1 Strategické hry a Nashova rovnováha

1. Práce na společném projektu. Pracujete s kolegou na společném projektu. Můžete pracovat buď hodně nebo málo. Výsledek projektu závisí na vašem společném úsilí. Výsledek, který nastane, když oba pracujete málo je pro vás lepší než výsledek, kdy vy pracujete hodně a kolega málo, ale horší než výsledek, který nastane, kdy oba pracujete hodně. Nejlepší výsledek je, když vy pracujete málo a kolega hodně. Kolegovi preference jsou stejné. Formulujte strategickou hru, která modeluje tuto situaci.

2. Holubice a jestřáb. Dvě zvířata bojují o kořist. Každé z nich může být pasivní nebo agresivní. Každé z nich preferuje být agresivní, když je soupeř pasivní a být pasivní, když je soupeř agresivní. Při své dané akci zvíře vždy preferuje, když je soupeř pasivní než když je agresivní.

3. Dva lidé vkročí do autobusu, ve kterém jsou dvě volná sousední sedadla. Každá osoba se rozhoduje, zda zůstane stát nebo si sedne. Sedět sám je pohodlnější než sedět vedle někoho, což je pohodlnější než stát.
   - Předpokládejme, že každá osoba se stará jen o své vlastní pohodlí. Formulujte hru a najděte Nashovu rovnováhu.
   - Předpokládejme, že každá osoba se stará o pohodlí druhé osoby. Pokud druhá osoba stojí, pak preferuje ze zdvořilostních důvodů také stát. Formulujte hru a najděte Nashovu rovnováhu.
   - Srovnejte výsledky v obou situacích.

4. Ryba hermafordit. Některé hermaforditické ryby si při setkání druhého jedince téhož druhu vybírají, zdali budou hrát roli samce nebo samičky. Každá ryba má preferované pohlaví. Ryba obdrží výplatu H, pokud se páří ve své preferovaném pohlaví a L v opačném případě. Platí, že $H > L$. Uvažujme setkání dvou ryb se stejným preferovaným pohlavím. Pokud se obě rozhodnou pro své nepreferované pohlaví, pak jsou pohlaví přidělena náhodně a každá ryba obdrží výplatu $\frac{1}{2}(H + L)$. Pokud se obě rozhodnou pro páření ve svém preferovaném pohlaví, pak se rozejdou bez páření, hledají si nového partnera a obdrží výplatu S (ocenění šance na nového vhodného partnera). Formulujte tuto situaci jako strategickou hru. Najděte pro dané hodnoty H a L rozsah hodnot S, pro které je hra shodná s vězňovým dilematem.

5. Vězňovo dilema s altruistickými preferencemi. Uvažujme situaci podobnou vězňovu dilematu. Čísla v tabulce ovšem nereprezentují preference hráčů, ale peněžní výplaty, které hráči obdrží. Hráči jsou

	D	C
D	1,1	3,0
C	0,3	2,2

   Table 1: Vězňovo dilema

   altruističtí a preference hráče i mohou být vyjádřeny výplatní funkcí ve tvaru $m_i(a) + \alpha m_j(a)$, kde $m_i(a)$ je peněžní částka, kterou obdrží hráč i při profilu akcí a a α je kladné číslo.
   - Pro případ $\alpha = 1$ formulujte strategickou hru, která modeluje tuto situaci. Je tato hra vězňovým dilematem?
   - Najděte rozsah hodnot α pro něž tato hra není vězňovým dilematem. Najděte pro tyto hodnoty Nashovy rovnováhy.

6. Varianta hry Lov jelena. Mějme hru lov jelena s n hráči, ve které je potřeba jen m lovců k ulovení jelena, kde $2 \leqq m < n$. Uloveného jelena si rozdělí jen lovci, kteří se na jeho ulovení podíleli. Najděte Nashovy rovnováhy pro dané dva případy preferencí.
   - Každý lovec preferuje $\frac{1}{n}$ jelena před zajícem
   - Každý lovec preferuje $\frac{1}{k}$ jelena před zajícem, kde $m \leqq k \leqq n$. Ale preferuje zajíce, před jakoukoliv menší částí jelena.

7. Varianta hry Lov jelena. (Tato hra byla navrhnuto k ilustraci Keynesovy myšlenky, že ekonomika může dosahovat neefektivních rovnováh, Bryant (1983, 1994)). Uvažujme hru lov jelena s n hráči. Každý hráč má K jednotek svých zdrojů, které může alokovat mezi lov jelena či zajíce. Označme e_i množství

zdrojů investované do lovu jelena hráčem i. Šance, že hráči chytí jelena, závisí na nejnižší hodnotě zdrojů investovaných do lovu jelena určitým hráčem. Označme tuto hodnotu $\min_j e_j$. Výplata hráče i při profilu akcí $(e_1, .., e_n)$ je $2 \min_j e_j - e_i$. Je profil akcí $(e, e, ..., e)$ v němž všichni hráči investují stejné množství zdrojů do lovu jelena Nashovou rovnováhou? Pro jaké hodnoty e to platí? Existují nějaké jiné Nashovy rovnováhy?

8. Hádání $\frac{2}{3}$ průměru. Každý z $n > 2$ lidí řekne celé číslo od 0 do 100. Poté si z řečených čísel vypočítá průměr a kdo řekl číslo nejblíže $\frac{2}{3}$ průměru získává danou částku peněz. Pokud je k lidí stejně daleko, pak si danou částku dělí rovným dílem. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a nalezněte Nashovu rovnováhu. Použijte metodu odstraňování striktně dominovaných strategií.

9. Voličská účast. Dva kandidáti A a B kandidují ve volbách. Z n voličů jich k podporuje kandidáta A a $m = n - k$ podporuje kandidáta B. Hlasování je pro voliče nákladné, náklady jsou ve výši $-c$, kde $0 < c < 1$. Pokud vyhraje preferovaný kandidát obdrží volič výplatu 2, pokud skončí volby remízou obdrží výplatu 1. Najděte Nashovy rovnováhy pro případ, kdy $k = m$ a pro případ kdy $k < m$.

10. Dělení peněz. Dva lidé se mají mezi sebe rozdělit 10 Kč následujícím způsobem. Každý řekne celé číslo do 10. Pokud je součet jejich čísel maximálně 10, pak každý dostane takovou částku, jaké číslo jmenoval. Pokud je součet jejich čísel větší než 10 a každý řekl jiné číslo, pak osoba, která řekla menší číslo obdrží tuto částku a druhý obdrží zbytek. Pokud je součet jejich čísel větší než 10 a každý řekl stejné číslo, pak každý obdrží 5 Kč. Najděte optimální odpovědi obou hráčů a najděte Nashovu rovnováhu.

11. Synergie. Dva jedinci spolupracují na projektu a rozhodují se o tom kolik úsilí investovat do společného projektu. Úsilí osoby i reprezentujeme pomocí kladného čísla a_i. Výsledek projektu a zároveň i preference jsou reprezentovány výplatní funkcí $u_i(a_i) = a_i(c + a_j - a_i)$. Najděte Nashovu rovnováhu této hry.

12. Společný projekt. Dva jedinci spolupracují na projektu a rozhodují se o tom kolik úsilí investovat do společného projektu. Úsilí osoby i reprezentujeme pomocí kladného čísla a_i. Výsledek projektu je dán funkcí $3a_ia_j$ a každý účastník podstupuje náklady $c_i(a_i) = a_i^2$. Výsledek projektu si účastníci dělí na půl a obdržená část mínus jejich náklady reprezentuje jejich preference. Najděte Nashovu rovnováhu této hry. Existuje nějaká hodnota úsilí, která je pro oba účastníky výhodnější než Nashova rovnováha?

13. Přispívání na veřejný statek fixní částkou. Každý z n lidí se rozhoduje, zda přispěje fixní částku na veřejný statek. Statek bude poskytnut jen pokud přispěje alespoň k lidí, kde $2 \leqq k \leqq n$. Příspěvky nejsou vratné. Každý člověk řadí výsledky v následujícím pořadí (i) nepřispěji a statek je poskytnut (ii) přispěji a statek je poskytnut (iii) nepřispěji a statek není poskytnut (iv) přispěji a statek není poskytnut. Formulujte hru, která modeluje tuto situaci a najděte Nashovu rovnováhu.

14. Přispívání na veřejný statek s rozhodováním kolik přispět. Označme w_i bohatství osoby i a c_i příspěvek na veřejný statek. Zbytek $w_i - c_i$ je vydán za soukromou spotřebu. Množství poskytnutých veřejných statků je rovno množství poskytnutých příspěvků. Předpokládejme, že hráči jsou 2 a jejich výplatní funkce mají tvar $u_1(c_1) = \sqrt{c_1 + c_2} + w_1 - c_1$ a $u_2(c_2) = 2\sqrt{c_1 + c_2} + w_2 - c_2$ (Všimněte si, že hráči si cení veřejných i soukromých statků, přičemž platí, že víc statků mají tím vyšší výplata a mezní užitek z veřejných statků klesá). Nalezněte optimální odpovědi hráčů a Nashovu rovnováhu.

15. Přispívání na veřejný statek, kdy spotřeba veřejného statku ovlivňuje užitek ze spotřeby soukromého statku. Předpokládejme, že hru hrají 2 hráči výplatní funkce vypadá následovně $c_1 + c_2 + (w_i - c_i) + (c_1 + c_2)(w_i - c_i)$ (poslední člen ukazuje, že čím více veřejného statku je poskytnuto, tím více si lidé užijí soukromé spotřeby). Předpokládejme, že $w_1 = w_2 = w$. Najděte Nashovu rovnováhu této hry. Ukažte, že v Nashově rovnováze jsou na tom hráči hůře oproti situaci, kdy oba přispějí polovinu. Jak vypadá Nashova rovnováha v případě, že hru hraje n hráčů?

16. Kolektivní rozhodování. Skupina lidí se rozhoduje, jakou politiku budou provádět. Jednotlivé politiky můžeme modelovat jako čísla. Každý člověk nejvíce preferuje určitou politiku x_i^*, politiku y preferuje před politikou z právě v tom případě, kdy z je blíže x_i^* než y. Hlasování probíhá tak, že každý dá hlas určité politice a vybrána je ta politika pro kterou hlasuje mediánový volič. Jak vypadá strategická hra

modelující tuto situaci? Mají v této situaci voliči motivaci lhát o svých preferencích?

17. Jaké jsou Nashovy rovnováhy hry zadané následující tabulkou? Která rovnováha odpovídá stálému stavu, pokud hra modeluje dvoustranné interakce v populaci složené z totožných jedinců?

	A	B	C
A	1,1	2,1	4,1
B	1,2	5,5	3,6
C	1,4	6,3	0,0

Table 2:

18. Cournotova hra a technologický pokrok. Co se stane s Nashovou rovnováhou a výstupem firem v Cournotově oligopolu se dvěma firmami, lineární inverzní poptávkou a konstantními průměrnými náklady, pokud jedna z firem zažije technologický pokrok, který sníží její náklady.

19. Cournotův oligopol s fixními náklady. Najděte Nashovu rovnováhu v Cournotově oligopolu se dvěma firmami v případě, kdy inverzní poptávková funkce je $P(Q) = \alpha - Q$ a nákladová funkce firmy i má tvar

$$C_i(q_i) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } q_i = 0 \\ f + cq_i & \text{pokud } q_i > 0 \end{cases}$$

kde $c > 0$, $f > 0$ a $c < \alpha$. Jak ovlivňují fixní náklady rozhodování firmy?

20. Zobecnění Cournotovy hry pro n identických firem. Uvažujte Cournotovu hru s lineární inverzní poptávkovou křivkou, konstantními průměrnými náklady a n identickými firmami. Najděte optimální odpovědi firem a Nashovu rovnováhu. Vyjádřete cenu za kterou firmy prodávají a řekněte, jak se mění s počtem firem na trhu.

21. Na trhu jsou 2 firmy A a B, které si konkurují bertrandovským způsobem. Firmy neprodávají zcela totožný produkt. Poptávka po produktech firmy A je dána rovnicí $q_a = 24 - 2p_a + p_b$. Poptávka po produktech firmy B je $q_b = 24 - 2p_b + p_a$. Obě firmy mají konstantní mezní náklady ve výši 3. Odvoďte a nakreslete optimální odpovědi obou firem. Najděte Nashovu rovnováhu.

22. Užívání společného zdroje. N subjektů využívá společný zdroj k produkci. Když se zvyšuje množství zdrojů využívané všemi subjekty, každý subjekt může vyrábět menší množství. Označme x_i množství zdrojů využívané subjektem i. Předpokládejme, že výstup je dán rovnicí $x_i(1 - (x_1 + ... + x_n))$ pokud $x_1 + ... + x_n \leqq 1$, v opačném případě je výstup 0. Každý subjekt si volí x_i tak, aby maximalizoval svůj výstup. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a najděte Nashovu rovnováhu. Nacházíte nějakou podobnost mezi touto hrou a Cournotovým oligopolem? Najděte profil akcí $(x_1, ..., x_n)$ při němž je výstup každé firmy větší než v Nashově rovnováze.

23. Aukce více předmětů. Draží se 2 jednotky. Aukce má n účastníků. Účastník i si cení první jednotku na v_i a druhou na w_i, přičemž $v_i > w_i$. Ukažte že v případě Vickrey aukce hráčova akce, kdy nabídne v_i a w_i, slabě dominuje ostatní akce.

24. Čekání ve frontě. 200 lidí chce jít na koncert, ale kapacita klubu je jen 100 míst. Označme v_i částku na kolik si osoba i cení koncertu nad cenu lístku vyjádřenou v jednotkách času, tzn. daný člověk je ochoten čekat ve frontě po dobu v_i. Předpokládejme, že $v_1 > v_2 > v_3 > ... > v_{200}$. Každý člověk si volí jak dlouho přijde před otevřením pokladny s lístky, tj. jak dlouho je ochoten čekat ve frontě. Pokud více lidí přijde ve stejný čas, pak dostane přednost člověk s nižším indexem. Modelujte tuto situaci jako aukci, kde se draží více jednotek s diskriminační cenou a najděte Nashovu rovnováhu. Odpovídá výsledek hry předpokládané skutečnosti? Pokud ne proč?

25. Lobby. Vláda uvažuje nad zavedením jedné ze tří politik x, y a z. Existují 2 zájmové skupiny, jejichž peněžní ocenění uvedených politik uvádí tabulka. Vláda zavede politiku dle plateb, které obdrží od zájmových skupin. Uvažujme 2 mechanismy:

	x	y	z
skupina A	0	3	-100
skupina B	0	-100	3

Table 3:

- First-price aukce. Každá skupina si vybere politiku a částku, kterou zaplatí. Vláda zavede tu politiku, kterou si vybrala skupina, která zaplatí nejvíce. Tato skupina zaplatí, druhá skupina nemusí platit nic.
- Menu aukce. Každá skupina si vybere částku, kterou je ochotna zaplatit za každou politiku. Vláda zavede tu politiku, pro kterou je součet plateb obou skupin nejvyšší. Obě skupiny zaplatí částku, kterou přislíbily.

Předpokládejte že v případě remízy, vybere vláda tu politiku, jejíž název je dříve v abecedě. Ukažte, že first-price aukce má Nashovu rovnováhu ve které lobby A nabídne 103 za politiku y a lobby B nabídne 103 za politiku z. Ukažte, že menu aukce má Nashovu rovnováhu, ve které lobby A nabídne 3 za x, 6 za y, 0 za z a lobby B nabídne 3 za x, 0 za y, 6 za z.

26. Volební soutěž a asymetrickými preferencemi. Uvažujme Hotellingův model volební soutěže, kde jsou preference voličů asymetrické. Konkrétně, předpokládejme, že každý volič je indiferentní mezi určitou pozicí nalevo od své preferované pozice a dvojnásobně vzdálenou pozicí směrem doprava od své preferované pozice. Jak to ovlivní Nashovu rovnováhu?

27. Americké prezidentské volby. Uvažujme následující variantu Hotellingova modelu. Voliči jsou rozděleny mezi 2 státy. Stát 1 disponuje větším počtem zastupitelů než stát 2. Vítězem se stane kandidát, který obdrží většinu zastupitelských hlasů. Označme m_i pozici mediánového voliče státu i, přičemž $m_2 < m_1$. Každý ze dvou kandidátu si vybírá jedinou pozici pro oba státy. Kandidát, který získá většinu hlasů v daném státě, obdrží hlasy všech zastupitelů. Pokud kandidáti získají stejný počet voličských hlasů, pak se hlasy zastupitelů rozdělí na půl. Najděte Nashovy rovnováhy hry, která modeluje tuto situaci.

28. Volební soutěž mezi ideologickými kandidáty. Uvažujme následující variantu Hotellingova modelu. Jsou dva kandidáti, kteří se nezajímají o to, zda vyhrají, ale mají rovněž svou preferovanou pozici. Ostatní pozice jsou pro něj tím horší, čím dále jsou od preferované pozice. Předpokládejme, že preferovaná pozice jednoho kandidáta je nalevo od mediánu a preferovaná pozice druhého kandidáta je napravo od mediánu. Dále předpokládejme, že pokud oba kandidáti dostanou stejně hlasů, pak se dohodnou na zavedení kompromisní politiky $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, kde x_1 a x_2 jsou pozice kandidátů. Najděte Nashovu rovnováhu.

29. Válka do vyčerpání. Dva hráči bojují o objekt, kterého si cení na v_i a 50% šanci na získání objektu si cení na $\frac{v_i}{2}$. Hráči se rozhodují o tom, kdy vzdají boj. Čas, který stráví v boji, je pro ně nákladný. Tzn., že výplata hráče, který bojoval po dobu t_i a získal objekt je $v_i - t_i$. V případě nezískání objektu je jeho výplata $-t_i$. Pokud oba dva hráči vzdají boj ve stejný okamžik, pak každý získá objekt s pravděpodobností 50 %. Čas chápeme jako spojitou proměnou. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a nalezněte Nashovy rovnováhy.

30. All-pay aukce. Uvažujte aukci, ve které platí všichni účastníci aukce. Najděte Nashovu rovnováhu pro second-price aukci. Ukažte, že first-price aukce nemá žádnou Nashovu rovnovávhu.

31. Uvedení produktu na trh. Dvě firmy vyvíjejí konkurenční produkty pro trh s fixní velikostí. Čím déle stráví firma vývojem, tím lepší je její produkt. Ale firma, která uvede svůj produkt na trh první, získá výhodu, protože zákazníci nemohou po koupi produktu přejít ke konkurenčnímu. Firma, která uvede svůj produkt na trh první v čase t získá podíl na trhu $h(t)$. $h(t)$ je rostoucí funkce, pro niž platí, $h(0) = 0$ a $h(T) = 1$. Druhá firma získá zbytek trhu. Cílem firem je získat co nejvyšší podíl na trhu. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a nalezněte Nashovy rovnováhy.

32. Odpovědnost za škodu. Škůdce může vynaložit náklady a_1 k odvrácení škody. Poškozený může vynaložit náklady a_2 k odvrácení škody. Očekávaná výše škody je dána funkcí $\frac{1000}{a_1 a_2}$.
- Jaká je společensky optimální úroveň nákladů vynaložených k odvrácení škody?

- Uvažujme zákon, který stanoví, že škůdce nemusí platit žádnou škodu, pokud vynaloží náklady alespoň ve výši 10 a naopak musí zaplatit celou škodu, pokud vynaložil náklady menší než 10. Jak vypadá rovnováha této hry? Je tato rovnováha společensky optimální?
- Uvažujme tzv. objektivní odpovědnost za škodu. Tzn. škůdce je vždy zodpovědný za škodu bez ohledu na vynaložené náklady. Jak vypadá rovnováha této hry?

33. Prostorová konkurence. Mějme vesnici ve které jsou lidé rovnoměrně rozmístěni kolem cesty. Na každém konci vesnice je jeden obchod. Délku vesnice můžeme normalizovat na hodnotu 1. Každý člověk má transportní náklady s dopravou zboží z obchodu a nakupujte tedy tam, kde je součet ceny a transportních nákladů menší. Součet ceny a nákladů může být vyjádřen jako $p + t(x_i - x_o)$, kde t jsou náklady na jednotku cesty, x_i je pozice spotřebitele a x_o je pozice obchodu. Obchody se simultáně rozhodují o ceně. Určete rovnovážnou cenu. Jak tato ceny závisí na transportních nákladech?