = \left(m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2),\ m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2),\ \infty\right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty,\ m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)\right)$

c) Interval spolehlivosti pro společný neznámý rozptyl σ^2

(využití pivotové statistiky $K = \dfrac{(n_1 + n_2 - 2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$)

Oboustranný: $(d, h) = \left(\dfrac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)}, \dfrac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)} \right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(\dfrac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)}, \infty \right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, \dfrac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)} \right)$

d) Interval spolehlivosti pro podíl rozptylů $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

(využití pivotové statistiky $F = \dfrac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$)

Oboustranný: $(d, h) = \left(\dfrac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \dfrac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(\dfrac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \infty \right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)}\right)$

Upozornění: Není-li ve 4.3.1. (b) splněn předpoklad o shodě rozptylů, lze sestrojit aspoň přibližný 100(1-α)% interval spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$. V tomto případě má statistika T přibližně rozložení $t(\nu)$, kde počet stupňů volnosti $\nu = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$. Není-li ν celé číslo, použijeme v tabulkách kvantilů Studentova rozložení lineární interpolaci.

4.3.2. Příklad

Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru (v g/l). Z první nádrže bylo odebráno 25 vzorků, z druhé nádrže 10 vzorků. Byly vypočteny realizace výběrových průměrů a rozptylů: $m_1 = 34{,}48$, $m_2 = 35{,}59$, $s_1^2 = 1{,}7482$, $s_2^2 = 1{,}7121$. Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $N(\mu_2, \sigma^2)$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$.

Řešení:

Úloha vede na vzorec 4.3.1. (b). Vypočteme vážený průměr výběrových rozptylů a najdeme odpovídající kvantily Studentova rozložení:

$s_*^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{24 \cdot 1{,}7482 + 9 \cdot 1{,}7121}{33} = 1{,}7384$, $t_{0,975}(33) = 2{,}035$.

Dosadíme do vzorců pro dolní a horní mez intervalu spolehlivosti:

$d = m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) = 34{,}48 - 35{,}59 - \sqrt{1{,}7384} \cdot \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{10}} \cdot 2{,}035 = -2{,}114$

$h = m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) = 34{,}48 - 35{,}59 + \sqrt{1{,}7384} \cdot \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{10}} \cdot 2{,}035 = -0{,}106$

Zjistili jsme, že $-2{,}114$ g/l $< \mu_1 - \mu_2 < -0{,}106$ g/l s pravděpodobností aspoň 0,95.

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o jednom případu a dvou proměnných, které nazveme dm a hm. Do Dlouhého jména proměnné dm napíšeme

=34,48-35,59-sqrt((24*1,7482+9*1,7121)/33)*sqrt(1/25+1/10)*VStudent(0,975;33)

Dostaneme výsledek -2,11368. (Přitom funkce VStudent(x;sv) poskytuje x% kvantil Studentova rozložení s počtem stupňů volnosti sv.)

Do Dlouhého jména proměnné hm napíšeme

=34,48-35,59+sqrt((24*1,7482+9*1,7121)/33)*sqrt(1/25+1/10)*VStudent(0,975;33)

Dostaneme výsledek -0,10632.

4.3.3. Příklad

V příkladu 4.3.2. nyní předpokládáme, že dané dva náhodné výběry pocházejí z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro podíl rozptylů.

Řešení:

Úloha vede na vzorec 4.3.1. (d).

$$d = \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{F_{0{,}975}(24{,}9)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{3{,}6142} = 0{,}28$$

$$h = \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{F_{0{,}025}(24{,}9)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{1/F_{0{,}975}(9{,}24)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{1/2{,}7027} = 2{,}76$$

Dostáváme, že $0{,}28 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2{,}76$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Řešení pomocí systému STATISTICA:
Otevřeme nový datový soubor o jednom případu a dvou proměnných, které nazveme dm a hm. Do Dlouhého jména proměnné dm napíšeme
=(1,7482/1,7121)/VF(0,975;24;9)
Dostaneme výsledek 0,282521. (Přitom funkce VF(x;ný;omega) poskytuje x% kvantil Fisherova – Snedecorova rozložení s počtem stupňů volnosti čitatele ný a jmenovatele omega.)
Do Dlouhého jména proměnné hm napíšeme
=(1,7482/1,7121)/VF(0,025;24;9)
Dostaneme výsledek 2,759698.

4.4. Testování hypotéz o parametrických funkcích $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2/σ_2^2

4.4.1. Přehled testů

a) Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení N(μ_1, σ_1^2) a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozložení N(μ_2, σ_2^2), přičemž $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ a σ_1^2, σ_2^2 známe. Nechť c je konstanta. Test H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$ se nazývá dvouvýběrový z-test.

b) Nechť $X_{11},\ldots,X_{n_1 1}$ je náhodný výběr z rozložení N(μ_1, σ^2) a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení N(μ_2, σ^2), přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$ a σ^2 neznáme. Nechť c je konstanta. Test H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$ se nazývá dvouvýběrový t-test.

c) Nechť $X_{11},\ldots,X_{n_1 1}$ je náhodný výběr z rozložení N(μ_1, σ_1^2) a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení N(μ_2, σ_2^2), přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$. Test H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ se nazývá F-test.

4.4.2. Provedení testů o parametrických funkcích $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2/σ_2^2 pomocí kritického oboru

a) Provedení dvouvýběrového z-testu
Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$ (resp. H_1: $\mu_1 - \mu_2 < c$ resp. H_1: $\mu_1 - \mu_2 > c$).

Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{(m_1 - m_2) - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$.

Kritický obor pro oboustranný test: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$.

Kritický obor pro levostranný test: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$.

Kritický obor pro pravostranný test: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$.

H_0 zamítáme na hladině významnosti α, jestliže $t_0 \in W$.

b) Provedení dvouvýběrového t-testu

Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$ (resp. H_1: $\mu_1 - \mu_2 < c$ resp. H_1: $\mu_1 - \mu_2 > c$).

Realizace testového kritéria: $t_0 = \dfrac{(m_1 - m_2) - c}{s_* \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$.

Kritický obor pro oboustranný test: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2), \infty)$.

Kritický obor pro levostranný test: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)\rangle$.

Kritický obor pro pravostranný test: $W = \langle t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2), \infty)$.

H_0 zamítáme na hladině významnosti α, jestliže $t_0 \in W$.

c) Provedení F-testu

Testujeme H_0: $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ (resp. H_1: $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ resp. H_1: $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$).

Realizace testového kritéria: $t_0 = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$.

Kritický obor pro oboustranný test: $W = (0, F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\rangle \cup \langle F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty)$.

Kritický obor pro levostranný test: $W = (0, F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)\rangle$

Kritický obor pro pravostranný test: $W = \langle F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty)$

H_0 zamítáme na hladině významnosti α, jestliže $t_0 \in W$.

Podobně jako v kapitole 3 musíme ověřit normalitu dat. Pokud výběry menších rozsahů (pod 30) vykazují výraznější odchylky od normality, doporučuje se místo dvouvýběrového t-testu použít neparametrický dvouvýběrový Wilcoxonů test (viz kapitola 6).

Před provedením dvouvýběrového t-testu bychom se měli F-testem přesvědčit o shodě rozptylů. Zamítne-li F-test na dané hladině významnosti hypotézu o shodě rozptylů, musíme pro testování hypotézy o shodě středních hodnot použít speciální variantu dvouvýběrového t-testu, tzv. dvouvýběrový t-test se separovanými odhady rozptylů.

Musíme si být vědomi rozdílu mezi dvouvýběrovým t-testem a párovým t-testem. Dvouvýběrový t-test je založen na předpokladu nezávislosti daných dvou výběrů. Pokud v situaci, která vede na párový test, použijeme dvouvýběrový t-test, můžeme dostat nepravdivé výsledky. Naopak, mají-li dva nezávislé výběry stejný rozsah a my použijeme párový t-test místo dvouvýběrového t-testu, nedopustíme se hrubé chyby, pouze méně efektivně využijeme informaci obsaženou v datech.

4.4.3. Příklad

V restauraci "U bílého koníčka" měřili ve 20 případech čas obsluhy zákazníka. Výsledky v minutách: 6,8,11,4,7,6,10,6,9,8,5,12,13,10,9,8,7,11,10,5. V restauraci "Zlatý lev" bylo dané pozorování uskutečněno v 15 případech s těmito výsledky: 9,11,10,7,6,4,8,13,5,15,8,5,6,8,7.

Za předpokladu, že uvedené hodnoty pocházejí ze dvou normálních rozložení, na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že střední hodnoty doby obsluhy jsou v obou restauracích stejné.

Řešení:
Na hladině významnosti 0,05 testujeme nulovou hypotézu H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Je to úloha na dvouvýběrový t-test. Před provedením tohoto testu je však nutné pomocí F-testu shodu rozptylů. Na hladině významnosti 0,05 tedy testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$. Podle 4.4.2 (c) nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α, jestliže $t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} \in W$, kde

$W = \left(0, F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right\rangle \cup \left\langle F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty\right)$.

Vypočteme $m_1 = 8{,}25$, $m_2 = 8{,}13$, $s_1^2 = 6{,}307$, $s_2^2 = 9{,}41$.

V našem případě $\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{6{,}307}{9{,}41} = 0{,}6702$. V tabulkách najdeme

$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0,025}(19,14) = \frac{1}{F_{0,975}(14,19)} = \frac{1}{2{,}6469} = 0{,}3778$,

$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0,975}(19,14) = 2{,}8607$.

Protože 0,6702 nepatří do kritického oboru $\left\langle 0; 0{,}3778\right\rangle \cup \left\langle 2{,}8607; \infty\right)$, hypotézu o shodě rozptylů nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Nyní se vrátíme k dvouvýběrovému t-testu.

a) Testování pomocí kritického oboru: Podle 4.4.2 (b) nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α, když realizace testové statistiky

$t_0 = \frac{m_1 - m_2 - c}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \in W$, kde $W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2), \infty\right)$. Nejprve

vypočítáme $s_*^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{19 \cdot 8{,}13 + 14 \cdot 9{,}41}{33} = 7{,}623$ a dále

$t_0 = \frac{8{,}25 - 8{,}13}{\sqrt{7{,}623} \cdot \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{15}}} = 0{,}124$. V tabulkách najdeme $t_{0,975}(33) = 1{,}96$, tedy kritický obor

$W = \left(-\infty, -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96, \infty\right)$. Protože $t_0 \notin W$, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

b) Testování pomocí intervalu spolehlivosti: Podle 4.3.1. (b) máme

$(d, h) = (m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2),\ m_1 - m_2 +_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2))$.

V tabulkách najdeme $t_{0,975}(33) = 1{,}96$.

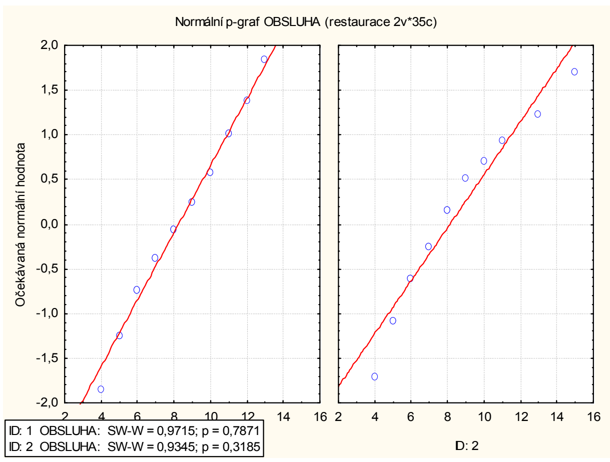
$$d = 8{,}25 - 8{,}13 - \sqrt{7{,}623} \cdot \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{15}} 1{,}96 = -1{,}73,$$

$$h = 8{,}25 - 8{,}13 + \sqrt{7{,}623} \cdot \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{15}} 1{,}96 = 1{,}97.$$

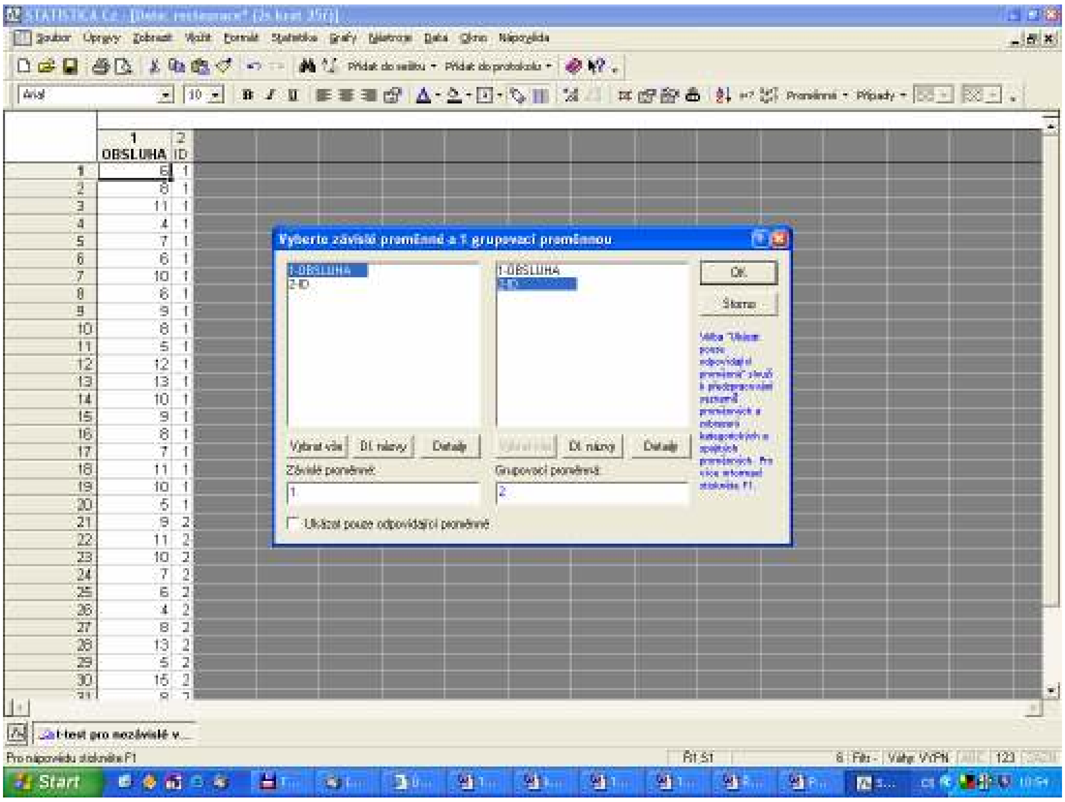
Protože $0 \in (-1{,}73; 1{,}97)$, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

c) Testování pomocí p-hodnoty: Podle 1.4.5 (c) dostáváme p = 2 min$\{P(T_0 \le t_0), P(T_0 \ge t_0)\}$ = = 2 min$\{P(T_0 \le 0{,}124), P(T_0 \ge 0{,}124)\}$ = 2 min$\{\Phi(0{,}124), 1 - \Phi(0{,}124)\}$, kde $\Phi(x)$ je distribuční funkce Studentova rozložení s počtem stupňů volnosti 33. Pomocí statistického software získáme $\Phi(0{,}124) = 0{,}549$, tedy p = 2.(1 – 0,549) = 0,902. Protože 0,902 > 0,05, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Řešení pomocí systému STATISTICA:
Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných a 35 případech. První proměnnou nazveme OBSLUHA, druhou ID. Do proměnné OBSLUHA napíšeme nejprve doby obsluhy v první restauraci a poté doby obsluhy ve druhé restauraci. Do proměnné ID, která slouží k rozlišení první a druhé restaurace, napíšeme 20 krát jedničku a 15 krát dvojku.
Pomocí NP-grafu a S-W testu ověříme normalitu dat v obou skupinách. Grafy – 2D Grafy – Normální pravděpodobnostní grafy – zaškrtneme S-W test, Proměnné OBSLUHA, OK, Kategorizovaný – Kategorie X, zaškrtneme Zapnuto, Změnit proměnnou – ID, OK.
Dostaneme graf



V obou případech se tečky odchylují od přímky jenom málo. Rovněž p-hodnoty S-W testu jsou v obou případech větší než 0,05, tedy hypotézy o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Nyní provedeme dvouvýběrový t-test současně s testem o shodě rozptylů:
Statistika – Základní statistiky a tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK, Proměnné – Závislé proměnné OBSLUHA, Grupovací proměnná ID – OK.



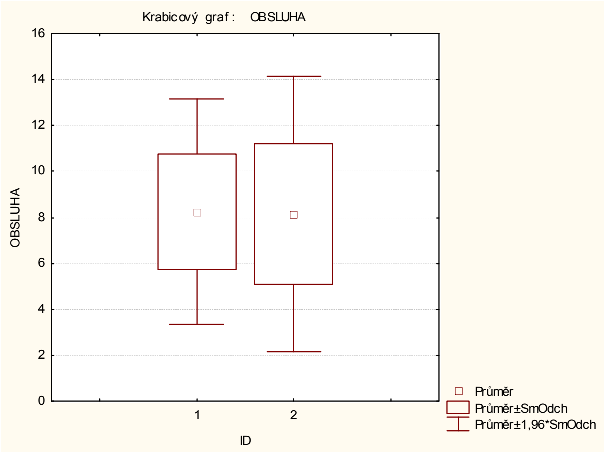
Po kliknutí na tlačítko Souhrn dostaneme tabulku

Proměnná	t-testy; grupováno: ID (restaurace) Skup. 1: 1 Skup. 2: 2 Průměr 1	Průměr 2	t	sv	p	Poč.plat 1	Poč.plat. 2	Sm.odch. 1	Sm.odch. 2	F-poměr rozptyly	p rozptyly
OBSLUHA	8,250000	8,133333	0,123730	33	0,902279	20	15	2,510504	3,067495	1,492952	0,410440

Vidíme, že testová statistika pro test shody rozptylů se realizuje hodnotou 1,492952 (je to převrácená hodnota k číslu 0,6702, které jsme vypočítali při ručním postupu), odpovídající p-hodnota je 0,41044, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o shodě rozptylů. (Upozornění: v případě zamítnutí hypotézy o shodě rozptylů je zapotřebí v tabulce t-testu pro nezávislé vzorky dle skupin zaškrtnout volbu Test se samostatnými odhady rozptylu.)

Dále z tabulky plyne, že testová statistika pro test shody středních hodnot se realizuje hodnotou 0,12373, počet stupňů volnosti je 33, odpovídající p-hodnota 0,902279, tedy hypotézu o shodě středních hodnot nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 5 % se neprokázal rozdíl ve středních hodnotách dob obsluhy v restauracích "U bílého koníčka" a „Zlatý lev“.

Tabulku ještě doplníme krabicovými diagramy. Na záložce Detaily zaškrtneme krabicový graf a vybereme volbu Průměr/SmOdch/1,96*SmOdch.



Z grafu je vidět, že průměrná doba obsluhy v první restauraci je nepatrně delší a má menší variabilitu než ve druhé restauraci. Extrémní ani odlehlé hodnoty se zde nevyskytují.

Shrnutí

V této kapitole jsme porovnávali střední hodnoty či rozptyly dvou normálních rozložení na základě znalosti dvou nezávislých náhodných výběrů pořízených z těchto rozložení. Vzorce pro výpočet mezí 100(1-α)% empirických intervalů spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1 - \mu_2$ či $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ jsou uvedené v 4.3.1. Meze lze počítat též pomocí systému STATISTICA, jak je uvedeno v příkladech 4.3.2. a 4.3.3.

Testování hypotéz o rozdílu středních hodnot a podílu rozptylu je popsáno ve 4.4. včetně způsobu, jak při těchto testech využít systém STATISTICA. Jedná se o *dvouvýběrový z-test, dvouvýběrový t-test* a *F-test.* Provedení dvouvýběrového t-testu a F-testu v systému STATISTICA je popsáno v příkladu 4.4.3.

Kontrolní otázky

1. Které pivotové statistiky používáme při řešení úloh o rozdílu středních hodnot a podílu rozptylů dvou normálních rozložení?
2. Jaké meze má 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti pro podíl směrodatných odchylek dvou normálních rozložení?
3. V čem spočívá rozdíl mezi dvouvýběrovým z-testem a dvouvýběrovým t-testem?
4. V jakých situacích používáme dvouvýběrový t-test a v jakých párový t-test?
5. K čemu slouží F-test?

Autokorekční test

1. Na základě znalosti dvou nezávislých náhodných výběrů o rozsazích n_1 a n_2 ze dvou normálních rozložení se shodným rozptylem máme sestrojit interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot. Použijeme pivotovou statistiku, která se řídí
a) standardizovaným normálním rozložením
b) Fisherovým – Snedecorovým rozložením $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$
c) Studentovým rozložením $t(n_1 + n_2 - 1)$

2. Na základě znalosti dvou nezávislých náhodných výběrů o rozsazích n_1 a n_2 ze dvou normálních rozložení s neznámými středními hodnotami máme sestrojit interval spolehlivosti pro podíl rozptylů. Použijeme pivotovou statistiku, která se řídí
a) standardizovaným normálním rozložením
b) Fisherovým – Snedecorovým rozložením $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$
c) Studentovým rozložením $t(n_1 + n_2 - 1)$

3. Testujeme-li hypotézu o shodě středních hodnot dvou normálních rozložení se shodným, ale neznámým rozptylem na základě znalosti dvou nezávislých náhodných výběrů, použijeme
a) dvouvýběrový t-test
b) dvouvýběrový z-test
c) F-test

4. Testujeme-li hypotézu o shodě rozptylů dvou normálních rozložení na základě znalosti dvou nezávislých náhodných výběrů, použijeme
a) dvouvýběrový t-test
b) dvouvýběrový z-test
c) F-test

Správné odpovědi: 1c) 2b) 3a) 4c)

Příklady

1. Bylo vylosováno 11 stejně starých selat téhož plemene. Šesti z nich byla předepsána výkrmná dieta č. 1 a zbylým pěti výkrmná dieta č. 2. Průměrné denní přírůstky v Dg za dobu půl roku jsou následující:
dieta č. 1: 62, 54, 55, 60, 53, 58
dieta č. 2: 52, 56, 49, 50, 51.
Zjištěné hodnoty považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů pocházejících z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro podíl rozptylů a 95% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$.
Výsledek:

$0{,}1872\ \mathrm{Dg}^2 < \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 12{,}9541\ \mathrm{Dg}^2$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

$0{,}99\ \mathrm{Dg} < \mu_1 - \mu_2 < 9{,}81\ \mathrm{Dg}$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

2. Pro údaje z příkladu 1. testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že obě výkrmné diety mají stejný vliv na hmotnostní přírůstky selat.
Výsledek:
Testujeme hypotézu H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
1. způsob – pomocí intervalu spolehlivosti. 95% empirický interval spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$ je interval (0,99; 9,81). Neobsahuje nulu, proto H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.
2. způsob – pomocí kritického oboru. Protože testové kritérium se realizuje hodnotou 2,771, která patří do kritického oboru $\left(-\infty; -2{,}2622\right\rangle \cup \left\langle 2{,}2622; \infty\right)$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.

3. Máme k dispozici realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $N(\mu_2, \sigma^2)$ o rozsazích $n_1 = 10$, $n_2 = 15$. Výběrové průměry se realizovaly hodnotami $m_1 = 120{,}56$, $m_2 = 124{,}13$, výběrové rozptyly hodnotami $s_1^2 = 9{,}14$, $s_2^2 = 8{,}95$. Lze na základě

těchto výsledků zamítnout na hladině významnosti 0,1 nulovou hypotézu H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ve prospěch oboustranné alternativy H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$?
Výsledek: Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,1.

4. Výrobce limonád chtěl zjistit, zda změna technologie výroby se projeví v prodeji limonád. Proto sledoval po 14 náhodně vybraných dnů před zavedením nových limonád tržby v určitém regionu a zjistil, že za den utržil v průměru 39 600 Kč se směrodatnou odchylkou 5 060 Kč. Po zavedení nových limonád prověřil stejným způsobem tržby v 11 náhodně vybraných dnech v témž regionu a zjistil průměrný příjem 41 200 Kč se směrodatnou odchylkou 4 310 Kč. Předpokládejte, že tržby za starý typ limonád se řídí rozložením $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a tržby za nový typ limonád se řídí rozložením $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

a) Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$.

b) Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$.

Výsledek:
ad a) Úloha vede na F-test. Vypočteme realizaci testového kritéria:

$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{5060^2}{4310^2} = 1{,}3783$, dále najdeme příslušné kvantily:

$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0,025}(13{,}10) = 0{,}3077, F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0,975}(13{,}10) = 3{,}5832$.

Protože testové kritérium $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1{,}3783$ se nerealizuje v kritickém oboru

$W = \left(0; 0{,}3077\right\rangle \cup \left\langle 3{,}5832; \infty\right)$, nelze na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu o shodě rozptylů.

ad b) Úloha vede na dvouvýběrový t-test. Protože jsme na hladině významnosti 0,05 nezamítli hypotézu o shodě rozptylů, můžeme rozptyly σ_1^2, σ_2^2 považovat za shodné a za jejich odhad vezmeme vážený průměr výběrových rozptylů

$$s_*^2 = \frac{13 \cdot 5060^2 + 10 \cdot 4310^2}{23} = 22548165{,}217.$$

Vypočteme realizaci testového kritéria:

$$\frac{m_1 - m_2 - c}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{39600 - 41200}{\sqrt{22548165{,}217}\sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{11}}} = -0{,}8363, \; t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0,975}(23) = 2{,}0687$$

Protože testové kritérium -0,8363 se nerealizuje v kritickém oboru
$W = \left(-\infty; -2{,}0687\right\rangle \cup \left\langle 2{,}0687; \infty\right)$, na hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu o shodě středních hodnot.