1 Smíšené strategie

1. Holubice a jestřáb. Dva hráči bojují o kořist. Každý hráč může být pasivní (P) nebo agresivní (A). Preference hráčů nad deterministickými výsledky jsou následující: každý preferuje být agresivní, pokud je soupeř pasivní; každý preferuje být pasivní, pokud je soupeř agresivní; při své strategii je pro hráče lepší, pokud je oponent pasivní než agresivní. Uvažujme hráče s vNM preferencemi, které splňují následující podmínky (i) každý hráč je indiferentní mezi výsledkem (P,P) a loterií, která připisuje pravděpodobnost $\frac{1}{2}$ profilu (A,A) a pravděpodobnost $\frac{1}{2}$ loterii v níž je daný hráč A a protivník P; (ii) každý hráč je indiferentní mezi výsledkem v níž je daný hráč P a protivník A a loterií která připisuje pravděpodobnost $\frac{2}{3}$ profilu (A,A) a pravděpodobnost $\frac{1}{3}$ profilu (P,P). Najděte výplatní funkci, která reprezentuje tyto preference. Najděte Nashovu rovnováhu této hry.

2. Obrana území. Generál A brání území před armádou B. Generál A má k dispozici 3 jednotky, generál B 2 jednotky. Území je chráněno horami a bitvy se mohou odehrávat jen ve dvou údolích. Generál A vyhraje bitvu v každém údolí, pokud tam pošle alespoň tolik jednotek jako generál B; území ubrání jen, pokud vyhraje bitvy v obou údolích. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a najděte Nashovu rovnováhu.

3. Plavání se žraloky. Vy a váš přítel jste se rozhodli strávit dva dny u moře. Oba dva věříte, že s pravděpodobností π jsou ve vodě žraloci. Oba máte stejné preference, které připisují hodnotu $-c$ situaci, kdy se koupete se žraloky; 0 situaci, kdy jste na pláži a nejdete do moře a 1 situaci, kdy jdete do moře a nejsou v něm žraloci. Pokud je plavec napaden žraloky první den, pak s jistotou víte, že žraloci budou v moři i druhý den. Pokud je první den moře bez žraloků, pak bude takové i druhý den. Pokud ani jeden z vás dvou nejde první den plavat, pak stále očekáváte, že žraloci jsou v moři s pravděpodobností π. Modelujte tuto situaci jako strategickou hru. (Všimněte si, že pokud první den zjistíte, že žraloci v moři nejsou, pak jistě půjdete plavat i druhý den. Vaše výplata, pokud jdete plavat první den je $\pi(-c+0)+(1-\pi)(1+1)$). Najděte Nashovu rovnováhu. Jak přítomnost přítele ovlivňuje vaše rozhodování?

4. Křižovatka. Jedinci z jedné populace řidičů se náhodně po dvou potkávají na křižovatce. Každý řidič na ní může buď zastavit nebo jet dál. Preference řidičů jsou dány následující tabulkou, kde $\epsilon \in (0,1)$. Najděte symetrickou rovnováhu této hry.

	Stop	Jet dál
Stop	$1,1$	$1-\epsilon,2$
Jet dál	$2,1-\epsilon$	$0,0$

Table 1: Křižovatka

Nyní předpokládejte, že řidiči se cítí vinni, když jedou dál a jejich výplata tím pádem klesne o $\delta > 0$. Ukažte, že řidiči jsou na tom v symetrické rovnováze této hry lépe než v rovnováze původní hry.

5. Hotellingův model diferenciace se třemi firmami. Tři firmy soutěží pomocí lokace obchodu. Firmy si volí lokaci některou z lokací $0, \frac{1}{10}, ..., \frac{9}{10}, 1$ Zákazníci jsou rovnoměrně rozmístěni na škále mezi $[0,1]$ a nakupují u firmy, která je jim nejblíže. Každá firma se snaží, aby k ní přišlo co nejvíce zákazníků. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a najděte Nashovu rovnováhu.

6. Hlášení zločinu (Samaritán) s heterogenními agenty. Uvažujme hru hlášení zločinu, ve které jsou dvě skupiny hráčů lišících se náklady na ohlášení. n_1 lidí má náklady c_1 a n_2 lidí má náklady c_2. Platí, že $c_1 < c_2$. Ukažte, že pokud se c_1 a c_2 příliš neliší, pak má hra smíšenou rovnováhu, ve které každý hráč hraje obě strategie s kladnou pravděpodobností.

7. Zformulujte hru, která modeluje hru kámen, nůžky, papír a najděte všechny Nashovy rovnováhy.

8. Hra na audit. Podnikatel přiznává své příjmy. Má možnost je přiznat poctivě nebo je zatajit. Finanční úřad má možnost podnikateli důvěřovat nebo jít k němu na kontrolu. Výplaty jsou dány následující tabulkou, náklady auditu jsou C, F je pokuta při odhalení zatajování příjmů. Najděte Nashovu rovnováhu uvedené hry. Border a Sobel (1987) navrhují, aby čestní podnikatelé byli po kontrole, která neodhalí

	Důvěřovat	Kontrolovat
Přiznat	$-1, 4$	$-1, 4 - C$
Podvádět	$0, 0$	$-F, 4 - C$

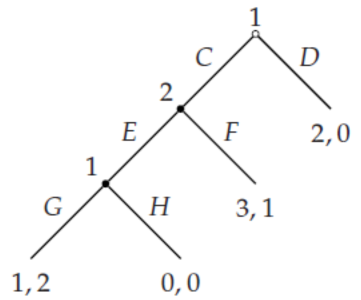
Table 2: Audit

podvod, odměněni. Jaká je logika tohoto návrhu?

9. Patentový závod. Dvě firmy se snaží získat patent, kterého si cení na v_i a 50% šanci na získání objektu si cení na $\frac{v_i}{2}$. Hráči se rozhodují o tom, kolik investují do vývoje. Patent získá firma, která investuje více. Tzn., že výplata hráče, který investoval částku t_i a získal objekt je $v_i - t_i$. V případě nezískání objektu je jeho výplata t_i. Pokud oba dva hráči investují stejnou částku, pak každý získá objekt s pravděpodobností 50 %. Čas chápeme jako spojitou proměnou. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a nalezněte Nashovy rovnováhy. Rogerson(1982) na podobné hře ukazuje, kolik zdrojů se vyčerpá v soutěži o monopolní výsady.

2 Extenzivní hry

1. Najděte Nashovu rovnováhu následující hry. Dejte pozor, že vypíšete všechny strategie.



2. Definujme následující hru: hráči 1 a 2; konečné historie (C,E) (C,F) (D,G) a (D,H); hráčská funkce $P(\varnothing) = 1$ a $P(C) = P(D) = 1$; preference hráče 1 $(C, F) \succ (D, G) \succ (C, E) \succ (D, H)$; preference hráče 2 $(D, G) \succ (C, F) \succ (D, H) \succ (C, E)$. Zapište tuto hru v diagramu. Najděte Nashovu rovnováhu a SPE.

3. Volení pomocí veta. Dva lidé si volí z několika společných možností následujícím způsobem: střídají se ve vyřazování jednotlivých možností dokud nezůstane jen jedna. Předpokládejme, že existují tři možnosti X,Y a Z. Preference prvního člověka jsou $X \succ Y \succ Z$, preference druhého člověka jsou $Z \succ Y \succ X$. Modelujte tuto situaci jako hru. Najděte Nashovu rovnováhu a SPE.

4. Spálení mostu. Armáda země 1 se rozhoduje, jestli zaútočí na armádu země 2, která obsadila ostrov mezi zeměmi 1 a 2. V případě útoku se armáda 2 může bránit nebo přes most opustit ostrov. Každá země preferuje obsazení ostrova před jeho neobsazením. Boj je pro obě armády nejhorší možností. Modelujte tuto situaci jako extenzivní hru. Co se stane, pokud armáda 2 spálí ostrov?

5. Doktor divnoláska. SSSR a USA mají jaderné zbraně. USA se rozhodují, zda zaútočí konvenčními zbraněmi na SSSR. Pokud to udělají, pak SSSR může odpovědět konvenčním protiútokem, nebo jaderným protiútokem. Pokud se SSSR rozhodne pro jaderný protiútok, pak USA může také zareagovat jaderným protiútokem. V případě jaderného útoku je země zničena. Preference obou zemí jsou stejné. Obě země preferují výsledky, kdy nejsou zničeny před výsledky, kdy jsou zničeny. Pokud už jsou zničeny, pak preferují výsledek, kdy je zničena i druhá země. USA mají vojenskou převahu a proto preferují útok konvenčními zbraněmi před neútočením. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a najděte SPE. Co se stane, pokud SSSR sestaví stroj, který vypustí na USA v případě jejich útoku jaderné zbraně a který není možné zastavit.

6. Holdup game. Hra je podobná ultimátní hře s tím rozdílem, že na začátku hry se hráč 1 rozhoduje o investici. Může investovat buď hodně nebo málo (H nebo L). Čím víc hráč 1 investuje, tím větší je částka (c_H,c_L), kterou hráč 2 poté rozděluje (nabídne x). Hráč 1 může nabídku hráče 1 zamítnout nebo přijmout. Pokud nabídku odmítne, pak oba hráči obdrží výplatu 0. Pokud nabídku přijme, pak hráč 1 získá $x - H$ nebo $x - L$ a hráč 2 získá $c_H - x$ nebo $c_L - x$. Formulujte hru, která modelujte tuto situaci a najděte Nashovy rovnováhy a SPE.

7. Rozmazlené dítě (Na podobné hře založil Becker(1981) svůj model rozhodování v rodině). Akce dítěte a ovlivňuje jeho osobní příjem $c(a)$ i příjem rodičů $p(a)$. Vždy platí $c(a) < p(a)$. Dítě je sobecké, stará se jen o $c(a)$. Rodičům naopak záleží jak na vlastním příjmu, tak na příjmu dítěte. Jejich výplatní funkce je $min\{p(a), \alpha c(a)\}$, kde α ukazuje nakolik jim záleží na příjmu dítěte. Pokud $\alpha = 1$, pak jim na příjmu dítěte záleží stejně jako na vlastním. Rodiče mohou, poté co si dítě volí akci a, transferovat část příjmu k dítěti. (Jejich výplatní funkce při transferu t je $min\{p(a) - t, \alpha(c(a) + t)\}$) Formulujte hru, která modeluje tuto situaci pro $\alpha = 1$ a ukažte, že v SPE dítě maximalizuje společný příjem sebe a rodičů. Jak se změní SPE, pokud $\alpha > 1$?

8. Dolarová aukce. Aukce se účastní dva lidé a oba si draženého objektu cení na v. Každý z hráčů na konci musí zaplatit svou nabídku. Vítěz tedy získá $v - b_i$, poražený $-b_i$. Aukce probíhá tak, že hráč buď končí nebo nabídne o 1 Kč více než protivník. Každý z hráčů má bohatství $w > v$. Více než w nemůže hráč nabídnout. Modelujte aukci jako extenzivní hru a najděte SPE. (Zkuste nejprve nějaká konkrétní čísla, např. $v = 3$ a $w = 4$) Jaké výsledky aukce byste očekávali v realitě?

9. Vstupní hra s finančními omezeními. Na trhu působí jedna firma (monopolista) a další firma se rozhoduje o vstupu na trh (vyzyvatel). Pokud vyzyvatel nevstoupí, pak monopolista získá po T zbývajících period výplatu M a vyzyvatel 0. Pokud vyzyvatel vstoupí, pak zaplatí náklady vstupu f. V každé z T dalších period se monopolista rozhoduje, zda bude s vyzyvatelem bojovat nebo se s jeho vstupem smíří. V prvním případě obdrží oba výplatu $-F < 0$, ve druhém případě obdrží oba $C > max\{F, f\}$. Pokud ve kterémkoliv dalším období vyzyvatel odejde z trhu, pak v daném období obdrží obě firmy výplatu 0. V dalších obdobích dostane vyzyvatel výplatu 0 (nemůže znovu vstoupit) a monopolista získá $M > 2C$. Najděte SPE hry modelující tuto situaci. Jak se situace změní, pokud má vyzyvatel omezené finanční zdroje a může přežít jen $T - 2$ období boje (v období T-1 by musel odejít z trhu)?

10. Ultimátní hra s hráči preferujícími rovnost. Uvažujme variantu ultimátní hry, ve které se hráči starají nejen o své vlastní příjmy, ale i rovnost distribuce příjmů. Předpokládejme, že preference hráčů jsou dány výplatní funkcí $u_i(x_1, x_2) = x_i - \beta_i|x_1 - x_2|$, kde $\beta_i > 0$. Hráči si dělí částku 1. Najděte SPE a srovnejte je. Existují nějaké hodnoty β_1 a β_2 pro něž je nabídka v rovnováze zamítnuta?

11. Agenda. (Romer, Rosenthal (1987)) Při různém schvalování může určitý orgán návrh pouze přijmout nebo odmítnout, nemůže jej měnit. Předpokládejme, že máme komisi, která předkládá návrh a výbor, který ho schvaluje. Komise i výbor mají různé preference, které můžeme reprezentovat stejně jako preference voličů v Hotellingově modelu. Konkrétně označme preference výboru jako 0 a preference komise $y_k > 0$. Komise předkládá návrh y. Pokud ho výbor neschválí, pak je zůstává platný dosavadní stav y_0. Najděte SPE. Jak závisí na y_0?

12. Stackleberg s fixními náklady. Najděte SPE v Stacklebergově oligopolu se dvěma firmami v případě, kdy inverzní poptávková funkce je $P(Q) = \alpha - Q$ a nákladová funkce firmy i má tvar

$$C_i(q_i) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } q_i = 0 \\ f + cq_i & \text{pokud } q_i > 0 \end{cases}$$

kde $c > 0$, $f > 0$ a $c < \alpha$. Ukažte, že v případě $c = 0$, $\alpha = 12$ a $f = 4$ má hra jedinou SPE.

13. Sekvenční Hotellingův model se dvěma a třemi kandidáty. Uvažujte variantu Hotellingova modelu politické soutěže, ve které se kandidáti nerozhodují v jeden okamžik, ale postupně. Najděte SPE pro $n = 2$ a $n = 3$. Předpokládejte, že každý z hráčů má možnost nevstoupit do volebního boje. Každý kandidát preferuje remízu před nevstoupením a nevstoupení před prohrou. Nejlepší je pro každého pochopitelně vítězství.

14. Hladoví lvi. Skupina lvů s hierarchickou strukturou narazí na zebru. Vedoucí lev se rozhoduje zda zebru sní. Pokud ji nesní, pak zebra uteče. Pokud je vedoucí lev sní, tak bude unaven a lev 2 ho může sníst. Pokud lev 2 nesní lva 1, pak hra končí. Pokud ho sní, pak může být sněden lvem 3. Každý lev preferuje být sytý než být hladový a být hladový před být sněden. Najděte SPE pro případ n lvů. Přežije zebra?

15. Šikanující žaloba (Nuisance suits). Šikanující žaloba je žaloba, která má mizivou naději na úspěch a jejím účelem je dospět k finančnímu vyrovnání s protistranou. Představme si následující hru. Žalobce se rozhoduje, zda vznese nárok nebo ne. Pokud ho nevznese, pak oba hráči končí s výplatou 0. Pokud ho vznese, pak nese náklady c a navrhne obviněnému možnost odškodnění s. Pokud obviněný návrh přijme, pak je žalobce odškodněn a obdrží $s-c$, obviněný má $-c$. Pokud návrh odmítne, pak se žalobce rozhoduje, zda půjde k soudu. U soudu má šanci na vítězství pX, kde X je částka, kterou vysoudí a $p \to 0$ je pravděpodobnost, že vyhraje. Žalující strana nese u soudu další náklady ve výši d. Obviněný nese náklady e.
- Najděte SPE této hry. Jak je SPE ovlivněno velikostí nákladů e?
- Co se stane, pokud žalující strana zaplatí soudní náklady d už při podání návrhu na odškodnění? Má smysl vytvořit si takovým způsobem utopené náklady?
- Může stejně reagovat obviněný? Jaké má jeho reakce společenské náklady?

16. Aukce se vstupními náklady. Dva lidé se účastní dražby domu. Aukce probíhá formou second-price aukce. Oba dva účastníci si cení domu na 1 mil. Kč. Vstup do aukce je zatížen náklady ve výši c (např. na zajištění financování nebo vstupní poplatek). Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a najděte všechny Nashovy rovnováhy.

17. Ultimátní hra s hráči preferujícími rovnost a nejistotou. Uvažujme hru z příkladu 10, ve které $\beta_1 = 1$ a hráč 2 pochází z populace ve které je poměr hráčů s $\beta_2 = 0$ roven p a podíl hráčů s $\beta_2 = 1$ je $1-p$. Modelujte tuto situaci jako extenzivní hru, ve které hraje náhoda. Najděte SPE. Existují nějaké rovnováhy v nichž je nabídka zamítnuta?

18. Vyjednávání mezi firmou a odbory. Vedení firmy vyjednává s odbory o platech. Vedení ví o kolik budou příjmy vyšší než kapitálové výdaje. O tento přebytek vyjednává vedení firmy s odbory. Přebytek bude mít velikost H s pravděpodobností p a L s pravděpodobností $1-p$, $H > L$. Vyjednávání má podobu ultimátní hry, kde odbory učiní nabídku a vedení ji přijme nebo zamítne. Pokud odbory požadují x, velikost přebytku je z a vedení nabídku přijme, pak výplata vedení je $z-x$ a výplata odborů je x. Pokud vedení nabídku odmítne, pak odbory zahájí stávku a všichni získají 0. Najděte SPE. Najděte pravděpodobnost, že odbory zahájí stávku.

19. Efekt dluhu na odchod z odvětví. Uvažujme hru o odchod z odvětví. Předpokládejme, že $c = 10$, $k_1 = 40$, $k_2 = 20$ a $P_t(Q) = 100 - t - Q$. Najděte SPE. Jak velký dluh si může firma 2 dovolit, aby nalezené SPE bylo stále SPE?

20. Principál-agent. Agent má užitkovou funkci $U = \sqrt{w} - e$, kde e může nabývat hodnot 0 nebo 7. V případě odmítnutí kontraktu získá agent užitek $\overline{U} = 4$. Jen agent pozoruje hodnotu svého úsilí, ale mzda může být podmíněna úrovní výstupu. Označme $\overline{w}$ mzdu při výstupu 1000 a $\underline{w}$ mzdu při výstupu 0. Závislost výstupu na úsilí je dána tabulkou.

	pravděpodobnost výstupu 0	pravděpodobnost výstupu 1000
e=0	0,9	0,1
e=7	0,2	0,8

- Jak vypadají všechna motivační omezení a omezení účasti pro situaci, kdy agent vyvine velkou snahu.
- Jak vypadá optimální kontrakt? Jaký je agentův užitek? Jaké jsou náklady principála?
- Jaký by byl agentův užitek při plných informacích? Jaké jsou náklady principála?