EKONOMICKO-SPRÁVNÍ FAKULTA
Masarykova univerzita

Základy oceňování derivátů

Úrokové forwardy

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Nejdříve se podívejme na spotový trh úrokové míry (např. Libor)

$L_i(m)$ = Libor na m-denní depozitum zaznamenaný v den „i“

NA – notional amount, nominální částka kontraktu

NTD – počet dnů v roce (budeme uvažovat 360)

t_m – acrual period, v letech pro m-denní depozitum (t_m = m/NTD)

TA – terminal amount, částka vyplacená v okamžiku expirace kontraktu

Příklad: uvažujme že „i“ je čas 0, uvažujme 90-denní eurodolarové depozitum (m=90). Dollar Libor je na úrovni 2 %.

čili $L_i(m) = L_0(90) = 0{,}02$

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Pokud je na počátku uloženo 50 000 USD, potom NA = 50 000 USD

Libor je počítán na bázi ACT/360 a úrok je připisován na konci období

Tudíž $t_m = 90/360 = 0,25$

$TA = NA\,[1 + L_0(m)\, t_m]$

Placený úrok je rozdíl TA a NA, čili $NA\,[L_0(m)\, t_m]$

V tomto případě TA = 50 000 [1 + 0,02 (90/360)] = 50 250

Úrok = 50 250 - 50 000 = 250

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Nyní se podíváme na derivátový trh

FRA (forward rate agreement) je OTC derivát, kterého podkladovým aktivem je úroková míra na depozita

FRA uzavírají dvě protistrany. Jedna strana obdrží při expiraci fixní platbu (short pozice) a druhá strana obdrží variabilní sazbu (long pozice).

Pokud jsme tedy v long pozici ve FRA, tak získáváme, pokud Libor poroste.

V short pozici obdržíte úrokovou platbu založenou na fixní úrokové míře a zaplatíte úrokovou platbu založenou na variabilní úrokové míře.

V long pozici obdržíte úrokovou platbu založenou na variabilní míře a zaplatíte pevnou úrokovou platbu.

EKONOMICKO-SPRÁVNÍ FAKULTA
Masarykova univerzita

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Protože na počátku mezi stranami nedochází k výměně plateb (cash flow), tak abychom eliminovali arbitrážní možnosti, cena FRA je taková fixní úroková sazba, při které je hodnota FRA v okamžiku sjednání kontraktu nulová

FRA se označují jako „X x Y“ neboli „X na Y“, kde X a Y jsou v měsících

Když tedy uvažujeme FRA 3 x 9, tak 3 znamená, že FRA expiruje za 3 měsíce.

Podkladové aktivum je tedy nepřímo vyjádřené jako rozdíl mezi 3 a 9, to znamená, že výplata z FRA je stanovena jako šestiměsíční Libor, když FRA expiruje za 3 měsíce.

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

FRA úroková sazba je stanovena jako vztah mezi spotovou úrokovou mírou na 9-měsíční depozitum úročené Liborem a spotovou úrokovou mírou na 3-měsíční depozitum úročené Liborem v okamžiku, kdy je FRA uzavřeno

Při výpočtech předpoklad - každý den má 30 dnů

Kontrakt uzavřený mezi dvěma stranami vypořádán jako
rozdíl mezi fixním úrokem stanoveným v den uzavření kontraktu
a variabilní úrokovou sazbou pozorovanou v den expirace FRA

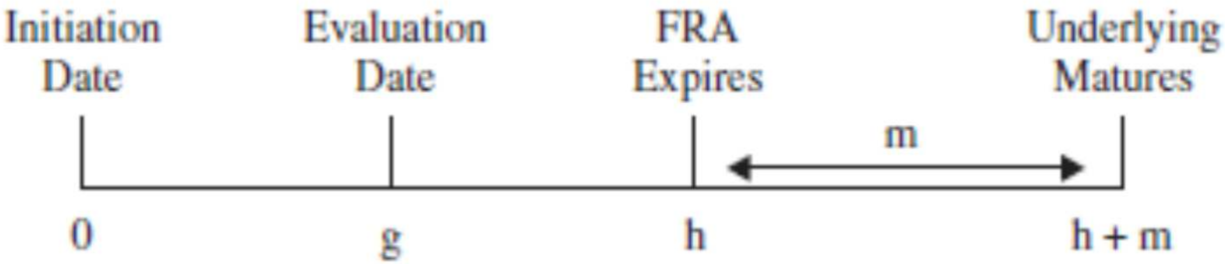
Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Underlying pro FRA tedy není ani podkladové aktivum, ani podkladový instrument, ale úroková platba.

Strany, které uzavírají FRA nemusí být nutně angažovány také v depozitu, které je úročené Liborem na spotovém trhu.

Spotový trh Libor je pouze benchmark, od kterého se odvíjí FRA platba

Základy oceňování derivátů – úrokový forward



Například 30-denní FRA na 90-denní Libor (jedná se o FRA 1 x 4) má h = 30 a m = 90

Potom FRA (0,30,90) bude číslo, například 1 % nebo 2,5 %.

Našim cílem je ocenit FRA, to znamená stanovit takovou pevnou úrokovou míru, při které bude hodnota FRA na počátku nulová

EKONOMICKO-SPRÁVNÍ FAKULTA
Masarykova univerzita

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Když nějaký úrokový derivát expiruje, jsou technicky 2 možné způsoby vypořádání

- při expiraci derivátu (v čase h, zároveň čas, kdy začíná plynout úročení depozita)

- při splatnosti podkladového instrumentu (depozita), v čase h+m

FRA jsou typicky vypořádávané v okamžiku expirace, zatímco swapy a opce na úrokovou míru jsou vypořádávány obvykle po uplynutí úrokovacího období podkladu

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Pokud budeme uvažovat vypořádání v okamžiku h, potom vypořádávaná částka činí:

Pro příjemce variabilní sazby (long pozice):

$$NA\{[L_h(m) - FRA(0,h,m)]t_m\} / [1 + D_h(m)t_m]$$

Pro příjemce fixní sazby (short pozice):

$$NA\{[FRA(0,h,m) - L_h(m)]t_m\} / [1 + D_h(m)t_m]$$

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Povšimněme si dělitele.

Tento je diskontním faktorem aplikovaném při payoff z FRA. Reflektuje fakt, že úroková míra, kterou je payoff určován, a sice $L_h(m)$, je obdržena v den h ze spotového trhu Libor. Za tuto míru má být ovšem vypořádáno až při maturitě depozita.

Obvykle se předpokládá, že $D_h(m) = L_h(m)$

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Ocenění FRA – stanovení takové FRA (0,h,m) sazby, při které bude hodnota FRA při jeho uzavření nulová

Pro naše účely budeme teď předpokládat, že půjčování a půjčování si je možné za Libor. Také budeme předpokládat, že nominální hodnota je jedna jednotka uvažované měny, čili NA = 1. A nakonec budeme uvažovat, že diskontní míra při FRA vypořádání je FRA sazba v čase vypořádání.

.

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Uvažujme tedy FRA 3 x 6, pro které

NA = 1,

h = 90,

m = 90,

t_h = 90/360,

$L_0(h) = L_0(90)$ = 1,5 %,

t_{h+m} = 180/360, $L_0(h+m) = L_0(180)$ = 2,0 % a

t_m = 90/360.

Nejprve uvažme tři následující arbitrážní transakce učiněné v čase 0, za předpokladu, že Libor na tříměsíční depozitum byl v čase h - $L_h(90)$ = 3% :

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Steps	Cash Flow at Time 0	Cash Flow at Time h	Cash Flow at Time h + m
1. Make deposit for h + m days	$-1/[1 + L_0(h)t_h]$ $= -0.996264$	0	$+[1 + L_0(h + m)t_{h+m}]/[1 + L_0(h)t_h]$ $= 1.006227$
2. Borrow funds for h days	$+1/[1 + L_0(h)t_h]$ $= +0.996264$	-1	
3. Borrow funds for m days initiated at h		$+1$	$-[1 + L_h(m)t_m] = -1.0075$
4. Receive-floating FRA and roll payoff at $L_h(m)$ rate from h to h + m	0	0	$+[L_h(m) - FRA(0, h, m)]t_m$ $= [0.03 - FRA(0,h,m)](90/360)$
Net cash flows	0	0	$+[1 + L_0(h + m)t_{h+m}]/[1 + L_0(h)t_h] - [1 + L_h(m)t_m]$ $+[L_h(m) - FRA(0,h,m)]t_m$

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Po realizaci prvních tří transakcí bychom opět mohli konstatovat, že arbitražér naplnil pravidlo číslo 1 nepoužívej vlastní peníze, ale ne pravidlo č. 2 – nepodstupuj tržní riziko.

V čase h + m totiž můžeme vidět, že pokud by předmětný Libor v čase h byl ve výši 3 %, tak částka, kterou bychom museli zaplatit v čase h+m za půjčené peníze by byla vyšší než cash flow, které by plynulo z podkladové veličiny

Rizikem je tedy to, že pokud úroková míra $L_h(m)$ vzrostla v čase h na 3 %, tak nám zapříčinila, že budeme dlužni 1,0075 na konci periody m, ale obdržíme pouze 1,006227 z transakce 1

Toto riziko může být eliminováno vstupem do forwardové pozice (krok 4), ve které obdržíme variabilní sazbu na m-dnový Libor, která expiruje v čase h a má sazbu stanovenou na FRA (0,h,m)

EKONOMICKO-SPRÁVNÍ FAKULTA
Masarykova univerzita

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Nyní předpokládejme, že budeme rolovat payoff z FRA do budoucnosti z času h do času h+m investováním jakéhokoliv zisku nebo půjčením si ke krytí jakékoliv ztráty za sazbu $L_h(m)$.

Předpokládejme, že diskontní faktor ve FRA payoff vzorci je $1+L_h(m)\ t_m$

Tato transakce nám umožní dodržet již zmiňované arbitražérovo pravidlo č. 2

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Připomeňme, že cílem při ocenění FRA je stanovit vhodnou FRA (0,h,m) sazbu.

Konečné cash flows vyjádřené v tabulce na slidu 14 mohou být použity k stanovení této sazby.

Protože transakce odstartovala bez počáteční investice nebo obdržení jakékoliv platby, čisté cash flow v čase h+m by se mělo také rovnat 0, proto:

$$
\begin{aligned}
&+[1+L_0(h+m)t_{h+m}]/[1+L_0(h)t_h]- \\
&\quad [1+L_h(m)t_m]+[L_h(m)-\mathrm{FRA}(0,h,m)]t_m = 0
\end{aligned}
$$

Úpravou získáváme:

$$
\mathrm{FRA}(0,h,m) = \{[1+L_0(h+m)t_{h+m}]/[1+L_0(h)t_h]-1\}/t_m
$$

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Rovnice vypadá být komplexní, ale interpretace by mohla být v zásadě celkem jednoduchá.

Jedná se o úročenou hodnotu jedné měnové jednotky investované za dlouhodobý Libor (období h+m dnů) dělená úročenou hodnotou jedné měnové jednotky investované za krátkodobý Libor na h dnů, to celé mínus 1 a potom anualizováno.

Nebo alternativně: hledáme takovou FRA sazbu, že pokud bychom si uložili depozitum na spotovém trhu na období h+m, tak výsledek by měl být ekvivalentní tomu, že si na spotovém trhu uložíme depozitum na období h a poté následně částku získanou v čase h uložíme za hledanou FRA sazbu na období m.

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Výsledkem je tedy budoucí úroková míra v dané Libor struktuře

Pro náš příklad:

$$\begin{aligned}
FRA(0,90,90) &= \{[1 + L_0(180)t_{180}]/[1 + L_0(90)t_{90}] - 1\}/t_{90} \\
&= \{[1 + 0.02(180/360)]/[1 + 0.015(90/360)] - 1\}/(90/360) \\
&= 0.024907 \text{ or } 2.49\%.
\end{aligned}$$

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Nyní se zaměříme na ohodnocení úrokového forwardu.

Použijeme stejný přístup, který jsme demonstrovali pro forwardy obecně, a sice v čase g (ve kterém chceme určit hodnotu forwardu) můžeme vstoupit do kompenzační transakce ve FRA, které by expirovalo stejně jako původní FRA (pro toto nové FRA je však určena nová forwardová cena za podmínek platných v čase g).

Stanovení hodnoty úrokového forwardu bude tedy opět odpovídat současné hodnotě rozdílu forwardových cen.

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Při zaujetí opačné pozice cash flow z nového FRA neutralizuje cash flow ze starého FRA.

Čili, pokud jsme v long pozici ve starém FRA, obdržíme v okamžiku h míru $L_h(m)$. Když vstoupíme do krátké pozice v novém FRA (v okamžiku g), toto nás zavazuje zaplatit v okamžiku h míru $L_h(m)$.

Uvažme tedy strategii znázorněnou v následující tabulce.

Předpokládáme, že NA = 1, dále že uzavřeme FRA, které expiruje za 90 dnů a je založeno na 90 denním Liboru. Pevná sazba při uzavření kontraktu FRA (0,90,90) je tedy 2,49%. Když FRA expiruje, nebudeme přijímat platbu, ale přesuneme ji do okamžiku h+m (v případě ztráty si půjčíme).

EKONOMICKO-SPRÁVNÍ FAKULTA
Masarykova univerzita

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Steps	Cash Flow at Time g	Cash Flow at Time h	Cash Flow at Time h + m
1. Receive-floating FRA (settled in arrears) at Time 0; roll forward at Rate $L_h(m)$ from h to h + m		0	$+\{[L_h(m) - FRA(0,h,m)]t_m\}$ $= +(L_h(m) - 0.0249)(90/360)$
2. Receive-fixed FRA (settled in arrears) at Time g; roll forward at Rate $L_h(m)$ from h to h + m	0	0	$+[FRA(g,h-g,m) - L_h(m)]t_m$ $= +[0.0259 - L_h(m)](90/360)$
Net cash flows	0	0	$+[FRA(g,h-g,m) - FRA(0,h,m)]t_m$ $= +(0.0259 - 0.0249)(90/360)$ $= 0.00025$

EKONOMICKO-SPRÁVNÍ FAKULTA
Masarykova univerzita

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Tímto získáme výplatu v čase h+m, kterou ještě ovšem musíme diskontovat k okamžiku g, ke kterému chceme stanovit hodnotu forwardu

$$V_g(0,h,m) =$$

$$\{[FRA(g,h-g,m) - FRA(0,h,m)]t_m\} / [1 + D_g(h+m-g)t_{h+m-g}]$$

kde nová FRA sazba v okamžiku g je získaná jako:

$$FRA(g,h-g,m) = \{[1 + L_g(h+m-g)t_{h+m-g}]/[1 + L_g(h-g)t_{h-g}] - 1\}/t_m$$

Základy oceňování derivátů – úrokový forward

Tradičně je počítáno s tím, že diskontní míra $D_g(h + m - g)$

je rovna podkladové variabilní míře $L_g(h + m - g)$

Předpokládejme, že 60-denní míra Libor je 3 % ke dni g.

Potom $L_{30}(60)$ = 3 % a hodnota FRA bude:

$$V_g(0,h,m) = V_{30}(0,90,90) = 0.00025/[1 + 0.03(60/360)] = 0.000249.$$