Chapter 1

Východiska modelu

- Dva agenti - domácnosti a firmy.
- Agenti optimalizují, jsou racionální, trhy se čistí.

Domácnosti:

- Maximalizují užitek daný užitkovou funkcí, obecně $U(c_t, 1-l_t)$ při daném rozpočtovém omezení (všechny veličiny jsou v reálném vyjádření).
- Domácnosti volí c_t (spotřeba, poptávka po zboží), l_t^S (nabídka práce), k_t^S (nabídka kapitálu; domácnosti spoří formou nákupu kapitálu).
- Tvoří poptávkovou stranu na trhu zboží a nabídkovou stranu na trzích práce a kapitálu.

Firmy:

- Maximalizují zisk při daném omezení zdrojů - kapitálu, práce a půdy (uvažujeme jako konstantu).
- Tvoří nabídkovou stranu na trhu zboží (y_t) a poptávkovou stranu na trzích práce (l_t^D) a kapitálu (k_t^D).

V ekonomice jsou tedy tři trhy:

- Trh zboží: $y_t = c_t$.
- Trh práce: $l_t^D = l_t^S$.
- Trh práce: $k_t^D = k_t^S$.
- Trhy jsou vždy v rovnováze $\Rightarrow$ v DSGE modelech se těžko hledá kauzalita.

Chapter 2

Odvození modelu

2.1 Domácnosti

Domácnosti maximalizují očekávanou hodnotu součtu očekávaných diskontovaných užitků daných užitkovou funkcí

$$maxE_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, 1 - l_t) \tag{2.1}$$

při rozpočtovém omezení, které lze vyjádřit jako "aktiva+příjmy = pasiva+výdaje":

$$l_t w_t + R_t k_{t-1} + k_{t-1} + t_t + \pi_{t-1} = c_t + k_t + \delta k_{t-1} \tag{2.2}$$

kde w_t je reálná mzda. Dále R_t je nominální (tady si nejsem jistý - jde o nominální úrokovou míru, která je díky absenci inflace zároveň rovna reálné?) úroková míra, t_t jsou čisté vládní transfery, o kterých budeme dále předpokládat, že jsou nulové. Zisky plynoucí domácnostem vyjadřuje výraz π_{t-1} (v dokonalé konkurenci jsou zisky nulové) a δ je parametr depreciace kapitálu.
Rozpočtové omezení lze tedy zapsat:

$$l_t w_t + (1 + R_t - \delta) k_{t-1} = c_t + k_t. \tag{2.3}$$

Potřebujeme ještě počáteční podmínky $k_0 > 0$, $c_t, k_t > 0 \forall t$.

2.1.1 Užitkové funkce

2.1.2 Řešení problému domácností

Domácnosti řeší lagrangián:

$$L_t(c_t, l_t, k_t) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[U(c_t, 1 - l_t) + \lambda_t \left(l_t w_t + (1 + R_t - \delta) k_{t-1} - c_t - k_t \right) \right] \tag{2.4}$$

Podmínky optimality:

$$\frac{\partial L_t}{\partial c_t} = U_{c_t} + \lambda_t = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial L_t}{\partial l_t} = -U_{l_t} + \lambda_t w_t = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial L_t}{\partial k_t} = -\lambda_t + E_t\left[\lambda_{t+1}(1 + R_t - \delta)\right] = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial L_t}{\partial \lambda_t} = 0 \Rightarrow BC. \tag{2.8}$$

Kombinací 2.5 s 2.7, tedy podmínek optimality pro spotřebu a kapitál, můžeme získat Eulerovu rovnici, která určuje optimální výši spotřeby. Nejprve přepíšeme 2.7 do tvaru

$$\frac{\lambda_t}{E_t \lambda_{t+1}} = (1 + R_t - \delta) \tag{2.9}$$

a kombinací rovnice 2.5 v čase t a $t+1$ získáme

$$\frac{\lambda_t}{E_t \lambda_{t+1}} = \frac{U_{c_t}}{\beta E_t U_{c_{t+1}}}. \tag{2.10}$$

Kombinací předchozího získáme Eulerovu rovnici

$$(1 + R_t - \delta) = \frac{U_{c_t}}{\beta E_t U_{c_{t+1}}} \tag{2.11}$$

Tato rovnice popisuje rovnováhu na trhu statků. Předpokládejme, že užitková funkce domácností má tvar

$$U(c_t, 1 - l_t) = \log c_t + \psi \log(1 - l_t). \tag{2.12}$$

Parametr ψ lze interpretovat jako Frischovu elasticitu nabídky práce.
Eulerovu rovnici tedy zapíšeme jako

$$(1 + R_t - \delta) = \frac{\beta E_t c_{t+1}}{c_t}. \tag{2.13}$$

Dále nás zajímá rovnováha na trhu práce. Nabídku práce lze získat kombinací podmínek optimality pro spotřebu a práci 2.5 a 2.6

$$\psi \frac{c_t}{1 - l_t} = w_t \tag{2.14}$$

$$l_t = 1 - \psi \frac{c_t}{w_t}. \tag{2.15}$$

2.2 Firmy

Firmy maximalizují zisk daný výrazem

$$\pi_t = y_t - R_t k_{t-1} - l_t w_t \tag{2.16}$$

při omezení daném Cobb-Douglasovou produkční funkcí

$$Y_t = a_t k_{t-1}^{1-\alpha} l_t^{\alpha}. \tag{2.17}$$

Parametr α označuje podíl výrobního faktoru práce na příjmu z produktu a a_t je exogenně daná úroveň technologie, jejíž logaritmus následuje AR(1) proces.
Firmy volí množství práce a kapitálu, které chtějí poptávat. Analogicky jako u domácností lze odvodit optimality k problému firem:

$$(1-\alpha) a_t k_{t-1}^{-\alpha} l_t^{\alpha} = R_t \tag{2.18}$$

$$\alpha a_t k_{t-1}^{1-\alpha} l_t^{\alpha-1} = w_t \tag{2.19}$$

Tyto rovnice udávají poptávku firem po výrobních faktorech. Dosazením obou podmínek optimality do výrazu pro zisk firmy můžeme ověřit, že zisk je nulový.

2.3 Rovnováha

Rovnováha je definována jako stav, ve kterém

- Domácnosti maximalizují užitek při daných a_t, π_t.
- Firmy maximalizují zisk při daných a_t, π_t.
- Všechny trhy se čistí.

2.3.1 Trh práce

Rovnici popisující rovnováhu na trhu práce získáme kombinací 2.19 a 2.14:

$$\begin{aligned} w_t &= w_t && (2.20) \\ \psi \frac{c_t}{1-l_t} &= \alpha a_t k_t^{1-\alpha} l_t^{\alpha-1} && (2.21) \end{aligned}$$

2.3.2 Trh kapitálu

Rovnici popisující rovnováhu na trhu kapitálu získáme dosazením do rozpočtového omezení domácností za ceny (mezní produkty) výrobních faktorů z 2.18 a 2.19:

$$l_t \alpha a_t k_{t-1}^{1-\alpha} l_t^{\alpha-1} + k_{t-1}(1-\alpha) a_t k_{t-1}^{-\alpha} l_t^{\alpha} + (1-\delta) k_{t-1} = c_t + k_t \quad (2.22)$$

$$\alpha y_t + (1-\alpha) y_t + (1-\delta) k_{t-1} = c_t + k_t \quad (2.23)$$

$$y_t = c_t + k_t - (1-\delta) k_{t-1} \quad (2.24)$$

$$y_t = c_t + i_t \quad (2.25)$$

Rovnice 2.24 popisuje akumulaci kapitálu.

2.3.3 Trh zboží

Rovnováhu trhu zboží popisuje Eulerova rovnice 2.13, do které dosadíme za R_t z rovnice 2.18.

2.3.4 Dynamická rovnováha

V modelu máme šest proměnných: c_t, l_t, k_t, a_t, y_t, R_t. Tady nerozumím tomu, proč tu není zařazena i mzda w_t - stejně jako R_t je i mzda určena jako mezní produkt, tedy pro jejich určení se používají ty samé veličiny a pokud do Eulerovi rovnice dosadíme, nepotřebujeme R_t vlastně vůbec.
Dynamickou rovnováhu popisuje těchto šest rovnic:

$$(1 + R_t - \delta) = \frac{\beta E_t c_{t+1}}{c_t} \quad (2.26)$$

$$\psi \frac{c_t}{1 - l_t} = \alpha a_t k_t^{1-\alpha} l_t^{\alpha-1} \quad (2.27)$$

$$y_t = c_t + k_t - (1-\delta) k_{t-1} \quad (2.28)$$

$$y_t = a_t k_{t-1}^{1-\alpha} l_t^{\alpha} \quad (2.29)$$

$$\log a_t = \rho \log a_{t-1} + \varepsilon \quad (2.30)$$

$$R_t = (1-\alpha) a_t k_{t-1}^{-\alpha} l_t^{\alpha} \quad (2.31)$$

Tedy Eulerova rovnice, rovnice trhu práce, proces akumulace kapitálu, produkční funkce, exogenní proces pro technologii a výraz pro úrokovou míru.

Chapter 3

Vyřešení modelu

Nyní potřebujeme model vyřešit. Budeme chtít získat tzv. log-linearizované řešení. Postup bude takovýto:

1. Najdeme steady state (dlouhodobou rovnováhu), tj. vyjádříme proměnné jako funkce strukturálních parametrů. Model má steady state právě tehdy když je stacionární.

2. Log-linearizujeme model kolem steady statu pomocí Taylorova rozvoje prvního stupně.

3. Vyřešíme systém racionálních očekávání, čímž získáme tzv. kanonickou reprezentaci DSGE modelu.

4. Přepíšeme model do stavové reprezentace.

3.1 Hledání steady statu

Pro nalezení steady statu odstraníme časové indexy, vezmeme expektace (tady nerozumím, co přesně znamená vzít expektace - znamená to, že prostě budeme brát očekávání jako 100% přesná?) a řešíme proměnné jako funkce strukturálních parametrů.
Z Eulerovi rovnice můžeme vyjádřit steady statovou hodnotu R_t. Položíme

$$E_t c_{t+1} = c_t = c \tag{3.1}$$

a tím získáme

$$\begin{aligned} \frac{c}{c} &= \beta(1 + R - \delta) && (3.2) \\ \frac{1}{\beta} &= 1 + R - \delta && (3.3) \\ R^* &= \delta + \frac{1}{\beta} - 1. && (3.4) \end{aligned}$$

Z exogenního procesu pro a_t při absenci exogenních šoků plyne

$$\log a = \rho \log a. \tag{3.5}$$

Pro $\rho < 1$ je řešením této rovnice $a = 1$.
Steady stateové hodnoty dalších parametrů jsem sice spočítal, ale nejsem si jistý, jestli správně. Pokud je to správně, tak sem přidám ještě i postup, jak jsem se k nim dobral. S využitím toho, že R^* už známe, a že $a^* = 1$ je

$$\begin{aligned}
k^* &= \frac{R^*}{\psi\left[\delta + \frac{R^*}{1-\alpha}(1+\frac{\alpha}{\psi})\right]} \\
c^* &= \frac{R^*}{\psi\left[\delta + \frac{R^*}{1-\alpha}(1+\frac{\alpha}{\psi})\right]}(\delta + \frac{R^*}{1-\alpha}) \\
l^* &= (1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{(R^*)^{1+\frac{1}{\alpha}}}{\psi\left[\delta + \frac{R^*}{1-\alpha}(1+\frac{\alpha}{\psi})\right]} \\
y^* &= \frac{(R^*)^2}{\psi(1-\alpha)\left[\delta + \frac{R^*}{1-\alpha}(1+\frac{\alpha}{\psi})\right]}
\end{aligned}$$

3.2 Log-linearizace

Využijeme vzorce pro Taylorův rozvoj 1.řádu se středem v bodě x^*

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) \tag{3.6}$$

Dále využijeme "zkratku"

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \log x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} x \tag{3.7}$$

a zkusíme zlog-linearizovat rovnici popisující akumulaci kapitálu

$$y_t = c_t + k_t - (1-\delta)k_{t-1}. \tag{3.8}$$

Nejprve zlog-linearizujeme levou stranu rovnice. Upravíme na

$$y_t = \frac{y^*}{y^*} e^{\log y_t} = y^* e^{\log y_t - \log y^*} \tag{3.9}$$

a poté použijeme Taylorův rozvoj se středem v y^*:

$$y_t \cong y^* + \left(y^* e^{\log y_t - \log y^*}\right)\Big|_{y_t = y^*} (\log y_t - \log y^*) = y^* + y^* \hat{y}_t = y^*(1 + \hat{y}_t) \tag{3.10}$$

kde výraz

$$\hat{y}_t = \log y_t - \log y^* \tag{3.11}$$

je relativní odchylka y_t od steady statové hodnoty y^*. Tím jsme zlog-linearizovali levou stranu rovnice.
Pravá strana rovnice je funkcí tří proměnných, c_t, k_t a k_{t-1}. Upravíme na

$$c_t + k_t - (1-\delta)k_{t-1} = c^* e^{\log c_t - \log c^*} + k^* e^{\log k_t - \log k^*} - (1-\delta)k^* e^{\log k_{t-1} - \log k^*} \tag{3.12}$$

Opět použijeme Taylorův rozvoj se středem v $[c^*, k^*, k^*]$, kde provedeme tři parciální derivace:

$$\begin{aligned}
c_t + k_t - (1-\delta)k_{t-1} &= c^* + k^* - (1-\delta)k^* + c^* e^{\log c_t - \log c^*}\Big|_{c_t=c^*}(\log c_t - \log c^*) && (3.13)\\
&\quad + k^* e^{\log k_t - \log k^*}\Big|_{k_t=k^*}(\log k_t - \log k^*) && (3.14)\\
&\quad - (1-\delta)k^* e^{\log k_{t-1} - \log k^*}\Big|_{k_{t-1}=k^*}(\log k_{t-1} - \log k^*) && (3.15)\\
&= c^* + k^* - (1-\delta)k^* + c^*\hat{c}_t + k^*\hat{k}_t - (1-\delta)k^*\hat{k}_{t-1} && (3.16)\\
y^*(1+\hat{y}_t) &= c^*(1+\hat{c}_t) + k^*(1+\hat{k}_t) - (1-\delta)(1+k^*\hat{k}_{t-1}) && (3.17)
\end{aligned}$$

Dále víme, že ve steady statu rovnice platí, takže můžeme psát

$$\begin{aligned}
y^*(1+\hat{y}_t) &= c^*(1+\hat{c}_t) + k^*(1+\hat{k}_t) - (1-\delta)(1+k^*\hat{k}_{t-1}) && (3.18)\\
y^*\hat{y}_t &= c^*\hat{c}_t + k^*\hat{k}_t - (1-\delta)k^*\hat{k}_{t-1} && (3.19)\\
\hat{y}_t &= \frac{c^*}{y^*}\hat{c}_t + \frac{k^*}{y^*}\hat{k}_t - (1-\delta)\frac{k^*}{y^*}\hat{k}_{t-1} && (3.20)
\end{aligned}$$

Obdobně můžeme zloglinearizovat Eulerovu rovnici. Přepíšeme ji do tvaru

$$c^* e^{\log c_{t+1} - \log c^*}\frac{1}{c^* e^{\log c_t - \log c^*}} = \beta + \beta R^* e^{\log R_t - \log R^*} - \delta\beta \tag{3.21}$$

a začneme s levou stranou. Provedeme Taylorův rozvoj 1.řádu se středem v $[c^*, c^*]$:

$$\begin{aligned}
c^* e^{\log c_{t+1} - \log c^*}\frac{1}{c^* e^{\log c_t - \log c^*}} &\cong \frac{c^*}{c^*} + \frac{c^* e^{\log c_{t+1} - \log c^*}}{c^* e^{\log c_t - \log c^*}}\Bigg|_{c_t=c^*, c_{t+1}=c^*}(\log c_{t+1} - \log c^*) && (3.22)\\
&\quad + \frac{c^* e^{\log c_{t+1} - \log c^*}}{c^* e^{\log c_t - \log c^*}}\Bigg|_{c_t=c^*, c_{t+1}=c^*}(\log c^* - \log c_t) && (3.23)\\
&= 1 + \hat{c}_{t+1} - \hat{c}_t. && (3.24)
\end{aligned}$$

Pravou stranu aproximuje stejným způsobem se středem v R^*:

$$\beta + \beta R^* e^{\log R^* - \log R^*} - \delta\beta \cong \beta + \beta R^* e^{\log R_t - \log R^*} - \tag{3.25}$$

$$-\delta\beta + \beta R^* e^{\log R_t - \log R^*}\Big|_{R_t = R^*} (\log R_t - \log R^*) \tag{3.26}$$

$$= \beta + \beta R^* - \delta\beta + \beta R^* \hat{R}_t \tag{3.27}$$

Rovnici nyní můžeme napsat v aproximovaném tvaru a odečíst od ní rovnici ve steady stateových proměnných, o které víme, že platí jako rovnost. Tím dostaneme finální tvar log-linearizované Eulerovi rovnice.

$$1 + \hat{c}_{t+1} - \hat{c}_t = \beta + \beta R^* - \delta\beta + \beta R^* \hat{R}_t \tag{3.28}$$

$$1 = \beta + \beta R^* - \delta\beta \tag{3.29}$$

$$\hat{c}_{t+1} - \hat{c}_t = \beta R^* \hat{R}_t \tag{3.30}$$

Na příkladu produkční funkce můžeme ukázat postup, který lze aplikovat v příkladě, kdy jsoiu obě strany rovnice v součinu. Princip spočívá v tom, že celou rovnici zlogaritmujeme a vyhodnotíme nejprve v původním čase a poté ve steady statu. Dvě vzniklé rovnice potom od sebe odečteme a dostaneme výsledný tvar:

$$\log y_t = \log a_t + (1-\alpha)\log k_{t-1} + \alpha \log l_t \tag{3.31}$$

$$\log y^* = \log a^* + (1-\alpha)\log k^* + \tag{3.32}$$

$$\log y_t - \log y^* = \log a_t - \log a^* + (1-\alpha)\log k_{t-1} - (1-\alpha)\log k^* + \tag{3.33}$$

$$+\alpha \log l_t - \alpha \log l^* \tag{3.34}$$

$$\hat{y}_t = \hat{a}_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1} + \alpha \hat{l}_t \tag{3.35}$$

Stejným způsobem můžeme log-linearizovat vztah pro úrokovou míru:

$$\log R_t = \log(1-\alpha) - \alpha k_{t-1} + \alpha l_t \tag{3.36}$$

$$\log R^* = \log(1-\alpha) - \alpha k^* + \alpha l^* \tag{3.37}$$

$$\hat{R}_t = \alpha \hat{l}_t - \alpha \hat{k}_{t-1} \tag{3.38}$$

Dál nevím, jestli mám log-linearizovat i exogenní proces pro technologii. Mohl bych od obou stran odečíst $\log a^*$ a získal bych tak AR(1) proces pro odchylky a_t od SS. Je to správně?

Poslední rovnice, kterou zbývá log-linearizovat, je rovnováha na trhu práce. Začneme levou stranou

$$\begin{aligned}
\psi\frac{c_t}{1-l_t} &= \psi\frac{c^*\log e^{\log c_t-\log c^*}}{(1-l^*)e^{\log(1-l_t)-\log(1-l^*)}} && (3.39)\\
&\cong \psi\frac{c^*}{1-l^*}+\psi\frac{c^*}{1-l^*}(\log c_t-\log c^*)- && (3.40)\\
&\quad -\psi\frac{c^*}{1-l^*}(\log(1-l_t)-\log(1-l^*)) && (3.41)\\
&= \psi\frac{c^*}{1-l^*}(1+\hat{c}_t-\widehat{1-l_t}) && (3.42)
\end{aligned}$$

Tady nevím, jestli jsem správně označil, co je odchylka u práce - zda je to $\widehat{1-l_t}$ nebo $1-\hat{l}_t$ nebo zda jsou si tyto výrazy rovny.
Pravou stranu upravíme stejně:

$$\alpha a_t k_{t-1}^{1-\alpha} l_t^{\alpha-1} \cong \alpha a^* k^{*1-\alpha} l^{*\alpha-1}(1+\hat{a}_t+(1-\alpha)\hat{k}_{t-1}+(\alpha-1)\widehat{1-l_t}) \qquad (3.43)$$

Nyní máme aproximovánu celou rovnici:

$$\psi\frac{c^*}{1-l^*}(1+\hat{c}_t-\widehat{1-l_t}) = \alpha a^* k^{*1-\alpha} l^{*\alpha-1}(1+\hat{a}_t+(1-\alpha)\hat{k}_{t-1}+(\alpha-1)\widehat{1-l_t}) \qquad (3.44)$$

a můžeme využít toho, že ve steady statu rovnice platí. Vydělíme tedy rovnici na obou stranách stejným číslem rovným hodnotě obou jednotlivých stran rovnice ve steady statu, čímž nám rovnice přejde do tvaru:

$$\hat{c}_t-\widehat{1-l_t} = \hat{a}_t+(1-\alpha)\hat{k}_{t-1}+(\alpha-1)\widehat{1-l_t} \qquad (3.45)$$

Pro log-linearizaci této rovnice by bylo lepší využít jednodušší metodu nastíněnou výše, která by vedla je stejnému výsledku podstatně rychleji.